BURHAN

Suites numériques : exercices, entraînement

2ème Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-experimentales/mathematiques/suites-numeriques/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Suites numériques	Entraînement	7

Exercice 1

Un point fixe qui ne prouve rien

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n - 3$.

Un élève résout l'équation $2x - 3 = x$, trouve $x = 3$ et conclut : « la suite converge vers 3 ».

1.

Calculer u_1, u_2 et u_3. La conclusion de l'élève te paraît-elle plausible ?

INDICE

Calcule de proche en proche. Ensuite, regarde l'écart entre chaque terme et 3 : diminue-t-il ?

CORRIGÉ

On calcule de proche en proche :

$$\begin{aligned} u_1 &= 2 \times 1 - 3 = -1, \\ u_2 &= 2 \times (-1) - 3 \\ &= -5, \\ u_3 &= 2 \times (-5) - 3 \\ &= -13. \end{aligned}$$

Les écarts à 3 valent 2, 4, 8 et 16 : ils **doublent** à chaque étape, au lieu de diminuer.

Conclusion. $u_1 = -1$, $u_2 = -5$ et $u_3 = -13$. La conclusion de l'élève ne paraît pas plausible ; la suite de l'exercice le prouve.

2.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 3$. Montrer que (v_n) est une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.

INDICE

Pars de $v_{n+1} = u_{n+1} - 3$. Si tu bloques : remplace u_{n+1} par son expression en fonction de u_n, puis cherche à faire apparaître $u_n - 3$.

CORRIGÉ

Soit $n \in \mathbb{N}$. On remplace u_{n+1} par $2u_n - 3$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 3 \\ &= 2u_n - 3 - 3 \\ &= 2(u_n - 3) = 2v_n. \end{aligned}$$

Conclusion. (v_n) est **géométrique de raison** 2, de premier terme $v_0 = u_0 - 3 = -2$.

3.

Exprimer v_n, puis u_n, en fonction de n. Déterminer $\lim u_n$.

INDICE

Utilise le terme général d'une suite géométrique, puis reviens à u_n. Pour la limite, situe la raison par rapport à 1.

CORRIGÉ

Expressions. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times 2^n = -2 \times 2^n = -2^{n+1}$. Comme $u_n = v_n + 3$:

$$u_n = 3 - 2^{n+1}.$$

Contrôle. $u_3 = 3 - 2^4 = 3 - 16 = -13$: on retrouve la question 1.

Limite. Comme $2 > 1$, $\lim 2^{n+1} = +\infty$, donc (u_n) tend vers $-\infty$.

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = -2^{n+1}$ et $u_n = 3 - 2^{n+1}$; de plus $\lim u_n = -\infty$.

4.

Expliquer précisément l'erreur de l'élève.

INDICE

Relis la propriété du point fixe : quelle hypothèse exige-t-elle sur la suite elle-même ? L'élève l'a-t-il établie ?

CORRIGÉ

Ici, $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f : x \mapsto 2x - 3$. La propriété du point fixe dit : **si** la suite converge, et si

- f est continue sur un intervalle fermé I ;
- $f(I) \subset I$;
- $u_0 \in I$,

alors sa limite ℓ appartient à I et vérifie $f(\ell) = \ell$.

Avec $I = \mathbb{R}$, les trois conditions de la liste sont vraies. La seule hypothèse qui manque est la convergence, que l'élève n'a pas prouvée.

La convergence est une **hypothèse** de la propriété, pas une conclusion. Ici, la suite tend vers $-\infty$: l'équation $2x - 3 = x$ dit seulement que, **si** la suite avait convergé, sa limite aurait valu 3.

Conclusion. L'élève applique la propriété du point fixe sans avoir établi la convergence de (u_n) : sa conclusion est fausse.

Remarque. Avec $u_0 = 3$, on aurait $v_0 = 0$, et la suite serait constante, égale à 3. Le point fixe n'est atteint que dans ce cas particulier.

À retenir. On prouve d'abord la convergence ; ensuite seulement, on cherche la limite parmi les points fixes.

Exercice 2

Inverser pour trouver une suite arithmétique

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + 2u_n}.$$

1.

Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. Pourquoi ce résultat garantit-il que tous les termes existent ?

INDICE

Dans l'hérédité, si $u_n > 0$, regarde le signe du numérateur et celui du dénominateur de u_{n+1}.

CORRIGÉ

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $P(n)$: « $u_n > 0$ ».

Initialisation. $u_0 = 1 > 0$: $P(0)$ est vraie.

Hérédité. On fixe un entier n tel que $P(n)$ soit vraie, c'est-à-dire $u_n > 0$. Alors $1 + 2u_n > 1 > 0$. Le quotient de deux nombres strictement positifs est strictement positif : $u_{n+1} > 0$. Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

Existence des termes. Le dénominateur $1 + 2u_n$ est donc toujours strictement positif, jamais nul : chaque terme se calcule à partir du précédent, et tous les termes existent.

2.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{1}{u_n}$. Montrer que (v_n) est arithmétique. Préciser sa raison et son premier terme.

INDICE

Commence par justifier que v_n existe. Puis calcule v_{n+1} à partir de la relation. Si tu bloques : renverser la fraction donne $\dfrac{1}{u_{n+1}}$; sépare-la ensuite en deux termes.

CORRIGÉ

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ (question 1), donc v_n existe. Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1 + 2u_n}{u_n} \\ &= \frac{1}{u_n} + 2 = v_n + 2. \end{aligned}$$

Conclusion. (v_n) est **arithmétique de raison** 2, de premier terme $v_0 = \dfrac{1}{u_0} = 1$.

3.

Exprimer v_n, puis u_n, en fonction de n. En déduire $\lim u_n$.

INDICE

Le terme général d'une suite arithmétique s'écrit $v_n = v_0 + nr$.

CORRIGÉ

Expressions. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 + 2n = 1 + 2n$. Comme $u_n = \dfrac{1}{v_n}$:

$$u_n = \frac{1}{2n+1}.$$

Contrôle. $u_1 = \dfrac{1}{3}$, et la relation donne bien $u_1 = \dfrac{1}{1+2} = \dfrac{1}{3}$.

Limite. $\lim(2n+1) = +\infty$; par limite de l'inverse, (u_n) tend vers 0.

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 2n+1$ et $u_n = \dfrac{1}{2n+1}$; de plus $\lim u_n = 0$.

4.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$S_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \cdots + \frac{1}{u_n}.$$

Calculer S_n en fonction de n.

INDICE

Reconnais une somme de termes consécutifs de (v_n). Compte bien les termes, de l'indice 0 à l'indice n.

CORRIGÉ

Reconnaître la somme. $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$: c'est une somme de termes consécutifs de la suite arithmétique (v_n).

Nombre de termes. De l'indice 0 à l'indice n, il y a $n+1$ termes.

Calcul. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} S_n &= (n+1) \times \frac{v_0 + v_n}{2} \\ &= (n+1) \times \frac{2n+2}{2} \\ &= (n+1)^2. \end{aligned}$$

Contrôle. Pour $n = 2$: $S_2 = 1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$.

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = (n+1)^2$.

À retenir. Avec n termes au lieu de $n+1$, on aurait trouvé $n(n+1)$, et le contrôle $n = 2$ aurait donné 6 au lieu de 9.

Exercice 3

Réduire l'écart à chaque étape

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n + 12}.$$

1.

Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geq 0$.

INDICE

Une racine carrée existe dès que le nombre sous la racine est positif ou nul, et elle est toujours positive ou nulle.

CORRIGÉ

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $P(n)$: « u_n existe et $u_n \geq 0$ ».

Initialisation. $u_0 = 0$: $P(0)$ est vraie.

Hérédité. On fixe un entier n tel que $P(n)$ soit vraie. Alors $u_n + 12 \geq 12 > 0$, donc $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 12}$ existe. Une racine carrée est positive ou nulle, donc $u_{n+1} \geq 0$: $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geq 0$.

2.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$4 - u_{n+1} = \frac{4 - u_n}{4 + \sqrt{u_n + 12}}.$$

En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|4 - u_{n+1}| \leq \frac{1}{4} |4 - u_n|.$$

INDICE

La différence $4 - \sqrt{u_n + 12}$ contient une racine : pense à la quantité conjuguée. Pour l'inégalité, demande-toi quelle est la plus petite valeur possible du dénominateur.

CORRIGÉ

L'égalité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $r = \sqrt{u_n + 12}$: on a $u_{n+1} = r$, $r^2 = u_n + 12$ et $4 + r > 0$. On multiplie et on divise par $4 + r$:

$$\begin{aligned} 4 - u_{n+1} &= 4 - r \\ &= \frac{(4 - r)(4 + r)}{4 + r} \\ &= \frac{16 - r^2}{4 + r} \\ &= \frac{16 - (u_n + 12)}{4 + r} \\ &= \frac{4 - u_n}{4 + \sqrt{u_n + 12}}. \end{aligned}$$

L'inégalité. Comme $r \geq 0$, le dénominateur vérifie $4 + r \geq 4 > 0$. En passant aux valeurs absolues :

$$\begin{aligned} |4 - u_{n+1}| &= \frac{|4 - u_n|}{4 + r} \\ &\leq \frac{|4 - u_n|}{4}. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'égalité demandée est vraie et $|4 - u_{n+1}| \leq \frac{1}{4} |4 - u_n|$.

3.

Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|4 - u_n| \leq 4 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

En déduire $\lim u_n$.

INDICE

Pour l'hérédité, pars de l'inégalité de la question 2. Si tu bloques : remplace ensuite $|4 - u_n|$ par sa majoration donnée par l'hypothèse de récurrence. Pour la limite, écris l'inégalité comme un encadrement de u_n.

CORRIGÉ

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $P(n)$: « $|4 - u_n| \leq 4 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$ ».

Initialisation. $|4 - u_0| = 4$ et $4 \times \left(\frac{1}{4}\right)^0 = 4$: $P(0)$ est vraie.

Hérédité. On fixe un entier n tel que $P(n)$ soit vraie. D'après la question 2, puis $P(n)$:

$$\begin{aligned} &|4 - u_{n+1}| \\ &\leq \frac{1}{4}\,|4 - u_n| \\ &\leq \frac{1}{4} \times 4 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n \\ &= 4 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}. \end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Fin de la récurrence. Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Limite. Posons $e_n = 4 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$. Comme $0 < \frac{1}{4} < 1$, $\lim \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$, donc $\lim e_n = 0$. L'inégalité démontrée s'écrit, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$4 - e_n \leq u_n \leq 4 + e_n.$$

Les deux suites qui encadrent (u_n) convergent vers 4. D'après le théorème d'encadrement, (u_n) converge aussi vers 4.

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|4 - u_n| \leq 4 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$, et $\lim u_n = 4$.

Remarque. Cette méthode n'utilise ni la monotonie ni la propriété du point fixe.

4.

Déterminer un entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, on soit sûr d'avoir $|4 - u_n| \leq 10^{-3}$.

INDICE

Utilise la majoration de la question 3 : à partir de quel rang est-elle inférieure ou égale à 10^{-3} ? Si tu bloques : écris $4 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$ comme l'inverse d'une puissance de 4, puis calcule quelques puissances de 4 .

CORRIGÉ

Traduire. Pour tout $n \geq 1$:

$$4 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{4^{n-1}}.$$

La majoration est inférieure ou égale à 10^{-3} si et seulement si $4^{n-1} \geq 1000$.

Puissances de 4. $4^4 = 256 < 1000$ et $4^5 = 1024 \geq 1000$. La suite $\left(4^{n-1}\right)$ est croissante, donc $4^{n-1} \geq 1000$ dès que $n - 1 \geq 5$, c'est-à-dire $n \geq 6$.

Conclusion. On peut prendre $n_0 = 6$: pour tout $n \geq 6$,

$$\begin{aligned} |4 - u_n| &\leq \frac{1}{4^{n-1}} \\ &\leq 10^{-3}. \end{aligned}$$

À retenir. Ce rang est **garanti** par la majoration. L'écart réel peut devenir petit plus tôt : la majoration donne une certitude, pas le plus petit rang possible.

Exercice 4

Toujours sous 2, et pourtant de limite 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \dfrac{2n+1}{n+3}$. On note f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+3}$.

1.

Montrer que f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. En déduire le sens de variation de (u_n).

INDICE

Calcule $f'(x)$, ou écris $f(x) = 2 - \dfrac{5}{x+3}$ et raisonne sur $x \mapsto \dfrac{5}{x+3}$.

CORRIGÉ

Dérivée. La fonction f est rationnelle et $x+3 > 0$ pour tout $x \geq 0$: f est dérivable sur $[0, +\infty[$. Pour tout $x \geq 0$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2(x+3) - (2x+1)}{(x+3)^2} \\ &= \frac{5}{(x+3)^2} > 0. \end{aligned}$$

Donc f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

La suite. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $u_n = f(n)$ et $n < n+1$, donc :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= f(n+1) \\ &> f(n) = u_n. \end{aligned}$$

Conclusion. f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, et la suite (u_n) est **strictement croissante**.

2.

Montrer que $u_n < 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire que (u_n) converge.

INDICE

Étudie le signe de $2 - u_n$. Pour la convergence, associe ce résultat à la question 1 et nomme le critère utilisé.

CORRIGÉ

Majoration. Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} & 2 - u_n \\ &= \frac{2(n+3) - (2n+1)}{n+3} \\ &= \frac{5}{n+3} > 0. \end{aligned}$$

Donc $u_n < 2$.

Convergence. La suite (u_n) est croissante (question 1) et majorée par 2. Une suite croissante et majorée converge : (u_n) est **convergente**.

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < 2$, et la suite (u_n) converge.

Remarque. Ce critère prouve l'existence de la limite, mais ne donne pas sa valeur.

3.

Déterminer $\lim u_n$.

INDICE

Utilise $f(x) = 2 - \dfrac{5}{x+3}$ et la limite de f en $+\infty$.

CORRIGÉ

Une autre écriture de f. Pour tout $x \geq 0$:

$$\begin{aligned} & 2 - \frac{5}{x+3} \\ &= \frac{2(x+3) - 5}{x+3} \\ &= \frac{2x+1}{x+3} = f(x). \end{aligned}$$

Limite de f. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{5}{x+3} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$.

Comme $u_n = f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite (u_n) a la même limite que f en $+\infty$.

Conclusion. $\lim u_n = 2$.

4.

Un élève écrit : « Pour tout n, $u_n < 2$, donc $\lim u_n < 2$. » Commenter.

INDICE

Compare son affirmation au résultat de la question 3. Que dit exactement le passage à la limite dans une inégalité ?

CORRIGÉ

L'affirmation est **fausse** : la question 3 donne $\lim u_n = 2$.

Ce que dit le cours. Si (u_n) converge et si $u_n < 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut seulement conclure $\lim u_n \leq 2$. Entre les termes, l'inégalité est **stricte** ; entre les limites, on ne garde qu'une inégalité **large**.

Conclusion. Le raisonnement de l'élève est faux : de $u_n < 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on déduit seulement $\lim u_n \leq 2$, et ici la limite vaut exactement 2.

À retenir. Un majorant n'est pas forcément la limite : 3 majore aussi (u_n). Mais la limite peut être **égale** au majorant, sans qu'aucun terme ne l'atteigne.

Exercice 5

Même relation, deux premiers termes, deux destins

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x + 2$. On étudie deux suites définies par la même relation :

- (a_n), avec $a_0 = \dfrac{3}{2}$ et $a_{n+1} = f(a_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;
- (b_n), avec $b_0 = 3$ et $b_{n+1} = f(b_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1.

Vérifier que, pour tout réel x, $f(x) - x = (x-1)(x-2)$. Montrer que f est croissante sur $[1, +\infty[$.

INDICE

Développe le produit. Pour les variations, étudie le signe de $f'(x)$, ou écris $f(x) = (x-1)^2 + 1$.

CORRIGÉ

L'égalité. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'une part :

$$\begin{aligned} & f(x) - x \\ &= x^2 - 2x + 2 - x \\ &= x^2 - 3x + 2. \end{aligned}$$

D'autre part, $(x-1)(x-2) = x^2 - 2x - x + 2 = x^2 - 3x + 2$. Les deux expressions sont égales.

Les variations. f est une fonction polynôme, dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x, $f'(x) = 2x - 2 = 2(x-1)$. Sur $[1, +\infty[$, $f'(x) \geq 0$, et f' ne s'annule qu'en 1. Donc f est strictement croissante sur $[1, +\infty[$.

Conclusion. Pour tout réel x, $f(x) - x = (x-1)(x-2)$, et f est croissante sur $[1, +\infty[$.

2.

Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq a_n \leq 2$. Montrer ensuite que (a_n) est décroissante.

INDICE

Pour l'hérédité, utilise le sens de variation de f sur $[1, 2]$. Si tu bloques : calcule $f(1)$ et $f(2)$. Pour la monotonie, relie $a_{n+1} - a_n$ à la question 1.

CORRIGÉ

Récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $P(n)$: « $1 \leq a_n \leq 2$ ».

- **Initialisation.** $a_0 = \dfrac{3}{2}$ et $1 \leq \dfrac{3}{2} \leq 2$: $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité.** On fixe un entier n tel que $P(n)$ soit vraie, c'est-à-dire $1 \leq a_n \leq 2$. Comme f est croissante sur $[1, 2]$, $f(1) \leq f(a_n) \leq f(2)$. Or $f(1) = 1$ et $f(2) = 2$, donc $1 \leq a_{n+1} \leq 2$: $P(n+1)$ est vraie.
- **Conclusion.** Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Monotonie. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question 1 :

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= f(a_n) - a_n \\ &= (a_n - 1)(a_n - 2). \end{aligned}$$

Or $a_n - 1 \geq 0$ et $a_n - 2 \leq 0$, donc $a_{n+1} - a_n \leq 0$.

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq a_n \leq 2$, et la suite (a_n) est **décroissante**.

3.

Montrer que (a_n) converge, puis déterminer sa limite.

INDICE

Quel critère s'applique à une suite décroissante et minorée ? Pour la valeur, vérifie les hypothèses de la propriété du point fixe sur $[1, 2]$. Si deux valeurs restent possibles, compare-les au premier terme.

CORRIGÉ

Convergence. (a_n) est décroissante et minorée par 1 : elle converge vers un réel ℓ.

Hypothèses de la propriété du point fixe, sur $I = [1, 2]$; cette propriété suppose la suite convergente, ce que l'on vient d'établir :

- f est continue sur I, comme toute fonction polynôme ;
- I est un intervalle fermé ;
- f est continue et croissante sur I, donc $f(I) = [f(1), f(2)] = [1, 2]$, et $f(I) \subset I$;
- $a_0 \in I$, et (a_n) converge.

Donc $\ell \in I$ et $f(\ell) = \ell$, soit $(\ell - 1)(\ell - 2) = 0$: $\ell = 1$ ou $\ell = 2$.

Choisir. La suite est décroissante, donc $a_n \leq a_0 = \dfrac{3}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par passage à la limite dans cette inégalité, $\ell \leq \dfrac{3}{2}$. Donc $\ell = 1$.

Conclusion. La suite (a_n) converge et $\lim a_n = 1$.

4.

Montrer que l'intervalle $[2, +\infty[$ est stable par f, puis que $b_n \geq 2$ pour tout n. En déduire que (b_n) est croissante et que $b_n \geq 3$ pour tout n.

INDICE

Utilise la croissance de f sur $[2, +\infty[$ et la valeur de $f(2)$. Pour la monotonie, reprends la méthode de la question 2 avec le signe de $(b_n - 1)(b_n - 2)$.

CORRIGÉ

Stabilité. f est croissante sur $[2, +\infty[$. Pour tout $x \geq 2$, $f(x) \geq f(2) = 2$: l'image par f de tout réel de $[2, +\infty[$ reste dans $[2, +\infty[$. Cet intervalle est donc stable par f.

Récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $Q(n)$: « $b_n \geq 2$ ».

- **Initialisation.** $b_0 = 3 \geq 2$: $Q(0)$ est vraie.
- **Hérédité.** On fixe un entier n tel que $Q(n)$ soit vraie, c'est-à-dire $b_n \geq 2$. Par stabilité, $b_{n+1} = f(b_n) \geq 2$: $Q(n+1)$ est vraie.
- **Conclusion.** Par récurrence, $Q(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Monotonie. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme à la question 2, $b_{n+1} - b_n = (b_n - 1)(b_n - 2)$. Les deux facteurs sont positifs ou nuls, car $b_n \geq 2$; donc $b_{n+1} - b_n \geq 0$.

Conclusion. L'intervalle $[2, +\infty[$ est stable par f ; pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n \geq 2$; la suite (b_n) est croissante, donc $b_n \geq b_0 = 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5.

Un élève affirme : « (b_n) est croissante, $[2, +\infty[$ est stable, f est continue et 2 est un point fixe, donc (b_n) converge vers 2. » Montrer qu'il se trompe, puis déterminer la limite de (b_n).

INDICE

Raisonne par l'absurde. Commence ta rédaction par : « Supposons que (b_n) converge vers un réel ℓ ; alors… ». Si tu bloques : que dit la propriété du point fixe sur ℓ ? Compare avec $b_n \geq 3$.

CORRIGÉ

Par l'absurde. Supposons que (b_n) converge vers un réel ℓ. Vérifions les hypothèses de la propriété du point fixe sur $I = [2, +\infty[$:

- f est continue sur I, et I est fermé ;
- $f(I) \subset I$ (question 4), et $b_0 \in I$;
- (b_n) converge, par hypothèse.

La propriété donne $\ell \in I$ et $f(\ell) = \ell$, donc $\ell = 1$ ou $\ell = 2$. Comme $\ell \in I$, la valeur 1 est exclue : $\ell = 2$.

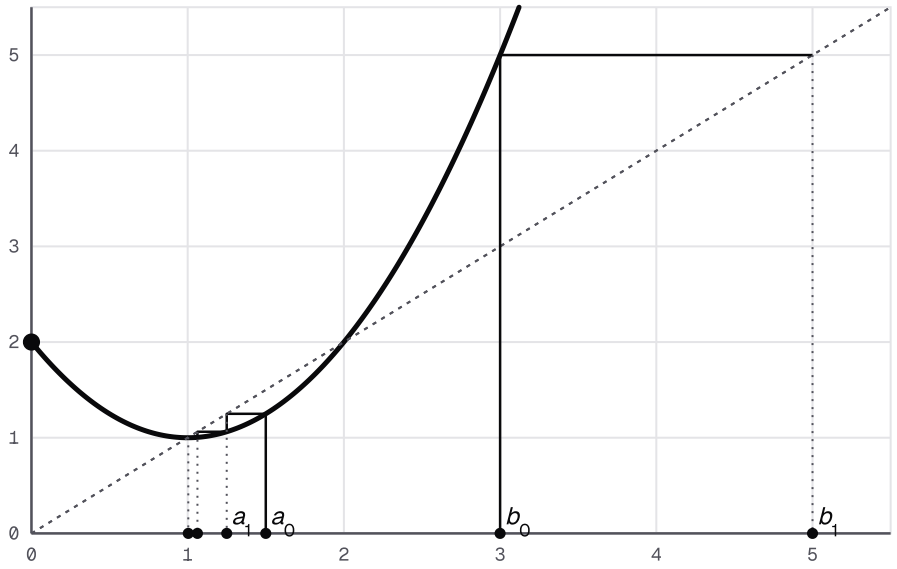
Mais $b_n \geq 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; par passage à la limite, $\ell \geq 3$. C'est impossible : (b_n) **ne converge pas**.

La limite. (b_n) est croissante. Si elle était majorée, elle convergerait ; elle ne l'est donc pas. Une suite croissante et non majorée tend vers $+\infty$.

L'erreur de l'élève. Il a supposé la convergence sans la prouver. Et l'intervalle stable $[2, +\infty[$ n'est **pas majoré** : il ne fournit aucun majorant pour une suite croissante.

Contrôle. $b_1 = 5$, $b_2 = 17$, $b_3 = 257$.

Conclusion. L'élève se trompe : (b_n) ne converge pas, et $\lim b_n = +\infty$.



$y = x^2 - 2x + 2$ ● Point du graphe ● Termes (a_n) , rabattus sur l'axe des abscisses
Construction des termes ------ Droite d'équation y = x ● Termes (b_n) , rabattus sur l'axe des abscisses

Même relation, deux départs : depuis a_0 = 3/2, l'escalier descend vers 1 ; depuis b_0 = 3, il s'éloigne au-delà de 2.

Exercice 6

Puissances en compétition

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$x_n = \frac{3^{n+1} - 2^n}{3^n + 5 \times 2^n},$$
$$y_n = \frac{2^n - 5^n}{4^n + 1},$$
$$z_n = \frac{(-2)^n + 3^n}{3^n},$$
$$S_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n}.$$

1.

Déterminer $\lim x_n$.

INDICE

Repère, en haut et en bas, la puissance de plus grande base. Si tu bloques : divise le numérateur et le dénominateur par cette puissance.

CORRIGÉ

Pourquoi cette méthode. 3^n et 2^n tendent vers $+\infty$: forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$. On factorise par la puissance de plus grande base.

Calcul. Soit $n \in \mathbb{N}$. On divise le numérateur et le dénominateur par $3^n > 0$, avec $\frac{3^{n+1}}{3^n} = 3$ et $\frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$:

$$x_n = \frac{3 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 + 5\left(\frac{2}{3}\right)^n}.$$

Limite. $0 < \frac{2}{3} < 1$, donc $\lim \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$. Le numérateur tend vers 3 et le dénominateur vers 1.

Conclusion. $\lim x_n = 3$.

2.

Déterminer $\lim y_n$.

INDICE

Ici, la puissance dominante n'est pas la même en haut et en bas. Si tu bloques : factorise chacun par sa propre puissance dominante, puis regroupe leur quotient en une seule puissance.

CORRIGÉ

Factorisation. Soit $n \in \mathbb{N}$. On met 5^n en facteur au numérateur et 4^n au dénominateur :

$$\begin{aligned} y_n &= \frac{5^n\left(\left(\frac{2}{5}\right)^n - 1\right)}{4^n\left(1 + \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)} \\ &= \left(\frac{5}{4}\right)^n \times \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^n - 1}{1 + \left(\frac{1}{4}\right)^n}. \end{aligned}$$

Limites. $\frac{5}{4} > 1$, donc $\lim \left(\frac{5}{4}\right)^n = +\infty$. De plus $\left(\frac{2}{5}\right)^n$ et $\left(\frac{1}{4}\right)^n$ tendent vers 0 : la fraction tend vers -1.

Conclusion. Par limite d'un produit, $\lim y_n = -\infty$.

3.

Déterminer $\lim z_n$.

INDICE

Sépare le quotient en deux fractions, puis écris $\frac{(-2)^n}{3^n}$ comme une seule puissance.

CORRIGÉ

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} z_n &= \frac{(-2)^n}{3^n} + \frac{3^n}{3^n} \\ &= \left(-\frac{2}{3}\right)^n + 1. \end{aligned}$$

Comme $-1 < -\frac{2}{3} < 1$, $\lim \left(-\frac{2}{3}\right)^n = 0$.

Conclusion. $\lim z_n = 1$.

Attention. La raison est négative, mais elle est strictement comprise entre -1 et 1 : la puissance tend vers 0. Avec $-\frac{3}{2}$, il n'y aurait pas de limite.

4.

Calculer S_n en fonction de n, puis déterminer $\lim S_n$.

INDICE

S_n est une somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$. Compte les termes : de $\frac{1}{3^0}$ à $\frac{1}{3^n}$.

CORRIGÉ

Nombre de termes. Les exposants vont de 0 à n : il y a $n+1$ termes.

Formule. Premier terme 1, raison $\frac{1}{3}$, différente de 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}} \\ &= \frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right). \end{aligned}$$

Contrôle. $S_2 = 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9} = \frac{13}{9}$, et la formule donne $\frac{3}{2}\times\frac{26}{27} = \frac{13}{9}$.

Limite. $0 < \frac{1}{3} < 1$, donc $\lim \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} = 0$, et (S_n) tend vers $\frac{3}{2}$.

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^{n+1}}\right)$, et $\lim S_n = \frac{3}{2}$.

Exercice 7

Monter d'abord, descendre ensuite

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $u_n = \dfrac{n^2}{2^n}$.

1.

Calculer u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5. La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est-elle monotone ?

INDICE

Écris les résultats en fractions. Compare u_1, u_2, u_3, puis u_3, u_4, u_5.

CORRIGÉ

Pour tout entier $n \geq 1$, $u_n = \dfrac{n^2}{2^n}$:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{2}, \\ u_2 &= \frac{4}{4} = 1, \\ u_3 &= \frac{9}{8}, \\ u_4 &= \frac{16}{16} = 1, \\ u_5 &= \frac{25}{32}. \end{aligned}$$

On a $u_1 < u_2 < u_3$, puis $u_3 > u_4 > u_5$: la suite monte, puis descend.

Conclusion. La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ **n'est pas monotone** sur l'ensemble des entiers $n \geq 1$.

2.

Montrer que, pour tout $n \geq 1$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{2n^2}.$$

Montrer ensuite que ce quotient est inférieur à 1 pour tout $n \geq 3$.

INDICE

Les termes sont strictement positifs : le quotient a un sens. Pour l'inégalité, écris $\frac{(n+1)^2}{n^2} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^2$ et majore $1+\frac{1}{n}$ lorsque $n \geq 3$.

CORRIGÉ

Le quotient. Soit $n \geq 1$ un entier. On a $u_n > 0$, et :

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{n^2} \\ &= \frac{(n+1)^2}{2n^2}.\end{aligned}$$

La majoration. Soit $n \geq 3$ un entier. Alors $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{3}$, donc $1+\frac{1}{n} \leq \frac{4}{3}$. Ces nombres sont positifs, donc $\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \leq \frac{16}{9}$. Ainsi :

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \\ &\leq \frac{8}{9} < 1.\end{aligned}$$

Conséquence. Les termes étant strictement positifs, $u_{n+1} < u_n$ pour tout $n \geq 3$: la suite est **décroissante à partir du rang** 3.

Conclusion. Pour tout $n \geq 1$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{2n^2}$, et ce quotient est inférieur à 1 dès que $n \geq 3$.

3.

Montrer que (u_n) converge. On note ℓ sa limite.

INDICE

Cherche un minorant évident des termes. Cite ensuite le critère qui convient, en précisant à partir de quel rang ses hypothèses sont vraies.

CORRIGÉ

Pour tout $n \geq 1$, $u_n > 0$: la suite est minorée par 0. Elle est décroissante à partir du rang 3 (question 2). Une suite décroissante et minorée à partir d'un certain rang converge.

Conclusion. La suite (u_n) **converge**.

Remarque. Les premiers termes, qui montent, ne changent rien : seul le comportement « à partir d'un certain rang » compte.

4.

En passant à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = \dfrac{(n+1)^2}{2n^2} \times u_n$, déterminer ℓ.

INDICE

Cherche la limite de $\dfrac{(n+1)^2}{2n^2}$. Que vaut la limite de (u_{n+1}) si celle de (u_n) vaut ℓ ?

CORRIGÉ

Les limites. Pour tout $n \geq 1$, $\dfrac{(n+1)^2}{2n^2} = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^2$; comme $\lim \dfrac{1}{n} = 0$, ce quotient tend vers $\dfrac{1}{2}$. La suite (u_{n+1}) a les mêmes termes que (u_n), décalés d'un rang : elle converge aussi vers ℓ.

Passage à la limite. Par limite d'un produit, le membre de droite tend vers $\dfrac{1}{2}\ell$. Par unicité de la limite, $\ell = \dfrac{1}{2}\ell$, donc $\ell = 0$.

Conclusion. $\lim u_n = 0$.

À retenir. Ce passage à la limite n'est permis **qu'après** avoir prouvé la convergence. Pour la suite (2^n), la relation $v_{n+1} = 2v_n$ donnerait « $\ell = 2\ell$, donc $\ell = 0$ », alors que cette suite tend vers $+\infty$.