BURHAN

Suites numériques : exercices, entraînement

2ème Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-experimentales/mathematiques/suites-numeriques/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Suites numériques	Entraînement	7

Exercice 1

Un point fixe qui ne prouve rien

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n - 3$.

Un élève résout l'équation $2x - 3 = x$, trouve $x = 3$ et conclut : « la suite converge vers 3 ».

1.

Calculer u_1, u_2 et u_3. La conclusion de l'élève te paraît-elle plausible ?

INDICE

Calcule de proche en proche. Ensuite, regarde l'écart entre chaque terme et 3 : diminue-t-il ?

2.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 3$. Montrer que (v_n) est une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.

INDICE

Pars de $v_{n+1} = u_{n+1} - 3$. Si tu bloques : remplace u_{n+1} par son expression en fonction de u_n, puis cherche à faire apparaître $u_n - 3$.

3.

Exprimer v_n, puis u_n, en fonction de n. Déterminer $\lim u_n$.

INDICE

Utilise le terme général d'une suite géométrique, puis reviens à u_n. Pour la limite, situe la raison par rapport à 1.

4.

Expliquer précisément l'erreur de l'élève.

INDICE

Relis la propriété du point fixe : quelle hypothèse exige-t-elle sur la suite elle-même ? L'élève l'a-t-il établie ?

Exercice 2

Inverser pour trouver une suite arithmétique

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + 2u_n}.$$

1.

Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. Pourquoi ce résultat garantit-il que tous les termes existent ?

INDICE

Dans l'hérédité, si $u_n > 0$, regarde le signe du numérateur et celui du dénominateur de u_{n+1}.

2.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{1}{u_n}$. Montrer que (v_n) est arithmétique. Préciser sa raison et son premier terme.

INDICE

Commence par justifier que v_n existe. Puis calcule v_{n+1} à partir de la relation. Si tu bloques : renverser la fraction donne $\dfrac{1}{u_{n+1}}$; sépare-la ensuite en deux termes.

3.

Exprimer v_n, puis u_n, en fonction de n. En déduire $\lim u_n$.

INDICE

Le terme général d'une suite arithmétique s'écrit $v_n = v_0 + nr$.

4.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$S_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \cdots + \frac{1}{u_n}.$$

Calculer S_n en fonction de n.

INDICE

Reconnais une somme de termes consécutifs de (v_n). Compte bien les termes, de l'indice 0 à l'indice n.

Exercice 3

Réduire l'écart à chaque étape

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n + 12}.$$

1.

Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geq 0$.

INDICE

Une racine carrée existe dès que le nombre sous la racine est positif ou nul, et elle est toujours positive ou nulle.

2.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$4 - u_{n+1} = \frac{4 - u_n}{4 + \sqrt{u_n + 12}}.$$

En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|4 - u_{n+1}| \leq \frac{1}{4} |4 - u_n|.$$

INDICE

La différence $4 - \sqrt{u_n + 12}$ contient une racine : pense à la quantité conjuguée. Pour l'inégalité, demande-toi quelle est la plus petite valeur possible du dénominateur.

3.

Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|4 - u_n| \leq 4 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

En déduire $\lim u_n$.

INDICE

Pour l'hérédité, pars de l'inégalité de la question 2. Si tu bloques : remplace ensuite $|4 - u_n|$ par sa majoration donnée par l'hypothèse de récurrence. Pour la limite, écris l'inégalité comme un encadrement de u_n.

4.

Déterminer un entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, on soit sûr d'avoir $|4 - u_n| \leq 10^{-3}$.

INDICE

Utilise la majoration de la question 3 : à partir de quel rang est-elle inférieure ou égale à 10^{-3} ? Si tu bloques : écris $4 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$ comme l'inverse d'une puissance de 4, puis calcule quelques puissances de 4 .

Exercice 4

Toujours sous 2, et pourtant de limite 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \dfrac{2n+1}{n+3}$. On note f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+3}$.

1.

Montrer que f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. En déduire le sens de variation de (u_n).

INDICE

Calcule $f'(x)$, ou écris $f(x) = 2 - \dfrac{5}{x+3}$ et raisonne sur $x \mapsto \dfrac{5}{x+3}$.

2.

Montrer que $u_n < 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire que (u_n) converge.

INDICE

Étudie le signe de $2 - u_n$. Pour la convergence, associe ce résultat à la question 1 et nomme le critère utilisé.

3.

Déterminer $\lim u_n$.

INDICE

Utilise $f(x) = 2 - \dfrac{5}{x+3}$ et la limite de f en $+\infty$.

4.

Un élève écrit : « Pour tout n, $u_n < 2$, donc $\lim u_n < 2$. » Commenter.

INDICE

Compare son affirmation au résultat de la question 3. Que dit exactement le passage à la limite dans une inégalité ?

Exercice 5

Même relation, deux premiers termes, deux destins

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x + 2$. On étudie deux suites définies par la même relation :

- (a_n), avec $a_0 = \dfrac{3}{2}$ et $a_{n+1} = f(a_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;
- (b_n), avec $b_0 = 3$ et $b_{n+1} = f(b_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1.

Vérifier que, pour tout réel x, $f(x) - x = (x-1)(x-2)$. Montrer que f est croissante sur $[1, +\infty[$.

INDICE

Développe le produit. Pour les variations, étudie le signe de $f'(x)$, ou écris $f(x) = (x-1)^2 + 1$.

2.

Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq a_n \leq 2$. Montrer ensuite que (a_n) est décroissante.

INDICE

Pour l'hérédité, utilise le sens de variation de f sur $[1, 2]$. Si tu bloques : calcule $f(1)$ et $f(2)$. Pour la monotonie, relie $a_{n+1} - a_n$ à la question 1.

3.

Montrer que (a_n) converge, puis déterminer sa limite.

INDICE

Quel critère s'applique à une suite décroissante et minorée ? Pour la valeur, vérifie les hypothèses de la propriété du point fixe sur $[1, 2]$. Si deux valeurs restent possibles, compare-les au premier terme.

4.

Montrer que l'intervalle $[2, +\infty[$ est stable par f, puis que $b_n \geq 2$ pour tout n. En déduire que (b_n) est croissante et que $b_n \geq 3$ pour tout n.

INDICE

Utilise la croissance de f sur $[2, +\infty[$ et la valeur de $f(2)$. Pour la monotonie, reprends la méthode de la question 2 avec le signe de $(b_n - 1)(b_n - 2)$.

5.

Un élève affirme : « (b_n) est croissante, $[2, +\infty[$ est stable, f est continue et 2 est un point fixe, donc (b_n) converge vers 2. » Montrer qu'il se trompe, puis déterminer la limite de (b_n).

INDICE

Raisonne par l'absurde. Commence ta rédaction par : « Supposons que (b_n) converge vers un réel ℓ ; alors… ». Si tu bloques : que dit la propriété du point fixe sur ℓ ? Compare avec $b_n \geq 3$.

Exercice 6

Puissances en compétition

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$x_n = \frac{3^{n+1} - 2^n}{3^n + 5 \times 2^n},$$
$$y_n = \frac{2^n - 5^n}{4^n + 1},$$
$$z_n = \frac{(-2)^n + 3^n}{3^n},$$
$$S_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n}.$$

1.

Déterminer $\lim x_n$.

INDICE

Repère, en haut et en bas, la puissance de plus grande base. Si tu bloques : divise le numérateur et le dénominateur par cette puissance.

2.

Déterminer $\lim y_n$.

INDICE

Ici, la puissance dominante n'est pas la même en haut et en bas. Si tu bloques : factorise chacun par sa propre puissance dominante, puis regroupe leur quotient en une seule puissance.

3.

Déterminer $\lim z_n$.

INDICE

Sépare le quotient en deux fractions, puis écris $\frac{(-2)^n}{3^n}$ comme une seule puissance.

4.

Calculer S_n en fonction de n, puis déterminer $\lim S_n$.

INDICE

S_n est une somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$. Compte les termes : de $\frac{1}{3^0}$ à $\frac{1}{3^n}$.

Exercice 7

Monter d'abord, descendre ensuite

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $u_n = \dfrac{n^2}{2^n}$.

1.

Calculer u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5. La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est-elle monotone ?

INDICE

Écris les résultats en fractions. Compare u_1, u_2, u_3, puis u_3, u_4, u_5.

2.

Montrer que, pour tout $n \geq 1$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{2n^2}.$$

Montrer ensuite que ce quotient est inférieur à 1 pour tout $n \geq 3$.

INDICE

Les termes sont strictement positifs : le quotient a un sens. Pour l'inégalité, écris $\dfrac{(n+1)^2}{n^2} = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2$ et majore $1+\dfrac{1}{n}$ lorsque $n \geq 3$.

3.

Montrer que (u_n) converge. On note ℓ sa limite.

INDICE

Cherche un minorant évident des termes. Cite ensuite le critère qui convient, en précisant à partir de quel rang ses hypothèses sont vraies.

4.

En passant à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = \dfrac{(n+1)^2}{2n^2} \times u_n$, déterminer ℓ.

INDICE

Cherche la limite de $\dfrac{(n+1)^2}{2n^2}$. Que vaut la limite de (u_{n+1}) si celle de (u_n) vaut ℓ ?