BURHAN

Suites numériques

2ème Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-experimentales/mathematiques/suites-numeriques/cours

Chapitre	Semestre
Suites numériques	Semestre 1

Un réservoir sur le toit

Un réservoir sur le toit

Sur le toit d'une maison de Ouarzazate, un réservoir contient 40 litres d'eau. Chaque semaine, la chaleur en fait évaporer le **quart**. Puis on y verse 30 litres.

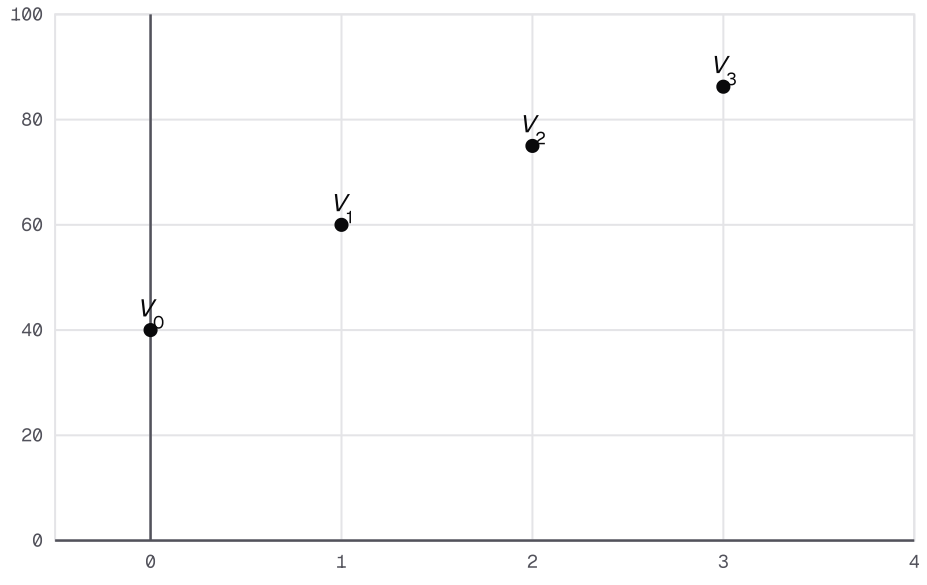
On note V_n le volume, en litres, au début de la semaine n. Alors $V_0 = 40$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$V_{n+1} = \frac{3}{4}\,V_n + 30.$$

Calculons les premières semaines :

n	0	1	2	3
V_n	40	60	75	$86{,}25$

Le volume monte, mais de moins en moins vite : $+20$, puis $+15$, puis $+11{,}25$.



● Termes de la suite (V_n)

Les quatre premières semaines du réservoir : chaque point a pour abscisse le numéro n de la semaine et pour ordonnée le volume V_n, en litres.

Devine : Le réservoir va-t-il déborder ?

Le réservoir peut contenir 150 litres. Si l'on continue ainsi pendant des années, que se passe-t-il ?

A. Il finit par déborder : on ajoute 30 litres chaque semaine.

Faux.
On ajoute 30 litres, mais on en perd le quart, et ce quart grandit avec le volume. À 120 litres, on perd exactement 30 litres : le volume ne peut pas dépasser 120.

B. Le volume se rapproche d'une valeur, sans l'atteindre et sans déborder.

Juste.
Les hausses diminuent, ce qui le laisse penser sans le prouver : des hausses qui diminuent ne suffisent pas toujours à empêcher une suite de grandir sans fin. L'argument solide est un plafond. Tu le démontreras à la fin du chapitre.

C. Le volume finit par valoir exactement 120 litres.

Faux.
Si $V_n < 120$, alors $V_{n+1} - 120 = \frac{3}{4}(V_n - 120) < 0$. Le volume reste donc toujours sous 120 litres, sans jamais l'atteindre.

D. Le volume monte puis redescend, sans jamais se fixer.

Faux.
Rien ne redescend dans le tableau : chaque semaine, le volume augmente.

Correction
Le volume augmente et se rapproche de 120 litres. À 120 litres, on perd le quart, soit 30 litres, et on en remet 30 : plus rien ne bouge. Ce chapitre te donne les outils pour le **démontrer**.

Ce que tu vas apprendre. Tout le chapitre prépare une question présente dans 9 des 15 sujets de bac consultés : étudier une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$. Il faut l'encadrer, trouver son sens de variation, prouver qu'elle converge, puis calculer sa limite. On commence par de courts rappels de 1ère année. Ensuite, on monte marche par marche.

Rappels : vocabulaire, sens de variation, récurrence

Deux façons de définir une suite

Une suite, c'est une liste de nombres numérotés : u_0, u_1, u_2… Le numéro n s'appelle l'**indice**.

- **Formule explicite** : $h_n = n^2 - 3n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On calcule directement $h_{10} = 100 - 30 = 70$.
- **Récurrence** : le réservoir. Pour obtenir V_{10}, il faut d'abord V_9, donc V_8, et ainsi de suite.

Définition : Suite numérique

Soit n_0 un entier naturel. Une **suite numérique** est une fonction u définie sur l'ensemble des entiers $n \geq n_0$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. L'image de n est notée u_n (le **terme d'indice** n) et la suite est notée $(u_n)_{n \geq n_0}$.

Une suite peut être définie **explicitement**, par une formule $u_n = f(n)$, ou **par récurrence**, par son premier terme et une relation qui donne u_{n+1} en fonction de u_n.

Vérifie : Le terme suivant

Avec $h_n = n^2 - 3n$, que vaut h_{n+1} ?

A. $n^2 - 3n + 1$

Faux.
Ça, c'est $h_n + 1$: le terme augmenté de 1. Pour h_{n+1}, on remplace n par $n + 1$ **partout**.

B. $(n+1)^2 - 3n$

Faux.
Le n du terme $-3n$ doit lui aussi devenir $n + 1$.

C. $n^2 - n - 2$

Juste.
On développe $(n+1)^2 - 3(n+1)$, soit $n^2 + 2n + 1 - 3n - 3$: on obtient $n^2 - n - 2$.

D. $n^2 + 1 - 3n - 3$

Faux.
$(n+1)^2$ ne vaut pas $n^2 + 1$: il manque le double produit $2n$.

Correction
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on remplace n par $n + 1$ dans toute la formule, puis on développe :

$$\begin{aligned} h_{n+1} &= (n+1)^2 - 3(n+1) \\ &= n^2 + 2n + 1 - 3n - 3 \\ &= n^2 - n - 2. \end{aligned}$$

Vérification avec $n = 2$: $h_3 = 9 - 9 = 0$, et $2^2 - 2 - 2 = 0$.

Bornes et sens de variation

Définition : Suite majorée, minorée, bornée

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite numérique.

- (u_n) est **majorée** s'il existe un réel M tel que $u_n \leq M$ pour tout $n \geq n_0$.
- (u_n) est **minorée** s'il existe un réel m tel que $u_n \geq m$ pour tout $n \geq n_0$.
- (u_n) est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

Définition : Suite croissante, décroissante, monotone

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite numérique.

- (u_n) est **croissante** si $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout $n \geq n_0$, et **strictement croissante** si $u_{n+1} > u_n$ pour tout $n \geq n_0$.
- (u_n) est **décroissante** si $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout $n \geq n_0$, et **strictement décroissante** si $u_{n+1} < u_n$ pour tout $n \geq n_0$.
- (u_n) est **monotone** si elle est croissante ou décroissante.

En clair. Majorée : la suite a un plafond qu'elle ne dépasse jamais. Minorée : elle a un plancher. Croissante : chaque terme est au moins égal au précédent. Pour le sens de variation, on compare donc u_{n+1} et u_n.

Méthode : Étudier le sens de variation

1. **Différence** : étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$.
2. **Quotient** : si tous les termes sont strictement positifs, compare $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.
3. **Fonction** : si $u_n = f(n)$, utilise les variations de f (on y revient plus loin).
4. **Récurrence** : pour une suite récurrente, démontre $u_n \leq u_{n+1}$ (croissante) ou $u_n \geq u_{n+1}$ (décroissante) pour tout n.

Exemple : Une suite décroissante et bornée (guidé)

Soit (t_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $t_n = \dfrac{2n+3}{n+1}$.

Différence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$t_{n+1} - t_n = \frac{2n+5}{n+2} - \frac{2n+3}{n+1}.$$

Au dénominateur commun $(n+1)(n+2)$, le numérateur vaut $(2n^2+7n+5) - (2n^2+7n+6) = -1$. Donc :

$$t_{n+1} - t_n = \frac{-1}{(n+1)(n+2)}.$$

Signe. Le dénominateur est strictement positif, donc $t_{n+1} - t_n < 0$: la suite est **strictement décroissante**.

Bornes. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = 2 + \dfrac{1}{n+1}$, avec $0 < \dfrac{1}{n+1} \leq 1$. Donc $2 < t_n \leq 3$: la suite est **bornée**.

La récurrence en trois temps

Pour prouver une propriété pour **tous** les entiers, pense à une file de dominos. Le premier tombe : c'est l'**initialisation**. Chaque domino fait tomber le suivant : c'est l'**hérédité**. Alors tous tombent : c'est la **conclusion**.

Exemple : Le réservoir ne dépasse pas 120 litres (guidé)

Montrons que $V_n \leq 120$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. **Initialisation** : $V_0 = 40$, donc $V_0 \leq 120$.
2. **Hérédité** : on **fixe** un entier n tel que $V_n \leq 120$. Comme $\frac{3}{4} > 0$, on a $\frac{3}{4}V_n \leq 90$, donc $V_{n+1} = \frac{3}{4}V_n + 30 \leq 120$. La propriété est vraie au rang $n+1$.
3. **Conclusion** : par récurrence, $V_n \leq 120$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Le réservoir de 150 litres ne débordera donc jamais.

Trouve l'erreur : Une récurrence mal partie

Un camarade veut montrer que $V_n \geq 40$ pour tout n. Il écrit :

> Supposons que $V_n \geq 40$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $V_{n+1} = \frac{3}{4}V_n + 30 \geq 30 + 30 = 60 \geq 40$. Donc $V_n \geq 40$ pour tout n.

Que reprocher à cette rédaction ?

A. Il suppose la propriété vraie pour tout n, et l'initialisation manque.

Juste.
Supposer « pour tout n », c'est supposer ce qu'on veut prouver. L'hérédité part d'**un** entier n fixé.
Et la vérification de $V_0 \geq 40$ n'est pas écrite.

B. Le calcul est faux : $\frac{3}{4} \times 40$ ne vaut pas 30.

Faux.
$\frac{3}{4} \times 40 = 30$: le calcul est juste. Le défaut est ailleurs.

C. La conclusion devrait être $V_n \geq 60$.

Faux.
$V_0 = 40$: la suite ne vérifie pas $V_n \geq 60$ au rang 0.

Correction
Rédaction correcte :

1. **Initialisation** : $V_0 = 40$, donc $V_0 \geq 40$.

2. **Hérédité** : on fixe un entier n tel que $V_n \geq 40$. Comme $\frac{3}{4} > 0$, $V_{n+1} \geq \frac{3}{4} \times 40 + 30 = 60$, et $60 \geq 40$: la propriété est vraie au rang $n+1$.
3. **Conclusion** : par récurrence, $V_n \geq 40$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Attention : L'initialisation n'est pas un détail

La propriété « 3^n est pair » est héréditaire : si 3^n est pair, alors $3^{n+1} = 3 \times 3^n$ est pair aussi. Pourtant, elle est fausse pour tout n : $3^0 = 1$, et 3^n est toujours impair. Sans initialisation, l'hérédité ne prouve rien.

Suites arithmétiques et géométriques

Ajouter toujours la même quantité

Karim a 7 dirhams dans sa tirelire. Chaque semaine, il ajoute 4 dirhams. Après n semaines, il a $a_n = 7 + 4n$ dirhams : on **ajoute** toujours 4.

Définition : Suite arithmétique

Une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est **arithmétique** s'il existe un réel r, appelé **raison**, tel que $u_{n+1} = u_n + r$ pour tout $n \geq n_0$.

Propriété : Terme général et somme d'une suite arithmétique

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite arithmétique de raison r, et p, n deux entiers tels que $n_0 \leq p \leq n$.

- $u_n = u_p + (n-p)\,r$.
- La somme des termes consécutifs de u_p à u_n, qui en compte $n - p + 1$, vaut :

$$u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = (n - p + 1) \times \frac{u_p + u_n}{2}.$$

Exemple : Une somme arithmétique (guidé)

Calculons $S = a_0 + a_1 + \cdots + a_{10}$, avec $a_n = 7 + 4n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Nature. (a_n) est arithmétique de raison 4.

Nombre de termes. De a_0 à a_{10}, il y en a $10 - 0 + 1 = 11$.

Formule. $a_{10} = 7 + 4 \times 10 = 47$, donc :

$$\begin{aligned} S &= 11 \times \frac{7 + 47}{2} \\ &= 11 \times 27 = 297. \end{aligned}$$

Multiplier toujours par le même nombre

Au jour 0, une rumeur est connue de 3 élèves. Chaque jour, le nombre d'élèves qui la connaissent **double**. Le jour n, ils sont $g_n = 3 \times 2^n$: on **multiplie** toujours par 2.

Définition : Suite géométrique

Une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est **géométrique** s'il existe un réel q, appelé **raison**, tel que $u_{n+1} = q\,u_n$ pour tout $n \geq n_0$.

Propriété : Terme général et somme d'une suite géométrique

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite géométrique de raison q, et p, n deux entiers tels que $n_0 \leq p \leq n$.

- $u_n = u_p \times q^{\,n-p}$, avec la convention $q^0 = 1$.
- Si $q \neq 1$, la somme des $n - p + 1$ termes consécutifs de u_p à u_n vaut :

$$u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = u_p \times \frac{1 - q^{\,n-p+1}}{1 - q}.$$

- Si $q = 1$, cette somme vaut $(n - p + 1)\,u_p$.

Vérifie : Compter avant de calculer

Combien de termes compte la somme $u_5 + u_6 + \cdots + u_{20}$?

A. 15

Faux.
C'est $20 - 5$: il manque un terme. Pense à $u_5 + u_6$: $6 - 5 = 1$, et pourtant il y a deux termes.

B. 16

Juste.
$20 - 5 + 1 = 16$: de u_p à u_n, il y a $n - p + 1$ termes.

C. 20

Faux.
Ce serait le cas en partant de u_1. Ici, on part de u_5.

D. 21

Faux.
Ce serait le cas en partant de u_0.

Correction

De u_5 à u_{20}, il y a $20 - 5 + 1 = 16$ termes. Ce comptage est le premier piège des sommes : un terme de trop ou de moins fausse tout le résultat.

À toi : Une somme géométrique

Calcule $S = 2 + 6 + 18 + \cdots + 1458$, où chaque terme est le triple du précédent.

Indice 1

C'est une suite géométrique de premier terme 2 et de raison 3 : son terme d'indice k vaut 2×3^k. Cherche l'indice du dernier terme.

Indice 2

$2 \times 3^6 = 1458$: la somme va de l'indice 0 à l'indice 6. Combien de termes ?

Indice 3

Sept termes : applique la formule de la somme, avec $q = 3 \neq 1$.

Réponse

Les termes sont ceux d'une suite géométrique de premier terme 2 et de raison $q = 3$. La somme va de $2 \times 3^0 = 2$ à $2 \times 3^6 = 1458$: elle compte $6 - 0 + 1 = 7$ termes.

Comme $q \neq 1$, la formule de la somme des termes d'une suite géométrique donne :

$$\begin{aligned} S &= 2 \times \frac{1 - 3^7}{1 - 3} \\ &= 2 \times \frac{-2186}{-2} \\ &= 2186. \end{aligned}$$

Remarque : À quoi ça sert dans ce chapitre ?

Ici, les suites géométriques servent surtout d'**outil**. Pour étudier une suite compliquée, on fabrique une suite géométrique qui lui est liée. Tu le feras avec le réservoir, à la fin du chapitre.

Limite d'une suite : converger, diverger

Des termes qui se resserrent

Devine : Où vont les termes ?

Soit $w_n = 2 - \dfrac{2}{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Ses premiers termes sont 0 ; 1 ; $\dfrac{4}{3}$; $1{,}5$; $1{,}6$… Quand n devient très grand, que font les termes ?

A. Ils se rapprochent de 2 autant qu'on veut, sans jamais l'atteindre.

Juste.

$\dfrac{2}{n+1}$ se rapproche de 0, donc w_n se rapproche de 2. Et $w_n < 2$ pour tout n.

B. Ils grandissent sans fin, car la suite augmente.

Faux.

Elle augmente, mais de moins en moins : $\dfrac{2}{n+1}$ devient minuscule. Les termes ne dépassent jamais 2.

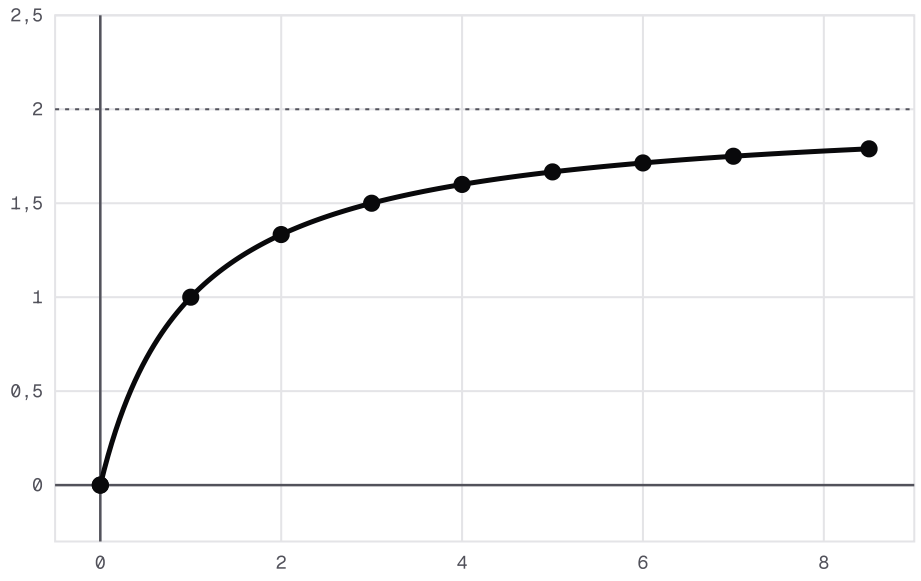
C. Ils finissent par valoir exactement 2.

Faux.

Il faudrait $\dfrac{2}{n+1} = 0$, ce qui n'arrive pour aucun entier n.

Correction

$\dfrac{2}{n+1}$ devient aussi petit qu'on veut quand n grandit. Les termes se rapprochent donc de 2, toujours par en dessous. La figure suivante le montre.



Les termes $w_n = 2 - 2/(n + 1)$, pour n de 0 à 7, sont les points d'abscisse entière de la courbe de $x \mapsto 2 - 2/(x + 1)$. Ils montent et se serrent sous la droite $y = 2$, sans jamais l'atteindre.

Converger, en mots précis

Définition : Suite convergente, suite divergente

Soit ℓ un réel. Une suite (u_n) **converge vers** ℓ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang. On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, ou plus brièvement $\lim u_n = \ell$ lorsque la variable est claire, et l'on dit que (u_n) est **convergente**.

Une suite qui ne converge vers aucun réel est **divergente** : soit elle tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, soit elle n'a pas de limite.

En clair. Prends n'importe quel intervalle ouvert autour de 2, même minuscule, comme $]1{,}9\,;\,2{,}1[$. À partir d'un certain rang, **tous** les termes w_n sont dedans. C'est cela, « converger vers 2 ».

À toi : À partir de quel rang ?

À partir de quel rang tous les termes w_n sont-ils dans l'intervalle $]1{,}9\,;\,2{,}1[$?

Indice 1
On a toujours $w_n < 2 < 2{,}1$. Il reste à résoudre $w_n > 1{,}9$.
Indice 2
$w_n > 1{,}9$ équivaut à $\dfrac{2}{n+1} < 0{,}1$, soit $n+1 > 20$.
Indice 3
Attention à l'intervalle **ouvert** : calcule w_{19}. Est-il dedans ?

Réponse
Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} & w_n > 1{,}9 \\ \iff & \frac{2}{n+1} < 0{,}1 \\ \iff & n+1 > 20 \\ \iff & n \geq 20, \end{aligned}$$

la dernière équivalence parce que n est entier. Comme $w_n < 2$ pour tout n, tous les termes sont dans l'intervalle **à partir du rang** 20.

Le terme $w_{19} = 2 - \dfrac{2}{20} = 1{,}9$ n'y est pas : l'intervalle est ouvert. Avec un intervalle plus étroit, le rang serait plus grand, mais il existerait toujours.

Tendre vers l'infini

Définition : Suite qui tend vers +∞ ou vers −∞

Une suite (u_n) **tend vers** $+\infty$ si, pour tout réel A, tous les termes u_n sont supérieurs à A à partir d'un certain rang. On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

De même, (u_n) tend vers $-\infty$ si, pour tout réel A, tous les termes u_n sont inférieurs à A à partir d'un certain rang.

Exemple : Une suite qui dépasse tout seuil

Soit (b_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $b_n = 3n - 5$. Choisis un seuil, par exemple $A = 1000$:

$$b_n > 1000 \iff n > 335.$$

Donc, dès que $n \geq 336$, on a $b_n > 1000$. Pour un seuil A quelconque, $b_n > A$ dès que $n > \dfrac{A+5}{3}$: un tel rang existe toujours. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = +\infty$.

Une seule limite, ou aucune

Propriété : Unicité de la limite

Si une suite a une limite, réelle ou infinie, cette limite est **unique**.

Vérifie : Une suite qui saute

Soit $c_n = 3 \times (-1)^n$. Ses termes valent 3 ; -3 ; 3 ; -3… Que peut-on dire de (c_n) ?

A. Elle converge vers 0, la moyenne de ses valeurs.

Faux.
Aucun terme ne s'approche de 0 : tous sont à distance 3 de 0.

B. Elle a deux limites : 3 et -3.

Faux.
Une suite a au plus une limite. Un petit intervalle ouvert autour de 3 ne contient pas les termes égaux à -3, qui reviennent sans cesse.

C. Elle est bornée, mais elle n'a pas de limite.

Juste.
Elle est bornée par -3 et 3. Pourtant, elle diverge sans tendre vers l'infini : elle n'a pas de limite.

D. Elle tend vers $+\infty$, puisqu'elle ne converge pas.

Faux.
Ne pas converger ne veut pas dire tendre vers l'infini. Ici, $|c_n| = 3$ ne bouge pas.

Correction
$-3 \leq c_n \leq 3$: la suite est bornée. Ses termes sautent sans fin entre 3 et -3. Aucun réel n'attire tous les termes à partir d'un rang, et la suite ne tend pas vers l'infini : (c_n) **n'a pas de limite**. Une suite bornée peut donc diverger.

Calcul de limites de suites

Les limites de référence

Pour calculer une limite, on ne repart pas de zéro. On part de quelques suites dont la limite est connue. Puis on les combine.

Propriété : Limites des suites de référence

Les suites ci-dessous sont indexées par les entiers $n \geq 1$. Pour tout entier $p \geq 1$ et tout rationnel $r > 0$, quand n tend vers $+\infty$:

$$\lim n^p = +\infty, \qquad \lim \sqrt{n} = +\infty, \qquad \lim n^r = +\infty,$$
$$\lim \frac{1}{n^p} = 0, \qquad \lim \frac{1}{\sqrt{n}} = 0, \qquad \lim \frac{1}{n^r} = 0.$$

Exemple : Combiner des limites de référence

Pour $n \geq 1$, on part de $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$. Par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5}{\sqrt{n}} = 0$, puis, par somme :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(3 + \frac{5}{\sqrt{n}}\right) = 3.$$

De même, la somme de deux suites qui tendent vers $+\infty$ tend vers $+\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} \left(n^2 + \sqrt{n}\right) = +\infty.$$

Les puissances d'un même nombre

Multiplie 1 par $0{,}5$, encore et encore : $0{,}5$; $0{,}25$; $0{,}125$… Les termes filent vers 0. Multiplie plutôt par $1{,}5$: $1{,}5$; $2{,}25$; $3{,}375$… Ils explosent. Tout dépend de la position de q.

Propriété : Limite de la suite (q^n)

Soit q un réel. Quand n tend vers $+\infty$:

- si $q > 1$, $\lim q^n = +\infty$;
- si $q = 1$, la suite (q^n) est constante, égale à 1 ;
- si $-1 < q < 1$, $\lim q^n = 0$;
- si $q \leq -1$, la suite (q^n) n'a pas de limite.

Vérifie : Laquelle converge ?

Laquelle de ces suites converge ?

A. $((-1{,}2)^n)$

Faux.

$-1{,}2 \leq -1$: les termes changent de signe et grossissent. Pas de limite.

B. $((-1)^n)$

Faux.

$q = -1$: les termes valent 1 et -1 en alternance. Pas de limite.

C. $((-0{,}9)^n)$

Juste.

$-1 < -0{,}9 < 1$: la suite converge vers 0, en changeant de signe à chaque rang.

D. $\left(\left(\frac{5}{4}\right)^n\right)$

Faux.

$\frac{5}{4} > 1$: la suite tend vers $+\infty$.

Correction

On regarde où se trouve q. Seul $q = -0{,}9$ vérifie $-1 < q < 1$: $\lim\limits_{n\to+\infty}(-0{,}9)^n = 0$. Pour $q = \frac{5}{4}$, la limite est $+\infty$. Pour $q = -1$ et $q = -1{,}2$, il n'y a pas de limite.

Opérations et formes indéterminées

Propriété : Opérations sur les limites

Les règles qui donnent la limite en $+\infty$ d'une somme, d'un produit ou d'un quotient de deux fonctions s'appliquent aux suites, avec les mêmes **formes indéterminées** :

$$+\infty - \infty, \qquad 0 \times \infty, \qquad \frac{\infty}{\infty}, \qquad \frac{0}{0}.$$

Devant une forme indéterminée, aucune conclusion n'est possible sans transformer l'écriture.

Méthode : Lever une forme indéterminée

1. **Repère** la forme indéterminée.
2. **Polynôme, ou quotient de polynômes** : mets en facteur la plus grande puissance de n, en haut et en bas.
3. **Racines carrées** : multiplie et divise par la quantité conjuguée.
4. **Puissances a^n et b^n** : mets en facteur celle dont la base a la plus grande valeur absolue.

Exemple : Deux formes indéterminées (guidé)

Forme $+\infty - \infty$. Pour tout $n \geq 1$:

$$n^2 - 5n = n^2\left(1 - \frac{5}{n}\right).$$

Or $\lim n^2 = +\infty$ et $\lim\left(1 - \frac{5}{n}\right) = 1$. Par produit, $\lim\left(n^2 - 5n\right) = +\infty$.

Forme $\frac{\infty}{\infty}$. Pour tout $n \geq 1$, on met n^2 en facteur en haut et en bas :

$$\begin{aligned}\frac{3n^2+1}{n^2+4n} &= \frac{n^2\left(3+\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(1+\frac{4}{n}\right)} \\ &= \frac{3+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{4}{n}}.\end{aligned}$$

Le numérateur tend vers 3 et le dénominateur vers 1 : la suite tend vers $\frac{3}{1} = 3$.

À toi : Un quotient de polynômes

Soit $(k_n)_{n\geq 6}$ la suite définie par $k_n = \dfrac{2n+1}{5-n}$. Que vaut $\lim\limits_{n\to+\infty} k_n$?

A. -2

Juste.

Après factorisation par n, le numérateur tend vers 2 et le dénominateur vers -1.

B. 2

Faux.

Attention au signe : au dénominateur, le terme qui domine est $-n$, pas n.

C. On ne peut pas conclure : c'est une forme indéterminée.

Faux.

C'est une forme indéterminée **au départ**. Une factorisation la lève : on peut conclure.

D. $+\infty$

Faux.

Le numérateur et le dénominateur grandissent au même rythme, en valeur absolue : le quotient reste borné.

Indice 1

Mets n en facteur en haut et en bas.

Correction

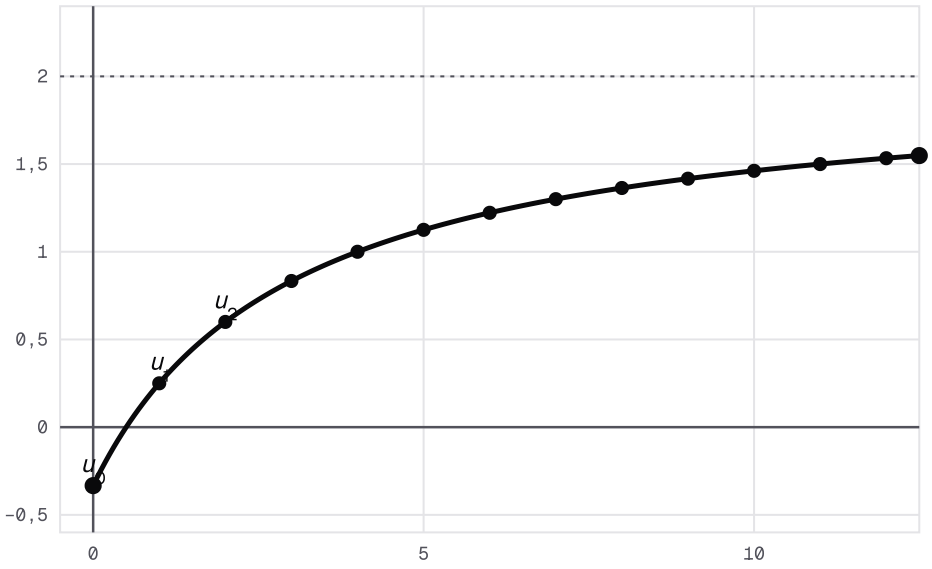
Pour tout $n \geq 6$, on met n en facteur en haut et en bas :

$$\begin{aligned}k_n &= \frac{n\left(2+\frac{1}{n}\right)}{n\left(\frac{5}{n}-1\right)} \\ &= \frac{2+\frac{1}{n}}{\frac{5}{n}-1}.\end{aligned}$$

Le numérateur tend vers 2, le dénominateur vers -1, qui n'est pas nul. Par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} k_n = -2$.

Quand la suite vient d'une fonction

Si $u_n = f(n)$, les termes sont les points de la courbe de f d'abscisse entière. Si f a une limite en $+\infty$, la suite a la même limite. Et si f est croissante sur $[a, +\infty[$, la suite est croissante.



Les termes de u_n = f(n) sont les points de la courbe de f d'abscisse entière ; ils suivent la courbe vers la droite y = 2.

Propriété : Limite d'une suite $u_n = f(n)$

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a, +\infty[$ et (u_n) la suite définie par $u_n = f(n)$ pour tout entier $n \geq a$.

Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$, où ℓ est un réel, $+\infty$ ou $-\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$.

La réciproque est fausse : pour $f(x) = \sin(\pi x)$, $f(n) = 0$ pour tout entier n, alors que f n'a pas de limite en $+\infty$.

Propriété : Sens de variation d'une suite $u_n = f(n)$

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a, +\infty[$ et $u_n = f(n)$ pour tout entier $n \geq a$.

Si f est croissante sur $[a, +\infty[$, alors (u_n) est croissante ; si f est décroissante sur $[a, +\infty[$, alors (u_n) est décroissante.

Exemple : Limite et sens de variation par une fonction (guidé)

Soit (m_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $m_n = \dfrac{2n-1}{n+3}$, et f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+3}$. Ainsi $m_n = f(n)$.

Limite. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$ (quotient des termes de plus haut degré). D'après la limite d'une suite $u_n = f(n)$ (F14), $\lim\limits_{n \to +\infty} m_n = 2$.

Variations. f est dérivable sur $[0,+\infty[$ et, pour tout $x \geq 0$:

$$f'(x) = \frac{2(x+3)-(2x-1)}{(x+3)^2} = \frac{7}{(x+3)^2} > 0.$$

Donc f est croissante sur $[0,+\infty[$. D'après le sens de variation d'une suite $u_n = f(n)$ (F15), la suite (m_n) est croissante.

Bonus : puissances et racines

À toi : Bonus : des puissances qui s'affrontent

Que vaut $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2^n - 5^n}{5^n + 1}$?

A. 0

Faux.
2^n est négligeable devant 5^n, mais pas 5^n lui-même : il est au numérateur **et** au dénominateur.

B. -1

Juste.
Après factorisation par 5^n, le quotient tend vers $\dfrac{0-1}{1+0} = -1$.

C. $-\infty$

Faux.
Le numérateur tend vers $-\infty$, mais le dénominateur vers $+\infty$: c'est une forme indéterminée, à lever.

D. 1

Faux.
Le signe compte : au numérateur, 5^n est précédé d'un moins.

Indice 1

Mets en facteur 5^n, la puissance de plus grande base, en haut et en bas.

Correction

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on met 5^n en facteur en haut et en bas :

$$\frac{2^n - 5^n}{5^n + 1} = \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^n - 1}{1 + \left(\frac{1}{5}\right)^n}.$$

Comme $-1 < \dfrac{2}{5} < 1$ et $-1 < \dfrac{1}{5} < 1$, les deux puissances tendent vers 0. Par opérations, la limite vaut $\dfrac{0-1}{1+0} = -1$.

À toi : Bonus : une différence de racines

Détermine $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n+4}-\sqrt{n}\right)$.

Indice 1

C'est une forme $+\infty-\infty$ avec des racines : pense à la quantité conjuguée $\sqrt{n+4}+\sqrt{n}$.

Indice 2

$\left(\sqrt{n+4}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+4}+\sqrt{n}\right)=(n+4)-n=4$.

Réponse

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on multiplie et on divise par la quantité conjuguée $\sqrt{n+4}+\sqrt{n}$, strictement positive :

$$\begin{aligned}&\sqrt{n+4}-\sqrt{n}\\&=\frac{(n+4)-n}{\sqrt{n+4}+\sqrt{n}}\\&=\frac{4}{\sqrt{n+4}+\sqrt{n}}.\end{aligned}$$

Le dénominateur tend vers $+\infty$; par quotient, la limite vaut 0.

Conclusion. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n+4}-\sqrt{n}\right)=0$.

Limites de suites par comparaison et encadrement

Pousser vers l'infini

Une suite qui reste **au-dessus** d'une suite qui tend vers $+\infty$ est entraînée vers $+\infty$. Une suite **coincée** entre deux suites qui vont au même endroit est obligée d'y aller aussi. Ces deux idées évitent bien des calculs.

Théorème : Limite infinie par comparaison

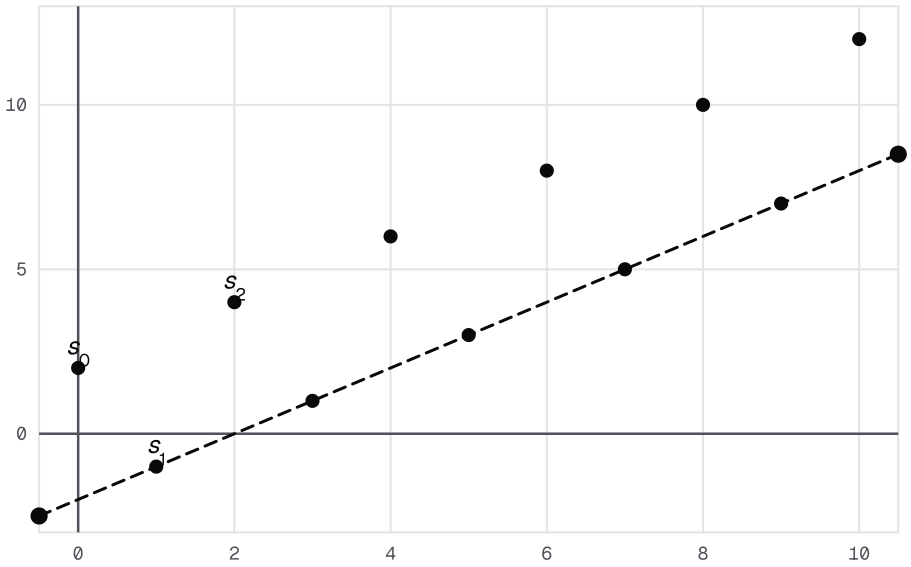
Soient (u_n) et (v_n) deux suites.

- Si $u_n\geq v_n$ à partir d'un certain rang et si $\lim v_n=+\infty$, alors $\lim u_n=+\infty$.
- Si $u_n\leq v_n$ à partir d'un certain rang et si $\lim v_n=-\infty$, alors $\lim u_n=-\infty$.

Exemple : Une suite qui n'est pas monotone

Soit $s_n=n+2\times(-1)^n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Ses termes : 2 ; -1 ; 4 ; 1 ; 6… Elle n'est pas monotone.

Mais, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $(-1)^n\geq-1$, donc $s_n\geq n-2$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}(n-2)=+\infty$, le théorème de limite infinie par comparaison donne $\lim\limits_{n\to+\infty}s_n=+\infty$.



$y = x - 2$ Point du graphe Termes de la suite (s_n)

Les points (n, s_n) montent en zigzag, toujours au-dessus de la droite d'équation y = x − 2, qui monte sans fin.

Trouve l'erreur : Dans quel sens comparer ?

On sait que $d_n \leq n^2$ pour tout n. Un élève conclut : « comme $\lim n^2 = +\infty$, alors $\lim d_n = +\infty$ ». A-t-il raison ?

A. Non : être en dessous d'une suite qui tend vers $+\infty$ ne dit rien.

Juste.

Exemple : $d_n = 0$ vérifie $d_n \leq n^2$, et pourtant $\lim d_n = 0$.

B. Oui, c'est le théorème de comparaison.

Faux.

Le théorème demande que la suite soit **au-dessus** d'une suite qui tend vers $+\infty$. Ici, (d_n) est en dessous.

C. Oui, à condition que (d_n) soit croissante.

Faux.

Même croissante, elle peut converger : (w_n) est croissante, vérifie $w_n \leq n^2$, et tend vers 2.

Correction

Non. La comparaison marche dans un seul sens : **au-dessus** d'une suite qui tend vers $+\infty$. Avec $d_n \leq n^2$, la suite peut converger, comme $d_n = 0$. Elle peut même tendre vers $-\infty$, comme $d_n = -n$.

Coincer entre deux suites

Théorème : Convergence par encadrement

Soient (u_n), (v_n), (w_n) trois suites et ℓ un réel.

- Si $v_n \leq u_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang et si $\lim v_n = \lim w_n = \ell$, alors $\lim u_n = \ell$.
- En particulier, si $|u_n - \ell| \leq v_n$ à partir d'un certain rang et si $\lim v_n = 0$, alors $\lim u_n = \ell$.

Exemple : Un encadrement (guidé)

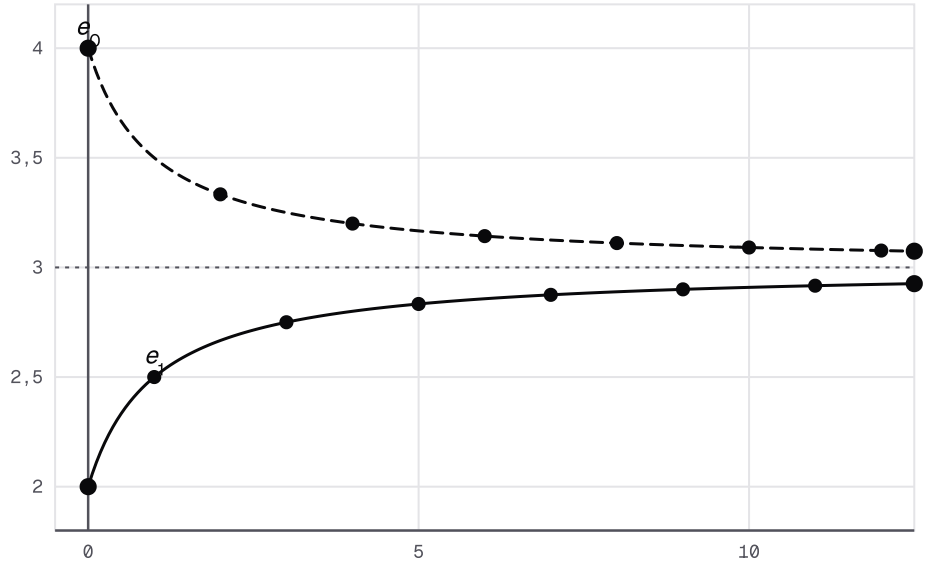
Soit $e_n = 3 + \dfrac{(-1)^n}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. **Écart** : $|e_n - 3| = \dfrac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. **Limite de l'écart** : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$.
3. **Conclusion** : par encadrement, $\lim\limits_{n \to +\infty} e_n = 3$.

On peut aussi écrire, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$3 - \frac{1}{n+1} \leq e_n \leq 3 + \frac{1}{n+1}.$$

Les deux bornes tendent vers 3.



Les points (n, e_n) restent coincés entre deux courbes qui se referment sur la droite y = 3.

À toi : Un écart qui fond

Une suite (p_n) vérifie $p_0 = 5$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|p_{n+1} - 2| \leq \dfrac{1}{3}\,|p_n - 2|$. Montre que (p_n) converge vers 2.

Indice 1

Regarde les premiers rangs : $|p_1 - 2| \leq \frac{1}{3} \times 3$, puis $|p_2 - 2| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times 3$. Devine la forme générale.

Indice 2

Démontre par récurrence que $|p_n - 2| \leq 3\left(\frac{1}{3}\right)^n$ pour tout n.

Indice 3

Conclus avec la limite de $\left(\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$, puis l'encadrement.

Réponse

Majoration de l'écart. Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|p_n - 2| \leq 3\left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

Initialisation : $|p_0 - 2| = 3 = 3\left(\frac{1}{3}\right)^0$.

Hérédité : on fixe un entier n tel que $|p_n - 2| \leq 3\left(\frac{1}{3}\right)^n$. Alors :

$$\begin{aligned} |p_{n+1} - 2| &\leq \frac{1}{3}\,|p_n - 2| \\ &\leq 3\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}. \end{aligned}$$

L'inégalité est vraie au rang $n+1$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Limite. Comme $-1 < \frac{1}{3} < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 3\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$.

Conclusion. Par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = 2$: la suite (p_n) converge vers 2.

Passer à la limite dans une inégalité

Propriété : Passage à la limite dans une inégalité

Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes, de limites respectives ℓ et ℓ'.

Si $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang, alors $\ell \leq \ell'$. En particulier, si $u_n \leq M$ à partir d'un certain rang, alors $\ell \leq M$.

Une inégalité stricte entre les termes ne donne qu'une inégalité **large** entre les limites.

Vérifie : Que garde la limite ?

La suite (y_n) converge vers ℓ et vérifie $1 < y_n < 4$ pour tout n. Que peut-on affirmer ?

A. $1 < \ell < 4$

Faux.

Les inégalités strictes deviennent larges à la limite : ℓ peut valoir 1 ou 4.

B. $1 \leq \ell \leq 4$

Juste.

On passe à la limite dans chaque inégalité : elles deviennent larges.

C. $\ell = 4$, car 4 est un majorant.

Faux.

Un majorant n'est pas forcément la limite : $y_n = 2$ pour tout n vérifie l'encadrement et converge vers 2.

D. Rien : la limite peut être n'importe quel réel.

Faux.

Le passage à la limite garde l'encadrement, au sens large.

Correction

Par passage à la limite, $1 \leq \ell \leq 4$. Le cas extrême peut arriver : $y_n = 4 - \dfrac{1}{n+1}$ vérifie $1 < y_n < 4$ et tend vers 4.

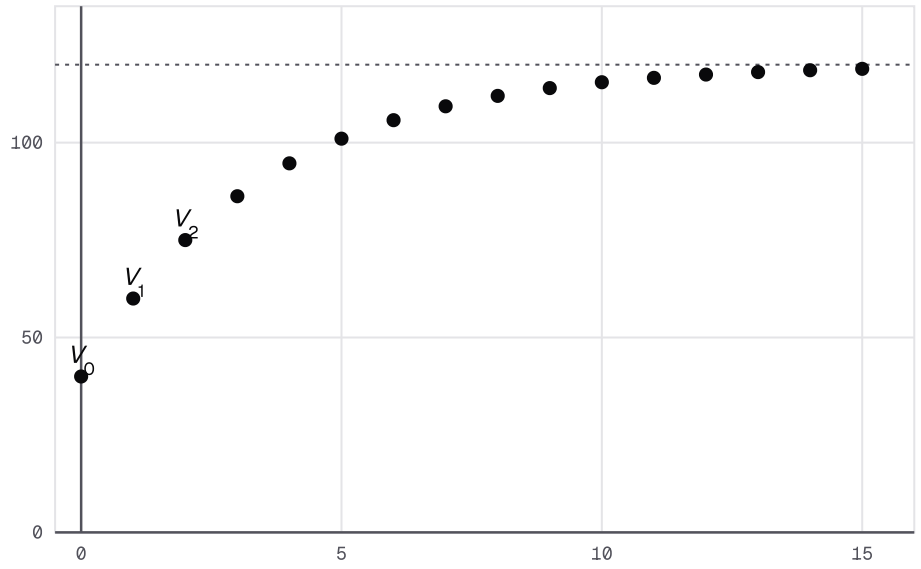
Attention : Le strict ne survit pas à la limite

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = 2 - \dfrac{2}{n+1} < 2$. Pourtant $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 2$. Si une suite converge vers ℓ et si tous ses termes sont strictement inférieurs à M, tu peux seulement écrire $\ell \leq M$.

Convergence des suites monotones : croissante et majorée

Monter sans dépasser un plafond

Reviens au réservoir. Tu sais que $V_n \leq 120$ pour tout n : c'est un plafond. Si, de plus, le volume monte chaque semaine, il ne peut pas monter indéfiniment. Il s'accumule sous le plafond, quelque part.



$y = 120$ ● Termes de la suite (V_n)

Seize semaines du réservoir : les points montent chaque semaine sans jamais passer au-dessus de la droite y = 120.

Théorème : Convergence d'une suite monotone et bornée

- Toute suite **croissante et majorée** est convergente.
- Toute suite **décroissante et minorée** est convergente.

Les conclusions restent vraies lorsque la monotonie et la borne ne valent qu'à partir d'un certain rang. Ce théorème affirme l'existence de la limite ; il ne donne pas sa valeur.

En clair. Croissante et majorée : la suite converge. Décroissante et minorée : la suite converge. Le théorème dit **que** la limite existe. Il ne dit pas **combien** elle vaut.

Exemple : Le réservoir converge (guidé)

Monotonie. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} V_{n+1} - V_n &= 30 - \frac{1}{4}V_n \\ &= \frac{120 - V_n}{4}. \end{aligned}$$

Or $V_n \leq 120$, donc $V_{n+1} - V_n \geq 0$: la suite est croissante.

Borne. Elle est majorée par 120 (récurrence des rappels).

Conclusion. (V_n) est croissante et majorée, donc elle **converge**.

Sa limite reste inconnue pour l'instant : rendez-vous à la fin du chapitre.

Deux pièges classiques

Trouve l'erreur : Un plafond pris pour une cible

La suite (w_n), avec $w_n = 2 - \dfrac{2}{n+1}$, est croissante et majorée par 5. Un élève écrit : « donc (w_n) converge vers 5 ». Où est l'erreur ?

A. Le critère ne s'applique pas : il faudrait une suite décroissante.

Faux.

Croissante et majorée, c'est exactement l'une des deux formes du critère.

B. (w_n) n'est pas majorée par 5.

Faux.

$w_n < 2 \leq 5$: 5 est bien un majorant.

C. Le critère prouve la convergence, mais ne donne pas la limite : ici, elle vaut 2.

Juste.

Un majorant est un plafond, pas une cible. 5, 10 ou 2 majorent (w_n) ; seule la limite est unique.

Correction

La conclusion correcte est « (w_n) converge ». Sa limite se calcule à part : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{n+1} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 2$. Le majorant 5 dit seulement que la limite est inférieure ou égale à 5.

Propriété : Suite monotone non bornée

- Toute suite croissante et non majorée tend vers $+\infty$.
- Toute suite décroissante et non minorée tend vers $-\infty$.

Vérifie : Croissante, et après ?

Une suite croissante tend-elle toujours vers $+\infty$?

A. Oui : si elle monte toujours, elle finit par dépasser tout nombre.

Faux.

Elle peut monter de moins en moins : (w_n) est croissante et converge vers 2.

B. Non, jamais : une suite croissante converge toujours.

Faux.

La suite $\left(n^2\right)$ est croissante et tend vers $+\infty$: elle n'est pas majorée.

C. Non : seulement si elle n'est pas majorée.

Juste.

Croissante et non majorée : elle tend vers $+\infty$. Croissante et majorée : elle converge.

Correction

> Une suite croissante a deux destins possibles :
>
> - **majorée**, elle converge (exemple : (w_n), de limite 2) ;
> - **non majorée**, elle tend vers $+\infty$ (exemple : $\left(n^2\right)$).
>
> Avant de conclure, cherche donc toujours un majorant.

Méthode : Coin examen : conclure à la convergence

Rédaction attendue, en une phrase qui **nomme le critère** :

> La suite (V_n) est croissante et majorée par 120, donc elle est convergente.

Ce critère nommé est demandé dans 13 des 15 sujets consultés ; le barème constaté pour cette phrase est de $0{,}25$ point. Ne la saute pas, même si elle te paraît évidente.

Limite de la suite f(u$_n$) avec f continue

La limite traverse une fonction continue

Si j_n se rapproche de 4, alors $\sqrt{j_n}$ se rapproche de $\sqrt{4} = 2$. Pourquoi ? Parce que la fonction racine carrée est **continue** en 4 : quand x bouge peu autour de 4, $\sqrt{x}$ bouge peu autour de 2.

Théorème : Limite de (f(u$_n$)) par continuité

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, et (u_n) une suite de termes de I qui converge vers un réel a de I.

Si f est continue en a, alors la suite $\left(f(u_n)\right)$ converge vers $f(a)$.

Exemple : Limite d'une image (guidé)

Soit $j_n = 4 + \dfrac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $f : x \mapsto \sqrt{x}$, définie sur $I = [0, +\infty[$.

1. **Hypothèses** : les termes j_n sont dans I, et $\lim\limits_{n \to +\infty} j_n = 4$, avec $4 \in I$.
2. **Continuité** : la racine carrée est continue en 4.
3. **Conclusion** : $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{j_n} = \sqrt{4} = 2$.

À toi

> **À toi : L'image d'une suite convergente**
>
> La suite (i_n) a tous ses termes positifs et converge vers 3. Vers quoi converge la suite $\left(\dfrac{i_n^2 + 1}{i_n + 1}\right)$?

A. 1

Faux.
Cette valeur ne vient d'aucun calcul valide : c'est le rapport des coefficients de i_n^2 et de i_n, ou une simplification interdite dans une somme. La règle des termes de plus haut degré vaut quand la variable tend vers $+\infty$, pas vers 3. Calcule plutôt l'image de la limite.

B. 3, comme la suite (i_n)

Faux.
La suite image n'a aucune raison d'avoir la même limite : elle tend vers l'image de 3.

C. On ne peut pas savoir sans l'expression de i_n.

Faux.
Le théorème suffit : seules comptent la limite de (i_n) et la continuité de la fonction.

D. $\dfrac{5}{2}$

Juste.
La fonction $x \mapsto \dfrac{x^2+1}{x+1}$ est continue en 3, donc la limite vaut son image en 3 : $\dfrac{10}{4} = \dfrac{5}{2}$.

Indice 1

Pose $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x+1}$: la suite étudiée est $(f(i_n))$.

Correction

Soit f la fonction définie sur $I = [0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x+1}$. Elle y est continue : c'est un quotient de polynômes dont le dénominateur ne s'annule pas sur I.

Les termes i_n sont dans I, et leur limite 3 aussi. Comme f est continue en 3 :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} f(i_n) &= f(3) \\ &= \frac{9+1}{3+1} = \frac{5}{2}.\end{aligned}$$

Conclusion. La suite $\left(\dfrac{i_n^2+1}{i_n+1}\right)$ converge vers $\dfrac{5}{2}$.

Remarque : Pourquoi ce théorème compte

C'est le moteur du dernier grand résultat du chapitre. Supposons $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec (u_n) convergente vers ℓ, et f continue en ℓ. D'un côté, (u_{n+1}) tend vers ℓ. De l'autre, $(f(u_n))$ tend vers $f(\ell)$. D'où $f(\ell) = \ell$.

Suites récurrentes : encadrer et trouver le sens

Une suite qui se construit pas à pas

- -

Soit f la fonction définie sur $\left[-\frac{3}{2}, +\infty\right[$ par $f(x) = \sqrt{2x+3}$, et la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Premiers termes : $u_1 = \sqrt{3} \approx 1{,}73$, puis $u_2 = \sqrt{2\sqrt{3}+3} \approx 2{,}54$, puis $u_3 \approx 2{,}84$.

Devine : Vers où va la suite ?

La figure qui suit trace la courbe de f et la droite $y = x$. D'après les premiers termes, vers quel nombre la suite semble-t-elle aller ?

A. Vers $+\infty$: chaque terme est plus grand que le précédent.

Faux.
Les hausses diminuent vite : environ $1{,}73$, puis $0{,}81$, puis $0{,}30$. Mais des hausses qui diminuent ne prouvent rien : seul un majorant tranchera, c'est l'objet de cette section.

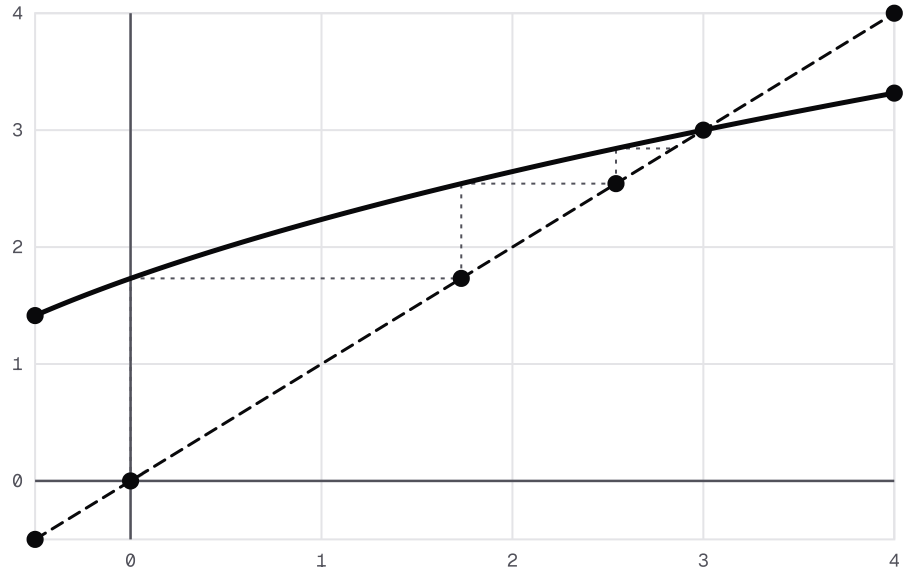
B. Vers 3, l'abscisse du point où la courbe coupe la droite $y = x$.

Juste.
En 3, $f(3) = \sqrt{9} = 3$: si un terme valait exactement 3, tous les suivants vaudraient 3. Que la suite s'en approche, et qu'elle converge, reste à **démontrer**.

C. Vers $\sqrt{3}$, son premier terme non nul.

Faux.
u_2 et u_3 dépassent déjà $\sqrt{3}$.

Correction
Les termes semblent monter vers 3, où $f(3) = 3$. Une impression n'est pas une preuve. La suite de cette section construit la preuve en trois temps : stabilité, encadrement, sens de variation. La section suivante calcule la limite.



Escalier des premiers termes de $u_{n+1} = \sqrt{(2u_n + 3)}$ avec $u_0 = 0$: on monte jusqu'à la courbe de f, puis on revient horizontalement sur la droite y = x pour lire le terme suivant. Les termes 0 ; 1,73 ; 2,54 ; 2,84 s'approchent du point (3, 3).

Un intervalle dont on ne sort pas

Pour encadrer la suite, on cherche un intervalle I qui contient u_0 et que f envoie dans lui-même : $f(I) \subset I$. Une fois dans I, les termes n'en sortent plus. On dit que I est **stable** par f. Au bac, on refait la récurrence de l'encadrement : c'est elle qui est notée.

Propriété : Intervalle stable et termes d'une suite récurrente

Soit f une fonction définie sur un intervalle I tel que $f(I) \subset I$ (on dit que I est **stable** par f), et (u_n) la suite définie par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Alors $u_n \in I$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; en particulier, la suite (u_n) est bien définie.

Exemple : L'intervalle [0, 3] est stable par f (guidé)

1. **Variations** : f est continue et strictement croissante sur $[0, 3]$, comme composée de $x \mapsto 2x + 3$ et de la racine carrée.
2. **Image** : $f(0) = \sqrt{3}$ et $f(3) = \sqrt{9} = 3$. Donc $f([0, 3]) = [\sqrt{3}, 3]$.
3. **Inclusion** : $\sqrt{3} \geq 0$, donc $[\sqrt{3}, 3] \subset [0, 3]$. L'intervalle $[0, 3]$ est stable par f, et $u_0 = 0$ lui appartient.

Encadrer par récurrence

Vérifie : Le bon argument

On veut montrer que $0 \leq u_n \leq 3$ pour tout n. Dans l'hérédité, on passe de $0 \leq u_n \leq 3$ à $f(0) \leq f(u_n) \leq f(3)$. Quel argument autorise ce passage ?

A. f est croissante sur $[0, 3]$.

Juste.
Une fonction croissante conserve l'ordre : si $a \leq b$, alors $f(a) \leq f(b)$.

B. f est continue sur $[0, 3]$.

Faux.
La continuité ne conserve pas l'ordre. $x \mapsto -x$ est continue, et pourtant elle le renverse.

C. $f(3) = 3$.

Faux.
Ce calcul sert juste après, pour écrire $u_{n+1} \leq 3$. Il ne justifie pas le passage.

D. $u_0 = 0$.

Faux.
C'est l'initialisation. Dans l'hérédité, on part de u_n, pour un entier n fixé.

Correction
C'est la **croissance** de f sur $[0, 3]$: 0, u_n et 3 sont dans $[0, 3]$, donc l'ordre est conservé. Avec une fonction décroissante, les inégalités seraient renversées. Écris toujours cet argument : il fait partie de la rédaction.

Exemple : Rédaction modèle : encadrement

Montrons que $0 \leq u_n \leq 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. **Initialisation** : $u_0 = 0$, donc $0 \leq u_0 \leq 3$.
2. **Hérédité** : on fixe un entier n tel que $0 \leq u_n \leq 3$. Comme f est croissante sur $[0, 3]$, $f(0) \leq f(u_n) \leq f(3)$, soit $\sqrt{3} \leq u_{n+1} \leq 3$. Donc $0 \leq u_{n+1} \leq 3$: la propriété est vraie au rang $n + 1$.
3. **Conclusion** : $0 \leq u_n \leq 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Le sens de variation

Méthode : Deux chemins vers la monotonie

- **Par le signe de $f(x) - x$** : $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$. Si $u_n \in I$ pour tout n (intervalle stable, ou encadrement prouvé) et si $f(x) - x \geq 0$ pour tout $x \in I$, la suite est croissante ; si $f(x) - x \leq 0$ sur I, elle est décroissante. Dans au moins 5 des 9 parties de problème consultées, ce signe est établi plus haut dans le problème.

- **Par récurrence** : on démontre $u_n \leq u_{n+1}$ (ou $u_n \geq u_{n+1}$) pour tout n, grâce à la croissance de f.

Exemple : Le signe de f(x) – x (guidé)

Pour $x \in [0,3]$, on multiplie et on divise par la quantité conjuguée $\sqrt{2x+3}+x$, strictement positive :

$$\begin{aligned} f(x)-x &= \frac{(2x+3)-x^2}{\sqrt{2x+3}+x} \\ &= \frac{(3-x)(x+1)}{\sqrt{2x+3}+x}. \end{aligned}$$

Sur $[0,3]$: $3-x \geq 0$, $x+1>0$ et $\sqrt{2x+3}+x>0$. Donc $f(x)-x \geq 0$.

Comme $u_n \in [0,3]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1}-u_n = f(u_n)-u_n \geq 0$: la suite est **croissante**.

Propriété : Monotonie d'une suite récurrente lorsque f est croissante

Soit f une fonction **croissante** sur un intervalle I tel que $f(I) \subset I$, et (u_n) la suite définie par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

- Si $u_0 \leq u_1$, la suite (u_n) est croissante.
- Si $u_0 \geq u_1$, la suite (u_n) est décroissante.

En clair. Si f est croissante sur un intervalle stable, la suite est monotone. La comparaison de u_0 et u_1 décide du sens. Ici, $u_0 = 0 \leq \sqrt{3} = u_1$: la suite est croissante. Certains professeurs demandent de refaire la récurrence à chaque fois : c'est le chemin le plus sûr.

Exemple : Rédaction modèle : monotonie par récurrence

Montrons que $u_n \leq u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. **Initialisation** : $u_0 = 0$ et $u_1 = \sqrt{3}$, donc $u_0 \leq u_1$.
2. **Hérédité** : on fixe un entier n tel que $u_n \leq u_{n+1}$. Ces deux termes sont dans $[0,3]$, où f est croissante, donc $f(u_n) \leq f(u_{n+1})$, soit $u_{n+1} \leq u_{n+2}$: la propriété est vraie au rang $n+1$.
3. **Conclusion** : $u_n \leq u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$: la suite (u_n) est croissante.

Vérifie : Ce qu'il faut pour converger

La suite (u_n) est croissante. Pour en déduire qu'elle converge, quelle information est indispensable ?

A. $u_n \geq 0$ pour tout n.

Faux.

Un plancher n'arrête pas une suite qui monte. Pour une suite croissante, il faut un **plafond**.

B. $f(3) = 3$.

Faux.

Ce fait servira à trouver la limite, **après**. Seul, il ne prouve pas la convergence.

C. f est continue sur $[0, 3]$.

Faux.

La continuité sert à identifier la limite, pas à prouver qu'elle existe.

D. $u_n \leq 3$ pour tout n.

Juste.

Croissante et majorée par 3 : le critère des suites monotones s'applique.

Correction

Pour une suite croissante, le critère des suites monotones exige un **majorant**. L'encadrement donne $u_n \leq 3$. Donc (u_n) est croissante et majorée par 3 : elle converge.

Et si la suite descend ?

À toi : Une suite qui descend vers 3

Même fonction $f(x) = \sqrt{2x+3}$, mais un autre départ : $x_0 = 5$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montre que $3 \leq x_n \leq 5$ pour tout n, puis que (x_n) est décroissante, et conclus sur sa convergence.

Indice 1

Encadrement : f est croissante sur $[3, 5]$, avec $f(3) = 3$ et $f(5) = \sqrt{13}$. Où se trouve $\sqrt{13}$?

Indice 2

Monotonie : reprends la forme factorisée de $f(x) - x$ vue plus haut. Quel est son signe quand $3 \leq x \leq 5$?

Indice 3

Une suite décroissante a besoin d'un **plancher** pour converger : lequel as-tu prouvé ?

Réponse

Encadrement. Montrons par récurrence que $3 \leq x_n \leq 5$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : $x_0 = 5$, donc $3 \leq x_0 \leq 5$.

Hérédité : on fixe un entier n tel que $3 \leq x_n \leq 5$. Comme f est croissante sur $[3, 5]$, $f(3) \leq f(x_n) \leq f(5)$, soit $3 \leq x_{n+1} \leq \sqrt{13}$. Or $\sqrt{13} \leq 5$, donc $3 \leq x_{n+1} \leq 5$: la propriété est vraie au rang $n+1$.

Conclusion : $3 \leq x_n \leq 5$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Monotonie. Pour $x \in [3, 5]$, $3 - x \leq 0$, donc :

$$f(x) - x = \frac{(3-x)(x+1)}{\sqrt{2x+3}+x} \leq 0.$$

Comme $x_n \in [3,5]$, $x_{n+1} - x_n = f(x_n) - x_n \leq 0$: la suite est **décroissante**.

Convergence. (x_n) est décroissante et minorée par 3, donc elle est convergente.

Limite. Les hypothèses de la propriété du point fixe sont réunies : f est continue sur l'intervalle **fermé** $I = [3,5]$, $f(I) = [3, \sqrt{13}] \subset I$, $x_0 \in I$, et (x_n) converge. Sa limite ℓ vérifie donc $\ell \in I$ et $f(\ell) = \ell$. Sur $[3,5]$, $f(x) - x$ ne s'annule qu'en $x = 3$: donc $\ell = 3$.

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3 \leq x_n \leq 5$; la suite (x_n) est décroissante et converge vers 3.

Stable ne veut pas dire bornée

Attention : Un intervalle stable peut être infini

Prends $g : x \mapsto x^2$ sur $I = [2, +\infty[$, et la suite définie par $z_0 = 2$ et $z_{n+1} = g(z_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. L'intervalle est fermé, g est continue et croissante, et $g(I) \subset I$. Pourtant $z_1 = 4$, $z_2 = 16$, $z_3 = 256$: la suite tend vers $+\infty$. Un intervalle stable ne majore la suite que s'il est **borné du côté utile**.

Suites récurrentes : trouver la limite

Passer à la limite dans la relation

La suite converge : bonne nouvelle. Mais vers quoi ? On passe à la limite dans $u_{n+1} = f(u_n)$. À gauche, u_{n+1} tend vers ℓ. À droite, $f(u_n)$ tend vers $f(\ell)$, si f est continue. D'où l'équation $f(\ell) = \ell$. C'est la **propriété du point fixe** : **si** la suite converge, alors sa limite est solution de $f(x) = x$.

Théorème : Limite d'une suite récurrente convergente

Soit f une fonction **continue** sur un intervalle **fermé** I (par exemple $[a,b]$ ou $[a,+\infty[$) tel que $f(I) \subset I$, et (u_n) la suite définie par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Si (u_n) **converge** vers un réel ℓ, alors $\ell \in I$ et $f(\ell) = \ell$.

La convergence est une **hypothèse** : l'équation $f(x) = x$ ne prouve pas, à elle seule, que la suite converge.

À retenir : Les hypothèses, une par une

Avant d'écrire $f(\ell) = \ell$, vérifie et **cite** :

1. (u_n) **converge**, et c'est déjà démontré ;
2. f est **continue** sur I ;

3. I est un intervalle **fermé** ;
4. $f(I) \subset I$;
5. $u_0 \in I$.

L'équation $f(x) = x$ vient en dernier, jamais en premier.

Exemple : La limite de la suite (guidé)

Pour $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$:

1. **Convergence** : (u_n) est croissante et majorée par 3, donc elle converge vers un réel ℓ.
2. **Hypothèses** : f est continue sur l'intervalle fermé $I = [0, 3]$, $f(I) \subset I$ et $u_0 \in I$. Donc $\ell \in [0, 3]$ et $f(\ell) = \ell$.
3. **Équation** : $\sqrt{2\ell + 3} = \ell$ entraîne $2\ell + 3 = \ell^2$, soit $(\ell - 3)(\ell + 1) = 0$.
4. **Tri** : -1 n'est pas dans $[0, 3]$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 3$.

Choisir la bonne solution

À toi : Deux candidates, une limite

Soit $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = \dfrac{v_n^2 + 6}{5}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pose $f(x) = \dfrac{x^2 + 6}{5}$. On a montré que $I = [1, 2]$ est stable par f, que $1 \leq v_n \leq 2$ et que (v_n) est croissante. Que vaut $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$?

A. 3, la plus grande solution de $f(x) = x$.

Faux.
3 n'est pas dans $I = [1, 2]$: or la limite y appartient.

B. 2

Juste.
f est continue sur l'intervalle fermé $[1, 2]$, stable, et $v_0 \in I$. La limite est une solution de $f(x) = x$ située dans $[1, 2]$: c'est 2.

C. 2 ou 3 : on ne peut pas trancher.

Faux.
On peut trancher : la limite appartient à $I = [1, 2]$.

D. 1, car $v_0 = 1$.

Faux.
La suite est croissante et $v_1 = \dfrac{7}{5} > 1$: elle s'éloigne de 1. D'ailleurs $f(1) \neq 1$.

Indice 1
Commence par la convergence : quel critère s'applique à (v_n) ?

Indice 2

Résous $\dfrac{x^2+6}{5} = x$, puis regarde quelles solutions sont dans I.

Correction

La suite est croissante et majorée par 2, donc elle converge vers un réel ℓ. f est continue sur l'intervalle fermé $I=[1,2]$, $f(I)\subset I$ et $v_0 \in I$: donc $\ell \in [1,2]$ et $f(\ell)=\ell$. Or :

$$\begin{aligned} & \frac{\ell^2+6}{5} = \ell \\ \iff\ & \ell^2 - 5\ell + 6 = 0 \\ \iff\ & (\ell-2)(\ell-3) = 0. \end{aligned}$$

Seul 2 est dans $[1,2]$.

Conclusion. $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 2$.

Le piège du point fixe

Trouve l'erreur : Une limite trop vite trouvée

Soit $r_0 = 3$ et $r_{n+1} = 3r_n - 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Un élève écrit : « $3x - 4 = x$ donne $x = 2$, donc $\lim r_n = 2$. » Qu'en penses-tu ?

A. C'est juste : la limite est solution de $f(x) = x$.

Faux.

Selon la propriété du point fixe, c'est seulement quand la convergence est acquise, avec les autres hypothèses, que la limite vérifie $f(\ell) = \ell$. Ici, rien de tout cela n'a été vérifié.

B. L'équation est mal résolue : la solution est $x = 1$.

Faux.

$3 \times 2 - 4 = 2$: la solution 2 est juste. Le problème est ailleurs.

C. La convergence n'est pas prouvée, et en fait la suite diverge.

Juste.

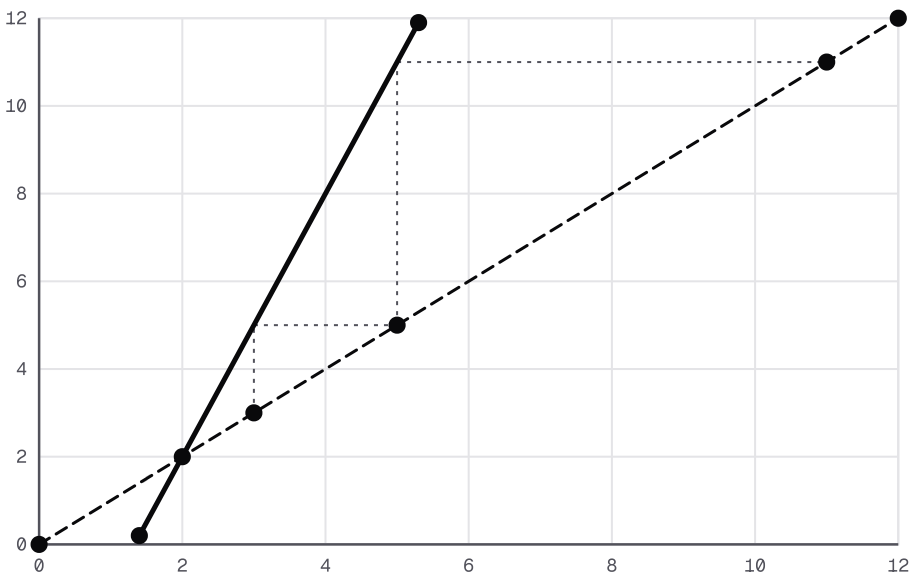
$r_1 = 5$, $r_2 = 11$, $r_3 = 29$: les termes s'éloignent de 2. En fait, $r_n = 2 + 3^n$, qui tend vers $+\infty$.

Correction

Les termes valent 3 ; 5 ; 11 ; 29… Montrons par récurrence que $r_n = 2 + 3^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. **Initialisation** : $r_0 = 3 = 2 + 3^0$.
2. **Hérédité** : on fixe un entier n tel que $r_n = 2 + 3^n$. Alors $r_{n+1} = 3(2 + 3^n) - 4 = 2 + 3^{n+1}$: la propriété est vraie au rang $n + 1$.
3. **Conclusion** : $r_n = 2 + 3^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Comme $3 > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = +\infty$. Le point fixe 2 existe, mais la suite ne converge pas : **on prouve d'abord la convergence**.



Escalier de $r_{n+1} = 3r_n - 4$ avec $r_0 = 3$: les termes 3 ; 5 ; 11 s'éloignent du point fixe (2, 2) au lieu de s'en approcher. Une solution de f(x) = x ne garantit pas la convergence.

Attention : Point fixe ne veut pas dire limite

Une solution de $f(x) = x$ n'est qu'une **candidate**. Elle devient la limite quand deux choses sont acquises : la suite converge, et les hypothèses de la propriété du point fixe sont réunies. Sans la convergence, l'équation ne prouve rien : la suite (r_n) le montre.

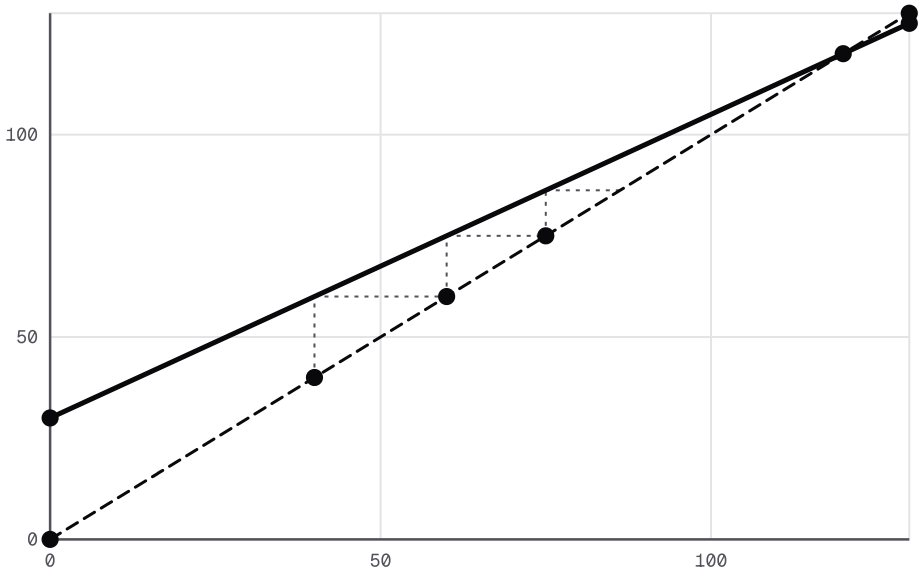
Remarque : Bonus : pourquoi un intervalle fermé ?

Prends $f : x \mapsto \dfrac{x}{3}$ sur $I =]0, 2]$. f est continue, et $f(I) = \left]0, \dfrac{2}{3}\right] \subset I$. La suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ vérifie $u_n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$: elle converge vers 0, qui n'est pas dans I. Avec un intervalle fermé, la limite ne peut pas s'échapper ainsi.

Suite auxiliaire : une formule explicite

Retour au réservoir

Le réservoir converge, mais vers quoi ? La propriété du point fixe donnerait la valeur, puisque la convergence est déjà prouvée. Il existe un chemin plus fort : trouver une **formule** pour V_n. L'idée est de mesurer l'**écart** au niveau 120.



$y = \frac{3}{4}x + 30$ $y = x$ Point plein V_0 Point plein V_1 Point plein V_2 Point plein $(120, 120)$ Point du graphe

Escalier du réservoir, $V_{n+1} = \frac{3}{4}V_n + 30$ avec $V_0 = 40$: les volumes 40 ; 60 ; 75 ; 86,25 montent vers 120, abscisse du point où la droite coupe la droite y = x.

Exemple : Une formule pour le réservoir (guidé)

On pose $D_n = V_n - 120$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Nature. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} D_{n+1} &= V_{n+1} - 120 \\ &= \frac{3}{4}V_n - 90 \\ &= \frac{3}{4}\left(V_n - 120\right) \\ &= \frac{3}{4}D_n. \end{aligned}$$

La suite (D_n) est géométrique de raison $\frac{3}{4}$, avec $D_0 = 40 - 120 = -80$.

Expression. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D_n = -80\left(\frac{3}{4}\right)^n$, donc :

$$V_n = 120 - 80\left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

Limite. $-1 < \frac{3}{4} < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 120$.

Ta prédiction du début est démontrée. Pour tout n, $V_n < 120$: le réservoir de 150 litres ne déborde jamais. Et le volume se rapproche de 120 litres, semaine après semaine.

Vérifie : Pourquoi ce nombre ?

Pourquoi a-t-on retranché 120 à V_n, et pas un autre nombre ?

A. C'est un choix arbitraire : n'importe quel nombre marcherait.

Faux.

Essaie avec 100 : $V_{n+1} - 100 = \dfrac{3}{4}V_n - 70$, alors que $\dfrac{3}{4}(V_n - 100) = \dfrac{3}{4}V_n - 75$.

B. C'est lié à la capacité du réservoir.

Faux.

La capacité est de 150 litres. Le nombre 120 vient de la relation de récurrence, pas du réservoir.

C. 120 est la solution de $\dfrac{3}{4}x + 30 = x$.

Juste.

C'est le point fixe : en le retranchant, la constante 30 disparaît du calcul de D_{n+1}.

Correction

Le nombre 120 est le point fixe de la relation :

$$\begin{aligned} \frac{3}{4}x + 30 = x &\iff \frac{1}{4}x = 30 \\ &\iff x = 120. \end{aligned}$$

En retranchant ce point fixe, on obtient $D_{n+1} = \dfrac{3}{4}D_n$: la constante disparaît. Une suite auxiliaire intervient dans 8 des 15 sujets consultés : ton travail est en général de prouver sa nature.

Une récurrence avec une fraction

Soit $H_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H_{n+1} = \dfrac{3H_n + 2}{H_n + 2}$. Par récurrence, $H_n \geq 0$ pour tout n : la suite est bien définie. L'énoncé propose la suite (Q_n) définie par $Q_n = \dfrac{H_n - 2}{H_n + 1}$.

À toi : Une suite auxiliaire géométrique

Montre que (Q_n) est géométrique, puis détermine $\lim\limits_{n \to +\infty} H_n$.

Indice 1

Calcule séparément $H_{n+1} - 2$ et $H_{n+1} + 1$, en réduisant au même dénominateur $H_n + 2$.

Indice 2

Tu dois trouver $H_{n+1} - 2 = \dfrac{H_n - 2}{H_n + 2}$ et $H_{n+1} + 1 = \dfrac{4(H_n + 1)}{H_n + 2}$. Fais le quotient.

Indice 3

Pour la limite, exprime H_n à l'aide de Q_n : de $Q_n(H_n + 1) = H_n - 2$, tire H_n.

Réponse

Nature. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H_n \geq 0$, donc $H_n + 2 > 0$, et :

$$\begin{aligned} H_{n+1}-2 &= \frac{3H_n+2-2H_n-4}{H_n+2} \\ &= \frac{H_n-2}{H_n+2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_{n+1}+1 &= \frac{4H_n+4}{H_n+2} \\ &= \frac{4(H_n+1)}{H_n+2}. \end{aligned}$$

En divisant, avec $H_n+1>0$:

$$\begin{aligned} Q_{n+1} &= \frac{H_n-2}{4(H_n+1)} \\ &= \frac{1}{4}Q_n. \end{aligned}$$

(Q_n) est géométrique de raison $\frac{1}{4}$, avec $Q_0=\frac{0-2}{0+1}=-2$. Donc $Q_n=-2\left(\frac{1}{4}\right)^n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Expression. $Q_n(H_n+1)=H_n-2$ s'écrit $H_n(1-Q_n)=2+Q_n$. Or $Q_n<0$, donc $1-Q_n\neq 0$ et :

$$H_n=\frac{2+Q_n}{1-Q_n}.$$

Limite. $-1<\frac{1}{4}<1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}Q_n=0$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty}H_n=\frac{2+0}{1-0}=2$.

Conclusion. (Q_n) est géométrique de raison $\frac{1}{4}$, et (H_n) converge vers 2.

Vérifie sur les premiers termes. $H_1=1$, $H_2=\frac{5}{3}$, $H_3=\frac{21}{11}\approx 1{,}91$: les termes s'approchent bien de 2.

La formule le confirme : $Q_1=-\frac{1}{2}$ donne $H_1=\frac{2-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=1$.

Quand l'auxiliaire est arithmétique

À toi : Quelle nature ?

Soit $A_0=1$ et $A_{n+1}=\frac{A_n}{A_n+1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$; tous les termes sont strictement positifs. On pose $B_n=\frac{1}{A_n}$. Quelle est la nature de (B_n) ?

A. Arithmétique de raison 1.

Juste.

$B_{n+1}=\frac{A_n+1}{A_n}=1+\frac{1}{A_n}=B_n+1$.

B. Géométrique de raison $\frac{1}{2}$, car $A_1=\frac{1}{2}$.

Faux.

Un seul quotient ne suffit pas : $A_2=\frac{1}{3}$, et $\frac{A_2}{A_1}=\frac{2}{3}$. Le quotient change.

C. Géométrique de raison $\dfrac{A_n+1}{A_n}$.

Faux.
Une raison est un **nombre fixe**, pas une expression qui dépend de n.

D. Ni arithmétique ni géométrique.

Faux.
Calcule $B_{n+1}-B_n$: il vaut toujours 1.

Indice 1
Écris $B_{n+1}=\dfrac{1}{A_{n+1}}$, puis remplace A_{n+1} par son expression.

Correction
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $A_n>0$, donc :

$$\begin{aligned}B_{n+1}&=\frac{1}{A_{n+1}}=\frac{A_n+1}{A_n}\\&=1+\frac{1}{A_n}=B_n+1.\end{aligned}$$

(B_n) est arithmétique de raison 1, avec $B_0=1$. Donc $B_n=n+1$ et $A_n=\dfrac{1}{n+1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
On en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty}A_n=0$.

Méthode : utiliser une suite auxiliaire

1. **Nature** : calcule le terme suivant de la suite auxiliaire, puis réécris-le avec la suite auxiliaire elle-même. Tu dois voir apparaître une multiplication par q, ou une addition de r.
2. **Expression** : écris la suite auxiliaire en fonction de n, avec son premier terme.
3. **Retour** : exprime la suite de départ à l'aide de la suite auxiliaire, donc de n.
4. **Limite** : conclus avec la limite de (q^n), ou celle d'une suite arithmétique.

Au bac : la partie sur les suites, rédigée

Ce qui est demandé

Les suites sont présentes dans les 15 sujets de bac consultés par BURHAN. Dans 9 des 15 sujets consultés, elles forment une partie du problème d'étude de fonction, sous la forme $u_{n+1}=f(u_n)$. Quatre questions y reviennent, dans cet ordre. Chacune se rédige d'une façon que les barèmes reconnaissent.

Question 1 : encadrer

Méthode : Question 1 : encadrement par récurrence

Squelette à recopier, puis à remplir, pour $I=[a,b]$ et f croissante sur I :

> **Initialisation** : $u_0 = \ldots$, donc $a \leq u_0 \leq b$.
>
> **Hérédité** : on fixe un entier n tel que $a \leq u_n \leq b$. Comme f est croissante sur $[a, b]$, $f(a) \leq f(u_n) \leq f(b)$, soit $f(a) \leq u_{n+1} \leq f(b)$. Or $f(a) \geq a$ et $f(b) \leq b$, donc $a \leq u_{n+1} \leq b$: la propriété est vraie au rang $n + 1$.
>
> **Conclusion** : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a \leq u_n \leq b$.

Cette question figure dans les 15 sujets consultés, pour $0{,}5$ à $0{,}75$ point. Dans deux barèmes, initialisation et hérédité sont notées séparément.

Question 2 : le sens de variation

Méthode : Question 2 : sens de variation

> Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$. Or $u_n \in I$, et $f(x) - x \geq 0$ pour tout $x \in I$. Donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$: la suite (u_n) est croissante.

Cas décroissant : si $f(x) - x \leq 0$ pour tout $x \in I$, la même phrase donne $u_{n+1} - u_n \leq 0$: la suite est décroissante.

Le signe de $f(x) - x$, ou la position de la courbe par rapport à la droite $y = x$, est établi plus haut dans le problème dans au moins 5 des 9 parties consultées : **réutilise-le**. Barème constaté : $0{,}25$ à $0{,}5$ point.

Question 3 : la convergence

Méthode : Question 3 : convergence

> La suite (u_n) est croissante et majorée par b, donc elle est convergente.

Cas décroissant :

> La suite (u_n) est décroissante et minorée par a, donc elle est convergente.

Nomme le critère : il est demandé dans 13 des 15 sujets consultés, pour $0{,}25$ point dans les barèmes constatés.

Question 4 : la limite

Méthode : Question 4 : la limite, hypothèses d'abord

> On pose $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$. La fonction f est continue sur l'intervalle fermé $I = [a, b]$, $f(I) \subset I$, $u_0 \in I$, et (u_n) est convergente. Donc $\ell \in I$ et $f(\ell) = \ell$.

Résous ensuite $f(x) = x$ dans I, et garde la solution qui convient. Dans 4 des 7 barèmes consultés pour ces parties, les hypothèses sont notées **à part** de l'équation : cite-les une par une.

Trouve l'erreur dans une copie

Trouve l'erreur : Une copie presque complète

Extrait d'une copie, pour $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$:

> (u_n) est croissante et majorée par 3, donc elle converge. L'équation $\sqrt{2x+3} = x$ a pour seule solution $x = 3$. Donc $\lim u_n = 3$.

La limite est juste. Que manque-t-il pour obtenir tous les points ?

A. Une démonstration par récurrence de la convergence.

Faux.
La convergence découle du critère des suites monotones : aucune récurrence de plus n'est attendue ici.

B. Les hypothèses : f continue sur l'intervalle fermé $[0, 3]$, stable par f, et u_0 dedans.

Juste.
Sans elles, rien n'autorise à dire que la limite est solution de $f(x) = x$. Dans 4 des 7 barèmes consultés pour ces parties, elles sont notées à part.

C. La seconde solution $x = -1$ de l'équation.

Faux.
-1 n'est pas solution : $\sqrt{2 \times (-1) + 3} = 1 \neq -1$. Elle n'apparaît qu'après élévation au carré.

D. Le calcul de u_1, u_2 et u_3.

Faux.
Les premiers termes aident à deviner, pas à démontrer. Ils ne sont pas demandés ici.

Correction

Il manque la phrase qui autorise l'équation :

> f est continue sur l'intervalle fermé $I = [0, 3]$, $f(I) \subset I$ et $u_0 \in I$. Comme (u_n) converge vers ℓ, on a $\ell \in I$ et $f(\ell) = \ell$.

Ensuite seulement, on résout l'équation et on trouve $\ell = 3$.

À retenir : Le mot du prof

> Encadrer, trouver le sens, prouver la convergence, calculer la limite : quatre questions, quatre rédactions. Tu sais maintenant les écrire. Au bac, la fonction f changera : dans 8 des 9 parties de problème consultées, c'est une fonction que tu étudieras plus tard dans l'année. La rédaction, elle, restera la même.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Suites numériques » (2bac · sciences-experimentales · mathematiques)