BURHAN

Suites numériques : exercices, application

2ème Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-experimentales/mathematiques/suites-numeriques/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Suites numériques	Application	9

Exercice 1

Une suite explicite qui monte sans dépasser 3

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$u_n = \frac{3n+1}{n+1}.$$

1.

Calculer u_0, u_1, u_2 et u_3.

INDICE

Remplace n par sa valeur dans la formule. Ici, tu n'as pas besoin du terme précédent pour calculer un terme.

2.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{2}{(n+1)(n+2)}$.

En déduire le sens de variation de (u_n).

INDICE

Écris d'abord u_{n+1} en remplaçant n par $n+1$ **partout** dans la formule. Réduis ensuite la différence au même dénominateur.

3.

Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = 3 - \frac{2}{n+1}.$$

En déduire que (u_n) est majorée par 3. Est-elle bornée ?

INDICE

Pour l'égalité, pars du membre de droite et réduis au même dénominateur. Pour la majoration, cherche le signe de $3 - u_n$. Pour un minorant, pense au sens de variation trouvé à la question 2.

Exercice 2

Décroissante sans connaître les termes

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = u_n - \frac{u_n^2}{4}.$$

1.

Calculer u_1, u_2 et u_3, sous forme de fractions.

INDICE

Une suite définie par récurrence se calcule de proche en proche : d'abord u_1 à partir de u_0, puis u_2 à partir de u_1.

2.

Déterminer le sens de variation de (u_n).

INDICE

Calcule $u_{n+1} - u_n$ à l'aide de la relation de récurrence. Si tu bloques sur le signe : que sais-tu du signe d'un carré ?

3.

Un camarade affirme : « $u_1 < u_0$, donc la suite est décroissante. » Ce raisonnement est-il suffisant ?

INDICE

La définition d'une suite décroissante demande une inégalité pour **tout** entier n. Cherche une suite simple dont le deuxième terme est plus petit que le premier, mais qui n'est pas décroissante.

Exercice 3

Compter les termes avant de sommer

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 5n - 2$. On pose :

$$S = u_4 + u_5 + \cdots + u_{20}.$$

1.

Montrer que (u_n) est une suite arithmétique. Préciser sa raison et son premier terme.

INDICE

Calcule $u_{n+1} - u_n$ et regarde si le résultat dépend de n.

2.

Combien de termes la somme S compte-t-elle ?

INDICE

De u_p à u_n, il y a $n - p + 1$ termes. Vérifie la règle sur un petit cas, par exemple $u_4 + u_5$.

3.

Calculer S.

INDICE

Pour une suite arithmétique, une somme de termes consécutifs vaut : nombre de termes multiplié par la moyenne du premier et du dernier terme.

Exercice 4

Retrouver une suite géométrique à partir de deux termes

La suite $(w_n)_{n\geq 0}$ est géométrique de raison q réelle, avec $w_1 = 6$ et $w_4 = 48$.

1.

Déterminer la raison q et le premier terme w_0.

INDICE

Écris w_4 en fonction de w_1 et de q : combien de fois multiplie-t-on par q pour passer de l'indice 1 à l'indice 4 ?

2.

Exprimer w_n en fonction de n, puis calculer w_7.

INDICE

Le terme général d'une suite géométrique s'écrit $w_n = w_0 \times q^n$.

3.

Calculer $T = w_0 + w_1 + \cdots + w_9$.

INDICE

Compte d'abord les termes. Applique ensuite la formule de la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q \neq 1$.

Exercice 5

Quatre puissances, quatre comportements

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$a_n = 3 + \left(-\frac{3}{4}\right)^n,$$
$$b_n = \left(-\frac{5}{4}\right)^n,$$
$$c_n = \left(\frac{7}{5}\right)^n - 1,$$
$$d_n = 5 \times (-1)^n.$$

1.

Pour chaque suite, repérer la puissance q^n qu'elle contient et situer q par rapport à -1 et à 1.

INDICE

Place chaque réel q sur une droite graduée : avant -1 (ou égal), strictement entre -1 et 1, ou après 1.

2.

Déterminer, lorsqu'elle existe, la limite de chaque suite.

INDICE

Applique la propriété de la limite de (q^n) cas par cas. Ne conclus pas d'après le seul **signe** de q : c'est sa position par rapport à -1 et 1 qui compte.

3.

Parmi ces quatre suites, lesquelles sont convergentes ? Lesquelles sont bornées ?

INDICE

Une suite convergente a une limite **réelle**. Pour les bornes, encadre la puissance : que vaut $|q^n|$ lorsque $|q| \leq 1$?

Exercice 6

Trois formes indéterminées à lever

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose :

$$u_n = \frac{2n^2 - n + 3}{n^2 + 1},$$
$$v_n = \sqrt{n+4} - \sqrt{n},$$
$$w_n = n - 3\sqrt{n}.$$

1.

Déterminer $\lim u_n$.

INDICE

Repère d'abord la forme indéterminée. Si tu bloques : mets en facteur, en haut et en bas, la plus haute puissance de n.

2.

Déterminer $\lim v_n$.

INDICE

Les deux racines tendent vers $+\infty$: c'est une forme indéterminée. Si tu bloques : multiplie et divise par la quantité conjuguée $\sqrt{n+4} + \sqrt{n}$.

3.

Déterminer $\lim w_n$.

INDICE

Encore une forme $+\infty - \infty$, mais une technique nouvelle sert ici : chercher un facteur commun aux deux termes. Si tu bloques : écris $n = \sqrt{n} \times \sqrt{n}$.

Exercice 7

Quand la limite d'un quotient ne s'applique pas

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose :

$$p_n = \frac{3 + (-1)^n}{n},$$
$$r_n = 2n + (-1)^n.$$

1.

Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$:

$$\frac{2}{n} \leq p_n \leq \frac{4}{n}.$$

En déduire $\lim p_n$.

INDICE

Encadre d'abord $(-1)^n$ entre deux entiers. Ajoute 3, puis divise par n : son signe permet-il de garder le sens des inégalités ?

2.

Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $r_n \geq 2n - 1$. En déduire $\lim r_n$.

INDICE

Une seule inégalité suffit ici : minore r_n par une suite dont tu connais la limite $+\infty$.

3.

Pourquoi ne peut-on pas obtenir $\lim p_n$ par la règle de la limite d'un quotient ?

INDICE

Les règles d'opérations supposent que chaque morceau a une limite. Le numérateur $3 + (-1)^n$ en a-t-il une ?

Exercice 8

Une suite fonction de n, puis l'image de ses termes

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \dfrac{4n+1}{n+2}$. On note g la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{4x+1}{x+2}$, de sorte que $u_n = g(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1.

Étudier le sens de variation de g sur $[0, +\infty[$. En déduire celui de (u_n).

INDICE

Calcule $g'(x)$ avec la formule de la dérivée d'un quotient. Tu peux aussi écrire $g(x)$ sous la forme $4 - \dfrac{a}{x+2}$.

2.

Déterminer $\lim u_n$.

INDICE

Cherche la limite de g en $+\infty$, par exemple en écrivant $g(x) = 4 - \dfrac{7}{x+2}$.

3.

Déterminer la limite de la suite $\left(\sqrt{u_n}\right)$, puis celle de la suite $\left(\dfrac{u_n^2+9}{u_n+1}\right)$.

INDICE

Chacune de ces suites s'écrit $h(u_n)$. Vérifie que les termes u_n sont dans l'ensemble de définition de h, puis que h est continue en 4.

Exercice 9

Encadrer, monter, converger : une racine carrée

On note f la fonction définie sur $\left[-\frac{4}{3}, +\infty\right[$ par $f(x) = \sqrt{3x+4}$, et (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1.

Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 4$.

INDICE

Pour l'hérédité, pars de $0 \leq u_n \leq 4$ et construis $3u_n + 4$ étape par étape. Utilise ensuite le fait que la racine carrée est croissante sur $[0, +\infty[$.

2.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(4 - u_n)(u_n + 1)}{u_{n+1} + u_n}.$$

En déduire le sens de variation de (u_n).

INDICE

La différence contient une racine carrée : pense à la quantité conjuguée. Si tu bloques : multiplie et divise par $u_{n+1} + u_n$, puis remplace u_{n+1}^2 par $3u_n + 4$.

3.

Justifier que (u_n) converge. Déterminer sa limite en citant chaque hypothèse utilisée.

INDICE

Commence par la convergence : quel critère relie « croissante » et « majorée » ? Ensuite seulement, cherche la valeur : vérifie une à une les hypothèses de la propriété du point fixe sur l'intervalle $I = [0, 4]$.