BURHAN

# Suites numériques : exercices, application

2ème Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-experimentales/mathematiques/suites-numeriques/exercices/application

| Chapitre | Palier | Exercices |
| --- | --- | --- |
| Suites numériques | Application | 9 |

**Exercice 1**

## Une suite explicite qui monte sans dépasser 3

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$u_n = \frac{3n+1}{n+1}.$$

**1.**

Calculer $u_0$, $u_1$, $u_2$ et $u_3$.

INDICE

Remplace $n$ par sa valeur dans la formule. Ici, tu n'as pas besoin du terme précédent pour calculer un terme.

CORRIGÉ

La suite est définie **explicitement** : chaque terme se calcule directement à partir de son indice.

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{0+1}{0+1} = 1, \\ u_1 &= \frac{3+1}{1+1} = 2, \\ u_2 &= \frac{6+1}{2+1} = \frac{7}{3}, \\ u_3 &= \frac{9+1}{3+1} = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

**Conclusion.** $u_0 = 1$, $u_1 = 2$, $u_2 = \dfrac{7}{3}$ et $u_3 = \dfrac{5}{2}$.

Les premiers termes augmentent, mais quatre termes ne suffisent pas pour conclure sur toute la suite : c'est l'objet de la question 2.

## 2.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{2}{(n+1)(n+2)}$.

En déduire le sens de variation de $(u_n)$.

INDICE

Écris d'abord $u_{n+1}$ en remplaçant $n$ par $n+1$ **partout** dans la formule. Réduis ensuite la différence au même dénominateur.

CORRIGÉ

**Pourquoi cette méthode.** La suite $(u_n)$ est croissante lorsque $u_{n+1} - u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On calcule donc cette différence, puis on étudie son signe.

**Le terme suivant.** Soit $n \in \mathbb{N}$. On remplace $n$ par $n+1$ dans la formule :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{3(n+1)+1}{(n+1)+1} \\ &= \frac{3n+4}{n+2}. \end{aligned}$$

**La différence.** On réduit au même dénominateur $(n+1)(n+2)$. Le numérateur vaut :

$$\begin{aligned} &(3n+4)(n+1) \\ &\quad - (3n+1)(n+2) \\ &= (3n^2+7n+4) \\ &\quad - (3n^2+7n+2) \\ &= 2. \end{aligned}$$

Donc :

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{2}{(n+1)(n+2)}$.

**Le signe.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n+1 > 0$ et $n+2 > 0$. Le quotient est donc strictement positif : $u_{n+1} - u_n > 0$.

**Conclusion.** L'égalité est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, et la suite $(u_n)$ est **strictement croissante**.

**Attention.** $u_{n+1}$ n'est pas $u_n + 1$. Ici, $u_n + 1 = \dfrac{4n+2}{n+1}$ : c'est un tout autre nombre.

### 3.

Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$u_n = 3 - \frac{2}{n+1}.$$

En déduire que $(u_n)$ est majorée par $3$. Est-elle bornée ?

INDICE

Pour l'égalité, pars du membre de droite et réduis au même dénominateur. Pour la majoration, cherche le signe de $3 - u_n$. Pour un minorant, pense au sens de variation trouvé à la question 2.

CORRIGÉ

**L'égalité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. On part du membre de droite :

$$\begin{aligned} & 3 - \frac{2}{n+1} \\ &= \frac{3(n+1) - 2}{n+1} \\ &= \frac{3n+1}{n+1} = u_n. \end{aligned}$$

**Majorant.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3 - u_n = \dfrac{2}{n+1} > 0$, donc $u_n < 3$. La suite est **majorée par** $3$.

**Minorant.** La suite est croissante (question 2), donc $u_n \geq u_0 = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Elle est **minorée par** $1$.

**Conclusion.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n < 3$ : la suite $(u_n)$ est majorée par $3$, et elle est **bornée**.

**À retenir.** Une suite croissante ne « file » pas forcément vers l'infini. Celle-ci monte à chaque rang, mais reste toujours sous $3$.

### Exercice 2

## Décroissante sans connaître les termes

Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$u_{n+1} = u_n - \frac{u_n^2}{4}.$$

### 1.

Calculer $u_1$, $u_2$ et $u_3$, sous forme de fractions.

INDICE

Une suite définie par récurrence se calcule de proche en proche : d'abord $u_1$ à partir de $u_0$, puis $u_2$ à partir de $u_1$.

CORRIGÉ

On calcule de proche en proche, chaque fois à partir du terme que l'on vient d'obtenir :

$$\begin{aligned} u_1 &= 2 - \frac{2^2}{4} = 1, \\ u_2 &= 1 - \frac{1^2}{4} = \frac{3}{4}, \\ u_3 &= \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \times \frac{9}{16} \\ &= \frac{48}{64} - \frac{9}{64} = \frac{39}{64}. \end{aligned}$$

**Conclusion.** $u_1 = 1$, $u_2 = \dfrac{3}{4}$ et $u_3 = \dfrac{39}{64}$.

On ne peut pas calculer $u_3$ sans passer par $u_1$ et $u_2$ : c'est la différence avec une suite définie explicitement.

### 2.

Déterminer le sens de variation de $(u_n)$.

INDICE

Calcule $u_{n+1} - u_n$ à l'aide de la relation de récurrence. Si tu bloques sur le signe : que sais-tu du signe d'un carré ?

CORRIGÉ

**Pourquoi cette méthode.** On ne connaît pas de formule pour $u_n$. La relation de récurrence donne pourtant directement la différence de deux termes consécutifs.

**Calcul.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{u_n^2}{4}.$$

**Signe.** Un carré est positif ou nul : $u_n^2 \geq 0$, donc $-\dfrac{u_n^2}{4} \leq 0$.

**Conclusion.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$ : la suite $(u_n)$ est **décroissante**.

**À retenir.** Le signe de $u_{n+1} - u_n$ se lit parfois sans connaître $u_n$ : ici, un carré suffit.

### 3.

Un camarade affirme : « $u_1 < u_0$, donc la suite est décroissante. » Ce raisonnement est-il suffisant ?

INDICE

La définition d'une suite décroissante demande une inégalité pour **tout** entier $n$. Cherche une suite simple dont le deuxième terme est plus petit que le premier, mais qui n'est pas décroissante.

CORRIGÉ

**Non.** La comparaison de $u_0$ et $u_1$ ne dit rien des termes suivants. Une suite est décroissante si $u_{n+1} \leq u_n$ pour **tout** $n \in \mathbb{N}$.

**Contre-exemple.** La suite $(w_n)$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = (n-1)^2$ vérifie $w_0 = 1$ et $w_1 = 0$, donc $w_1 < w_0$. Pourtant $w_2 = 1 > w_1$ : $(w_n)$ n'est pas décroissante.

**Conclusion.** Le raisonnement du camarade n'est pas suffisant. Sa conclusion est vraie ici, mais c'est le calcul de la question 2, valable pour tout $n \in \mathbb{N}$, qui la prouve.

### Exercice 3

## Compter les termes avant de sommer

Soit $(u_n)$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 5n - 2$. On pose :

$$S = u_4 + u_5 + \cdots + u_{20}.$$

### 1.

Montrer que $(u_n)$ est une suite arithmétique. Préciser sa raison et son premier terme.

INDICE

Calcule $u_{n+1} - u_n$ et regarde si le résultat dépend de $n$.

CORRIGÉ

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $u_{n+1} = 5(n+1) - 2 = 5n + 3$, donc :

$$\begin{aligned} & u_{n+1} - u_n \\ &= (5n + 3) - (5n - 2) \\ &= 5. \end{aligned}$$

La différence ne dépend pas de $n$ : elle est constante, égale à $5$.

**Conclusion.** $(u_n)$ est une suite **arithmétique de raison** $5$, de premier terme $u_0 = 5 \times 0 - 2 = -2$.

### 2.

Combien de termes la somme $S$ compte-t-elle ?

INDICE

De $u_p$ à $u_n$, il y a $n - p + 1$ termes. Vérifie la règle sur un petit cas, par exemple $u_4 + u_5$.

CORRIGÉ

De $u_4$ à $u_{20}$, les indices vont de $4$ à $20$. Le nombre de termes est :

$$20 - 4 + 1 = 17.$$

**Vérification sur un petit cas.** $u_4 + u_5$ compte $5 - 4 + 1 = 2$ termes : la règle est juste.

**Piège.** Répondre $20 - 4 = 16$ oublie un terme : on compte les deux extrémités.

**Conclusion.** La somme $S$ compte $17$ termes.

### 3.

Calculer $S$.

INDICE

Pour une suite arithmétique, une somme de termes consécutifs vaut : nombre de termes multiplié par la moyenne du premier et du dernier terme.

CORRIGÉ

**Les extrémités.** $u_4 = 5 \times 4 - 2 = 18$ et $u_{20} = 5 \times 20 - 2 = 98$.

**La somme.** La suite $(u_n)$ est arithmétique et $S$ compte $17$ termes. On multiplie ce nombre de termes par la demi-somme du premier et du dernier :

$$\begin{aligned} S &= 17 \times \frac{u_4 + u_{20}}{2} \\ &= 17 \times \frac{18 + 98}{2} \\ &= 17 \times 58 = 986. \end{aligned}$$

**Conclusion.** $S = 986$.

**À retenir.** Avec $16$ termes, on aurait trouvé $16 \times 58 = 928$ : une erreur de comptage fausse tout le résultat.

### Exercice 4

## Retrouver une suite géométrique à partir de deux termes

La suite $(w_n)_{n\geq 0}$ est géométrique de raison $q$ réelle, avec $w_1 = 6$ et $w_4 = 48$.

### 1.

Déterminer la raison $q$ et le premier terme $w_0$.

INDICE

Écris $w_4$ en fonction de $w_1$ et de $q$ : combien de fois multiplie-t-on par $q$ pour passer de l'indice $1$ à l'indice $4$ ?

CORRIGÉ

**La raison.** D'après l'expression du terme général, $w_4 = w_1 \times q^{4-1} = w_1 \times q^3$. Donc $6q^3 = 48$, soit $q^3 = 8$.

La fonction $x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ : l'équation $q^3 = 8$ a une seule solution réelle, $q = 2$.

**Le premier terme.** $w_1 = w_0 \times q$, donc $w_0 = \dfrac{w_1}{q} = \dfrac{6}{2} = 3$.

**Conclusion.** La raison est $q = 2$ et le premier terme est $w_0 = 3$.

### 2.

Exprimer $w_n$ en fonction de $n$, puis calculer $w_7$.

INDICE

Le terme général d'une suite géométrique s'écrit $w_n = w_0 \times q^n$.

CORRIGÉ

D'après le terme général d'une suite géométrique, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$w_n = 3 \times 2^n.$$

Pour $n = 7$ :

$$\begin{aligned} w_7 &= 3 \times 2^7 \\ &= 3 \times 128 = 384. \end{aligned}$$

**Conclusion.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = 3 \times 2^n$, et $w_7 = 384$.

### 3.

Calculer $T = w_0 + w_1 + \cdots + w_9$.

INDICE

Compte d'abord les termes. Applique ensuite la formule de la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q \neq 1$.

CORRIGÉ

**Nombre de termes.** De $w_0$ à $w_9$, il y a $9 - 0 + 1 = 10$ termes.

**Formule.** La raison vaut $2$, différente de $1$, et le premier terme de la somme est $w_0 = 3$ :

$$\begin{aligned} T &= w_0 \times \frac{1 - 2^{10}}{1 - 2} \\ &= 3 \times \frac{1 - 1024}{-1} \\ &= 3 \times 1023 = 3069. \end{aligned}$$

**Contrôle.** $3 + 6 + 12 + 24 + 48 + 96 + 192 + 384 + 768 + 1536 = 3069$.

**Conclusion.** $T = 3069$.

**À retenir.** L'exposant du numérateur est le **nombre de termes**, ici $10$, et non le dernier indice.

### Exercice 5

## Quatre puissances, quatre comportements

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$a_n = 3 + \left(-\frac{3}{4}\right)^n,$$
$$b_n = \left(-\frac{5}{4}\right)^n,$$
$$c_n = \left(\frac{7}{5}\right)^n - 1,$$
$$d_n = 5 \times (-1)^n.$$

### 1.

Pour chaque suite, repérer la puissance $q^n$ qu'elle contient et situer $q$ par rapport à $-1$ et à $1$.

INDICE

Place chaque réel $q$ sur une droite graduée : avant $-1$ (ou égal), strictement entre $-1$ et $1$, ou après $1$.

CORRIGÉ

| Suite | $q$ | Position |
|---|---|---|
| $(a_n)$ | $-\frac{3}{4}$ | $-1 < q < 1$ |
| $(b_n)$ | $-\frac{5}{4}$ | $q \leq -1$ |
| $(c_n)$ | $\frac{7}{5}$ | $q > 1$ |
| $(d_n)$ | $-1$ | $q \leq -1$ |

**Conclusion.** Seule la puissance contenue dans $(a_n)$ a un réel $q$ strictement compris entre $-1$ et $1$.

### 2.

Déterminer, lorsqu'elle existe, la limite de chaque suite.

INDICE

Applique la propriété de la limite de $(q^n)$ cas par cas. Ne conclus pas d'après le seul **signe** de $q$ : c'est sa position par rapport à $-1$ et $1$ qui compte.

CORRIGÉ

- $(a_n)$**.** Comme $-1 < -\dfrac{3}{4} < 1$, $\lim \left(-\dfrac{3}{4}\right)^n = 0$. Par limite d'une somme, $\lim a_n = 3$.
- $(b_n)$**.** Comme $-\dfrac{5}{4} \leq -1$, la suite $(b_n)$ **n'a pas de limite**. Ses termes changent de signe à chaque rang, et leur valeur absolue $\left(\dfrac{5}{4}\right)^n$ grandit sans limite.
- $(c_n)$**.** Comme $\dfrac{7}{5} > 1$, $\lim \left(\dfrac{7}{5}\right)^n = +\infty$. Par limite d'une somme, $\lim c_n = +\infty$.
- $(d_n)$**.** Les termes valent alternativement $5$ et $-5$ : $(d_n)$ **n'a pas de limite**.

**Conclusion.** $\lim a_n = 3$ et $\lim c_n = +\infty$ ; les suites $(b_n)$ et $(d_n)$ n'ont pas de limite.

**À retenir.** Pour $q$ négatif, seule la condition $-1 < q < 0$ donne une limite, égale à $0$.

### 3.

Parmi ces quatre suites, lesquelles sont convergentes ? Lesquelles sont bornées ?

INDICE

Une suite convergente a une limite **réelle**. Pour les bornes, encadre la puissance : que vaut $|q^n|$ lorsque $|q| \leq 1$ ?

CORRIGÉ

**Convergentes.** Seule $(a_n)$ converge, vers $3$. $(c_n)$ tend vers $+\infty$ : elle diverge. $(b_n)$ et $(d_n)$ n'ont pas de limite : elles divergent aussi.

**Bornées.**

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|\left(-\dfrac{3}{4}\right)^n\right| \leq 1$, donc $2 \leq a_n \leq 4$ : $(a_n)$ est bornée.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-5 \leq d_n \leq 5$ : $(d_n)$ est bornée.
- $(b_n)$ et $(c_n)$ prennent des valeurs aussi grandes qu'on veut : elles ne sont pas bornées.

**Conclusion.** Seule $(a_n)$ est convergente ; les suites bornées sont $(a_n)$ et $(d_n)$.

**À retenir.** $(d_n)$ reste entre $-5$ et $5$ sans se rapprocher d'aucun réel : une suite **bornée** peut très bien **diverger**.

### Exercice 6

## Trois formes indéterminées à lever

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose :

$$u_n = \frac{2n^2 - n + 3}{n^2 + 1},$$
$$v_n = \sqrt{n+4} - \sqrt{n},$$
$$w_n = n - 3\sqrt{n}.$$

### 1.

Déterminer $\lim u_n$.

INDICE

Repère d'abord la forme indéterminée. Si tu bloques : mets en facteur, en haut et en bas, la plus haute puissance de $n$.

CORRIGÉ

**La forme.** Le numérateur et le dénominateur tendent vers $+\infty$ : forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$.

**Factorisation.** Pour tout entier $n \geq 1$ :

$$u_n = \frac{n^2\left(2 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{3}{n^2}\right)}{n^2\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)} = \frac{2 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{3}{n^2}}{1 + \dfrac{1}{n^2}}.$$

**Limite.** $\lim \frac{1}{n} = 0$ et $\lim \frac{1}{n^2} = 0$. Le numérateur tend vers $2$ et le dénominateur vers $1$ ; par limite d'un quotient, la suite tend vers $2$.

**Conclusion.** $\lim u_n = 2$.

## 2.

Déterminer $\lim v_n$.

INDICE

Les deux racines tendent vers $+\infty$ : c'est une forme indéterminée. Si tu bloques : multiplie et divise par la quantité conjuguée $\sqrt{n+4}+\sqrt{n}$.

CORRIGÉ

**La forme.** $\lim \sqrt{n+4} = +\infty$ et $\lim \sqrt{n} = +\infty$ : forme indéterminée $+\infty - \infty$.

**Quantité conjuguée.** Pour tout entier $n \geq 1$, $\sqrt{n+4}+\sqrt{n} > 0$. On multiplie et on divise $v_n$ par ce nombre. Le numérateur devient :

$$\begin{aligned}&\left(\sqrt{n+4}-\sqrt{n}\right)\\&\quad\times\left(\sqrt{n+4}+\sqrt{n}\right)\\&=(n+4)-n=4.\end{aligned}$$

Donc :

$$v_n = \frac{4}{\sqrt{n+4}+\sqrt{n}}.$$

**Limite.** Le dénominateur tend vers $+\infty$ ; par limite d'un quotient, la suite tend vers $0$.

**Conclusion.** $\lim v_n = 0$.

## 3.

Déterminer $\lim w_n$.

INDICE

Encore une forme $+\infty - \infty$, mais une technique nouvelle sert ici : chercher un facteur commun aux deux termes. Si tu bloques : écris $n = \sqrt{n} \times \sqrt{n}$.

CORRIGÉ

**La forme.** $\lim n = +\infty$ et $\lim 3\sqrt{n} = +\infty$ : forme indéterminée $+\infty - \infty$.

**Factorisation.** Pour tout entier $n \geq 1$, $n = \sqrt{n} \times \sqrt{n}$ : les deux termes ont $\sqrt{n}$ en facteur commun.

$$w_n = \sqrt{n}\left(\sqrt{n}-3\right).$$

C'est l'idée de la factorisation par le terme dominant, appliquée à une racine.

**Limite.** $\lim \sqrt{n} = +\infty$ et $\lim\left(\sqrt{n}-3\right) = +\infty$. Par limite d'un produit, la suite tend vers $+\infty$.

**Conclusion.** $\lim w_n = +\infty$.

**À retenir.** Une forme indéterminée n'est pas une absence de limite : elle demande seulement de transformer l'écriture.

### Exercice 7

## Quand la limite d'un quotient ne s'applique pas

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose :

$$p_n = \frac{3 + (-1)^n}{n},$$
$$r_n = 2n + (-1)^n.$$

### 1.

Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$ :

$$\frac{2}{n} \leq p_n \leq \frac{4}{n}.$$

En déduire $\lim p_n$.

INDICE

Encadre d'abord $(-1)^n$ entre deux entiers. Ajoute $3$, puis divise par $n$ : son signe permet-il de garder le sens des inégalités ?

CORRIGÉ

**L'encadrement.** Soit $n \geq 1$ un entier. On a $-1 \leq (-1)^n \leq 1$. En ajoutant $3$ :

$$2 \leq 3 + (-1)^n \leq 4.$$

Comme $n > 0$, diviser par $n$ conserve le sens des inégalités :

$$\frac{2}{n} \leq p_n \leq \frac{4}{n}.$$

**La limite.** $\lim \frac{2}{n} = 0$ et $\lim \frac{4}{n} = 0$. D'après le **théorème d'encadrement**, $(p_n)$ tend aussi vers $0$.

**Conclusion.** Pour tout entier $n \geq 1$, $\frac{2}{n} \leq p_n \leq \frac{4}{n}$, et $\lim p_n = 0$.

### 2.

Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $r_n \geq 2n - 1$. En déduire $\lim r_n$.

INDICE

Une seule inégalité suffit ici : minore $r_n$ par une suite dont tu connais la limite $+\infty$.

CORRIGÉ

**La minoration.** Soit $n \geq 1$ un entier. On a $(-1)^n \geq -1$ ; en ajoutant $2n$, on obtient $r_n \geq 2n - 1$.

**La limite.** $\lim(2n - 1) = +\infty$. D'après le **théorème de comparaison**, $(r_n)$ tend aussi vers $+\infty$.

**Conclusion.** Pour tout entier $n \geq 1$, $r_n \geq 2n - 1$, et $\lim r_n = +\infty$.

**Remarque.** Pour une limite $+\infty$, un minorant suffit : pas besoin d'encadrer des deux côtés.

### 3.

Pourquoi ne peut-on pas obtenir $\lim p_n$ par la règle de la limite d'un quotient ?

INDICE

Les règles d'opérations supposent que chaque morceau a une limite. Le numérateur $3+(-1)^n$ en a-t-il une ?

CORRIGÉ

Le numérateur $3+(-1)^n$ vaut alternativement $2$ et $4$ : il **n'a pas de limite**. Les règles sur les opérations exigent que les deux suites aient une limite ; elles ne s'appliquent donc pas.

Les théorèmes d'encadrement et de comparaison, eux, demandent seulement des inégalités. C'est pourquoi ils prennent le relais.

**Conclusion.** La règle du quotient ne s'applique pas, car le numérateur de $p_n$ n'a pas de limite.

**À retenir.** Devant $(-1)^n$, on pense « encadrement » plutôt qu'« opérations ».

### Exercice 8

## Une suite fonction de n, puis l'image de ses termes

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \dfrac{4n+1}{n+2}$. On note $g$ la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{4x+1}{x+2}$, de sorte que $u_n = g(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

#### 1.

Étudier le sens de variation de $g$ sur $[0, +\infty[$. En déduire celui de $(u_n)$.

INDICE

Calcule $g'(x)$ avec la formule de la dérivée d'un quotient. Tu peux aussi écrire $g(x)$ sous la forme $4 - \dfrac{a}{x+2}$.

CORRIGÉ

**Dérivée.** La fonction $g$ est rationnelle et $x+2 > 0$ sur $[0, +\infty[$ : $g$ est dérivable sur cet intervalle. Pour tout $x \geq 0$ :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{4(x+2) - (4x+1)}{(x+2)^2} \\ &= \frac{7}{(x+2)^2}. \end{aligned}$$

**Variations de $g$.** Pour tout $x \geq 0$, $g'(x) > 0$ : $g$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

**La suite.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Les réels $n$ et $n+1$ appartiennent à $[0, +\infty[$ et $n < n+1$. Comme $g$ est strictement croissante :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= g(n+1) \\ &> g(n) = u_n. \end{aligned}$$

**Conclusion.** $g$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, et la suite $(u_n)$ est **strictement croissante**.

### 2.

Déterminer $\lim u_n$.

INDICE

Cherche la limite de $g$ en $+\infty$, par exemple en écrivant $g(x) = 4 - \dfrac{7}{x+2}$.

CORRIGÉ

Pour tout $x \geq 0$ :

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{4(x+2)-7}{x+2} \\ &= 4 - \frac{7}{x+2}. \end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{7}{x+2} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 4$.

Comme $u_n = g(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $(u_n)$ a la même limite que $g$ en $+\infty$.

**Conclusion.** $\lim u_n = 4$.

### 3.

Déterminer la limite de la suite $\left(\sqrt{u_n}\right)$, puis celle de la suite $\left(\dfrac{u_n^2+9}{u_n+1}\right)$.

INDICE

Chacune de ces suites s'écrit $h(u_n)$. Vérifie que les termes $u_n$ sont dans l'ensemble de définition de $h$, puis que $h$ est continue en $4$.

CORRIGÉ

**Pourquoi cette méthode.** Si $(u_n)$ converge vers $a$ et si $h$ est continue en $a$, alors $\big(h(u_n)\big)$ converge vers $h(a)$.

**Les termes.** $(u_n)$ est croissante, donc $u_n \geq u_0 = \dfrac{1}{2} > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**Première suite.** La racine carrée est définie et continue sur $[0, +\infty[$, qui contient tous les $u_n$ et la limite $4$. Donc :

$$\lim \sqrt{u_n} = \sqrt{4} = 2.$$

**Seconde suite.** La fonction $x \mapsto \dfrac{x^2+9}{x+1}$ est rationnelle, définie et continue sur $]-1, +\infty[$. Cet intervalle contient tous les $u_n$ et $4$. Donc :

$$\begin{aligned} \lim \frac{u_n^2+9}{u_n+1} &= \frac{4^2+9}{4+1} \\ &= \frac{25}{5} = 5. \end{aligned}$$

**Conclusion.** La suite $\left(\sqrt{u_n}\right)$ a pour limite $2$, et la suite $\left(\dfrac{u_n^2+9}{u_n+1}\right)$ a pour limite $5$.

**À retenir.** On ne « remplace » $u_n$ par sa limite qu'après avoir vérifié la continuité de la fonction en cette limite.

### Exercice 9

## Encadrer, monter, converger : une racine carrée

On note $f$ la fonction définie sur $\left[-\frac{4}{3}, +\infty\right[$ par $f(x) = \sqrt{3x+4}$, et $(u_n)$ la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

**1.**

Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 4$.

INDICE

Pour l'hérédité, pars de $0 \leq u_n \leq 4$ et construis $3u_n + 4$ étape par étape. Utilise ensuite le fait que la racine carrée est croissante sur $[0, +\infty[$.

CORRIGÉ

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $P(n)$ : « $0 \leq u_n \leq 4$ ».

**Initialisation.** $u_0 = 0$ et $0 \leq 0 \leq 4$ : $P(0)$ est vraie.

**Hérédité.** On fixe un entier $n$ tel que $P(n)$ soit vraie, c'est-à-dire $0 \leq u_n \leq 4$. Alors :

$$0 \leq 3u_n \leq 12,$$
$$4 \leq 3u_n + 4 \leq 16.$$

La racine carrée est croissante sur $[0, +\infty[$, donc :

$$2 \leq \sqrt{3u_n + 4} \leq 4,$$

c'est-à-dire $2 \leq u_{n+1} \leq 4$. En particulier $0 \leq u_{n+1} \leq 4$ : $P(n+1)$ est vraie.

**Conclusion.** Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 4$.

## 2.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(4 - u_n)(u_n + 1)}{u_{n+1} + u_n}.$$

En déduire le sens de variation de $(u_n)$.

INDICE

La différence contient une racine carrée : pense à la quantité conjuguée. Si tu bloques : multiplie et divise par $u_{n+1} + u_n$, puis remplace $u_{n+1}^2$ par $3u_n + 4$.

CORRIGÉ

**Le dénominateur.** Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question 1, $u_n \geq 0$, donc $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4} \geq 2$. Ainsi $u_{n+1} + u_n \geq 2 > 0$ : on peut diviser par ce nombre.

**Le calcul.** On multiplie et on divise par $u_{n+1} + u_n$, puis on utilise $u_{n+1}^2 = 3u_n + 4$ :

$$\begin{aligned} & u_{n+1} - u_n \\ &= \frac{u_{n+1}^2 - u_n^2}{u_{n+1} + u_n} \\ &= \frac{3u_n + 4 - u_n^2}{u_{n+1} + u_n}. \end{aligned}$$

**Le numérateur.** En développant :

$$\begin{aligned} & (4 - u_n)(u_n + 1) \\ &= 4u_n + 4 - u_n^2 - u_n \\ &= -u_n^2 + 3u_n + 4. \end{aligned}$$

On retrouve le numérateur précédent, d'où l'égalité demandée.

**Le signe.** $4 - u_n \geq 0$ (question 1), $u_n + 1 > 0$, et le dénominateur est strictement positif. Donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$.

**Conclusion.** L'égalité est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, et la suite $(u_n)$ est **croissante**.

### 3.

Justifier que $(u_n)$ converge. Déterminer sa limite en citant chaque hypothèse utilisée.

INDICE

Commence par la convergence : quel critère relie « croissante » et « majorée » ? Ensuite seulement, cherche la valeur : vérifie une à une les hypothèses de la propriété du point fixe sur l'intervalle $I = [0, 4]$.

CORRIGÉ

**Convergence.** La suite $(u_n)$ est croissante (question 2) et majorée par $4$ (question 1). Une suite croissante et majorée converge : $(u_n)$ converge vers un réel $\ell$.

**Hypothèses de la propriété du point fixe**, sur $I = [0, 4]$. Cette propriété dit : si la suite converge, alors sa limite est un point fixe de $f$. On vérifie :

- $f$ est **continue** sur $I$ : composée de $x \mapsto 3x + 4$, continue et positive sur $I$, et de la racine carrée ;
- $I$ est un intervalle **fermé** ;
- $f(I) \subset I$ : $f$ est croissante, $f(0) = 2$ et $f(4) = 4$, donc $f(I) = [2, 4] \subset I$ ;
- $u_0 = 0 \in I$ ;
- $(u_n)$ **converge**, d'après le point précédent.

Donc $\ell \in I$ et $f(\ell) = \ell$.

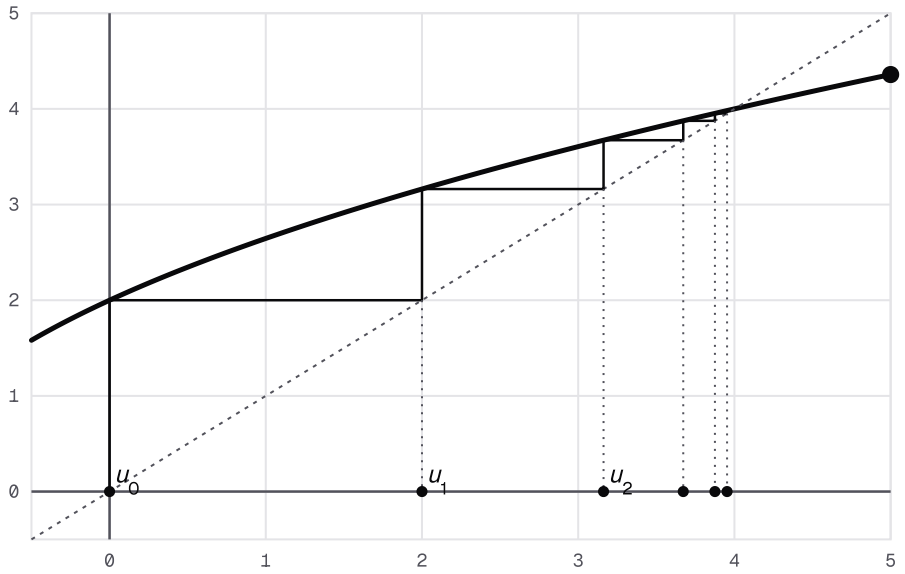
**Résolution.** Comme $\ell \geq 0$, les deux membres de l'équation sont positifs, et :

$$\begin{aligned} &\sqrt{3\ell + 4} = \ell \\ \iff\ &3\ell + 4 = \ell^2 \\ \iff\ &\ell^2 - 3\ell - 4 = 0 \\ \iff\ &(\ell - 4)(\ell + 1) = 0. \end{aligned}$$

Comme $-1 \notin I$, on obtient $\ell = 4$.

**Conclusion.** La suite $(u_n)$ converge et $\lim u_n = 4$.

**À retenir.** L'ordre compte : on prouve d'abord la convergence, ensuite seulement on cherche la limite parmi les solutions de $f(x) = x$.




**Escalier des premiers termes : partis de u_0 = 0, ils montent vers le point fixe 4, où la courbe de f coupe la droite y = x.**