BURHAN

Nombres complexes : fiche de révision

2ème Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-experimentales/mathematiques/nombres-complexes/resume

Chapitre	Semestre
Nombres complexes	Semestre 1

L'essentiel du chapitre

À retenir : Cinq réflexes

- **Un argument, seulement pour un nombre non nul.** Le nombre 0 a un module, $|0| = 0$, mais aucun argument.
- **Forme algébrique pour additionner, forme exponentielle pour multiplier.** Dans un produit, les modules se multiplient et les arguments s'ajoutent (nombres non nuls).
- **Un quotient se simplifie** grâce au conjugué du dénominateur.
- **En géométrie, tout passe par le quotient** $\dfrac{c-a}{b-a}$: son module compare deux longueurs, son argument mesure un angle.
- **Une rotation s'écrit avec son centre** : $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$.

Choisis la forme qui rend le calcul court.

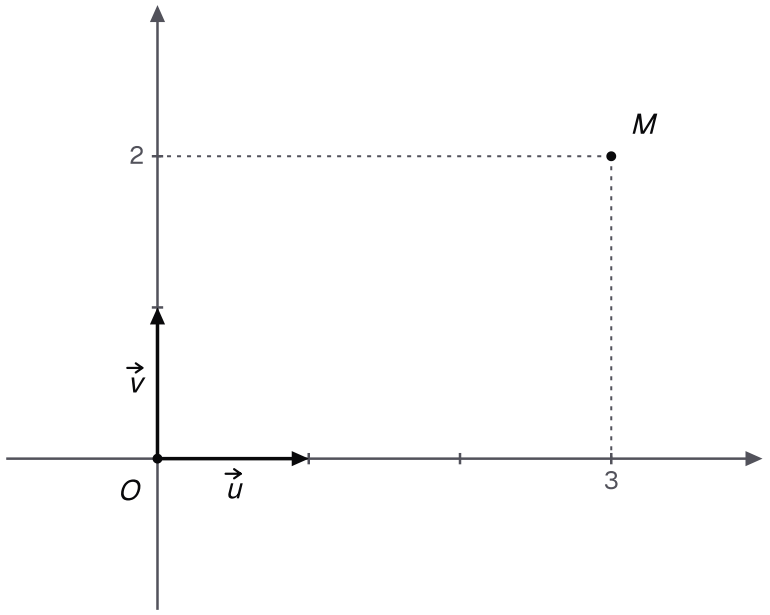
Calcul demandé	Forme commode
somme, différence	algébrique $a + ib$
produit, quotient	exponentielle, ou algébrique avec le conjugué
puissance z^n	exponentielle, avec la formule de Moivre
distance, milieu	algébrique, puis le module
angle, rotation	exponentielle

Forme algébrique et calculs

À retenir : Les bases

- Le nombre i vérifie $i^2 = -1$.
- Tout nombre complexe s'écrit d'une seule façon $z = a + ib$, avec a et b **réels** : $a = \mathrm{Re}(z)$ et $b = \mathrm{Im}(z)$.
- Pour a, b, a', b' réels, l'égalité $a + ib = a' + ib'$ revient à $a = a'$ **et** $b = b'$.
- z est réel si et seulement si $\mathrm{Im}(z) = 0$; il est imaginaire pur si et seulement si $\mathrm{Re}(z) = 0$.

- Dans le repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, le point $M(a;b)$ a pour affixe $z = a + ib$.



Un point M du plan et ses deux nombres : a se lit sur l'axe réel, b sur l'axe imaginaire, et M a pour affixe a + ib.

Conjugué de a + ib

$$\overline{a + ib} = a - ib$$

Conjugué d'une somme, d'un produit

$$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$$
$$\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$$

Module de a + ib

$$|a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Produit par le conjugué

$$z\,\overline{z} = |z|^2$$

Module d'un produit, d'un quotient (z′ non nul)

$$|zz'| = |z|\,|z'|$$
$$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$$

Puissances de i

$$i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1$$

Définition : Module d'un nombre complexe

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe, avec a et b réels, et M son image. Le **module** de z est le réel positif

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = OM.$$

De plus, $z\,\overline{z} = a^2 + b^2$, donc $|z|^2 = z\,\overline{z}$.

Propriété : Inverse et quotient sous forme algébrique

Tout nombre complexe z non nul a un **inverse** :

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2},$$

soit, pour $z = a + ib$:

$$\frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}.$$

Pour tout nombre complexe z', le quotient $\dfrac{z'}{z}$ s'écrit $\dfrac{z'\overline{z}}{|z|^2}$: on multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur.

Méthode : un quotient sous la forme a + ib

1. **Repère le dénominateur** z et écris son conjugué $\overline{z}$.
2. **Multiplie en haut et en bas** par $\overline{z}$: en bas, tu obtiens le réel $|z|^2$.
3. **Développe le haut** en remplaçant i^2 par -1.
4. **Range** : partie réelle d'un côté, partie imaginaire de l'autre.

Exemple : quatre calculs express

Avec $z = 4 + 3i$ et $z' = 1 - 2i$:

- produit : $zz' = 4 - 8i + 3i - 6i^2 = 10 - 5i$;
- module : $|z| = \sqrt{16+9} = 5$, et $z\overline{z} = (4+3i)(4-3i) = 25$;
- puissance de i : $2026 = 4 \times 506 + 2$, donc $i^{2026} = i^2 = -1$;
- quotient, avec le conjugué $1 + 2i$ du dénominateur :

$$\begin{aligned}\frac{7+i}{1-2i} &= \frac{(7+i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} \\ &= \frac{7+14i+i+2i^2}{1+4} \\ &= \frac{5+15i}{5} = 1+3i.\end{aligned}$$

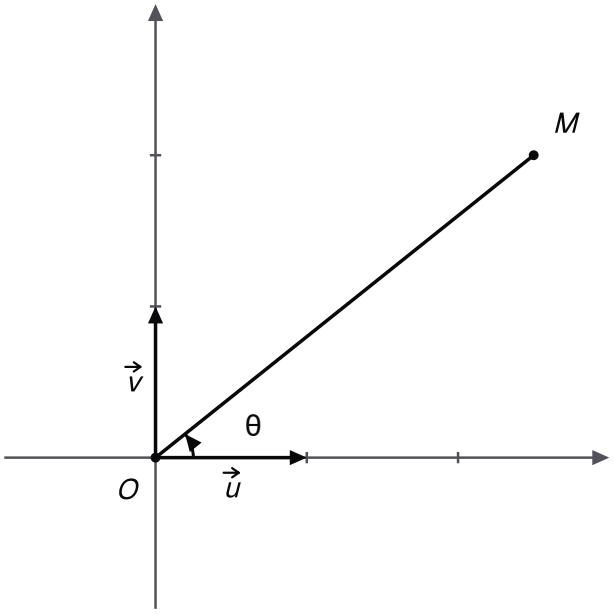
Module, argument, formes trigonométrique et exponentielle

Définition : Argument d'un nombre complexe non nul

Soit z un nombre complexe **non nul** et M son image. On appelle **argument** de z toute mesure, en radians, de l'angle orienté $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM}\right)$. On note $\arg z$ l'un d'eux.

Si θ est un argument de z, les arguments de z sont les réels $\theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; on écrit $\arg z \equiv \theta \ [2\pi]$.

Le nombre 0 n'a **pas** d'argument.



L'argument θ de z est la mesure de l'angle orienté qui va du vecteur u au vecteur OM ; la distance OM est le module.

Les valeurs à connaître par cœur :

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

Pour $-\theta$: même cosinus, sinus opposé. Pour $\pi - \theta$: cosinus opposé, même sinus.

Propriété : Forme trigonométrique

Tout nombre complexe z non nul s'écrit

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta),$$

avec $r = |z|$ et $\arg z \equiv \theta\ [2\pi]$.

C'est une **forme trigonométrique** de z. Si $z = a + ib$, avec a et b réels, alors $a = r\cos\theta$, $b = r\sin\theta$, $\cos\theta = \frac{a}{r}$ et $\sin\theta = \frac{b}{r}$.

Réciproquement, si $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $r > 0$ et θ réel, alors $|z| = r$ et $\arg z \equiv \theta\ [2\pi]$.

Méthode : de a + ib à la forme trigonométrique

1. **Le module d'abord** : $r = \sqrt{a^2 + b^2}$; comme z est non nul, $r > 0$.
2. **Factorise par** r : $z = r\left(\frac{a}{r} + i\,\frac{b}{r}\right)$.
3. **Reconnais l'angle** : il te faut θ avec $\cos\theta = \frac{a}{r}$ **et** $\sin\theta = \frac{b}{r}$. Une seule de ces égalités ne suffit pas.

4. **Écris** $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, ou $z = re^{i\theta}$.

Exemple : le nombre √3 – i

$r = \sqrt{3+1} = 2$, donc $\sqrt{3} - i = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\,i\right)$.

Le cosinus cherché vaut $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et le sinus $-\dfrac{1}{2}$: l'angle $-\dfrac{\pi}{6}$ convient. Ainsi

$$\begin{aligned}\sqrt{3} - i &= 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)\\ &= 2e^{-i\pi/6}.\end{aligned}$$

Donc $|\sqrt{3} - i| = 2$ et $\arg(\sqrt{3} - i) \equiv -\dfrac{\pi}{6}\ [2\pi]$.

Définition : Notation exponentielle

Pour tout réel θ, on **note**

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

Tout nombre complexe z non nul s'écrit alors $z = re^{i\theta}$, avec $r = |z|$ et $\arg z \equiv \theta\ [2\pi]$: c'est une **forme exponentielle** de z. Réciproquement, si $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$, alors $|z| = r$ et $\arg z \equiv \theta\ [2\pi]$.

Propriété : Argument d'un produit, d'un inverse, d'un quotient, d'une puissance

Pour tous nombres complexes z et z' **non nuls** et tout entier relatif n :

- $\arg(zz') \equiv \arg z + \arg z'\ [2\pi]$;
- $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) \equiv -\arg z\ [2\pi]$ et $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) \equiv \arg z - \arg z'\ [2\pi]$;
- $\arg(z^n) \equiv n\arg z\ [2\pi]$;
- $\arg\overline{z} \equiv -\arg z\ [2\pi]$ et $\arg(-z) \equiv \pi + \arg z\ [2\pi]$.

Produit

$$\begin{aligned}re^{i\theta} \times r'e^{i\theta'}\\ = rr'\,e^{i(\theta+\theta')}\end{aligned}$$

Quotient (r' > 0)

$$\frac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'}\,e^{i(\theta-\theta')}$$

Conjugué et opposé

$$\begin{aligned}\overline{re^{i\theta}} &= re^{-i\theta}\\ -re^{i\theta} &= re^{i(\theta+\pi)}\end{aligned}$$

Valeurs remarquables

$$\begin{aligned}e^{i\pi/2} &= i\\ e^{i\pi} &= -1\\ e^{-i\pi/2} &= -i\end{aligned}$$

Exemple : produit, quotient, retour à a + ib

Avec $z_1 = 2e^{i\pi/4}$ et $z_2 = 3e^{i\pi/6}$.

Produit : les modules se multiplient, les angles s'ajoutent.

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= 6e^{i(\pi/4+\pi/6)} \\ &= 6e^{5i\pi/12}. \end{aligned}$$

Quotient : les modules se divisent, les angles se soustraient.

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{2}{3}\, e^{i(\pi/4-\pi/6)} \\ &= \frac{2}{3}\, e^{i\pi/12}. \end{aligned}$$

Retour à la forme algébrique :

$$\begin{aligned} 4e^{2i\pi/3} &= 4\left(-\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= -2 + 2i\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Puissances et formule de Moivre

Théorème : Formule de Moivre

Pour tout réel θ et tout entier relatif n :

$$\begin{aligned} &(\cos\theta + i\sin\theta)^n \\ &= \cos(n\theta) + i\sin(n\theta). \end{aligned}$$

Méthode : calculer z^n

1. **Passe en forme exponentielle** : $z = re^{i\theta}$.
2. **Élève à la puissance** : $z^n = r^n e^{in\theta}$, grâce à la formule de Moivre.
3. **Simplifie l'angle** : retire à $n\theta$ autant de fois 2π que possible.
4. **Reviens à** $a + ib$ si la question le demande.

Exemple : la puissance sixième de √3 – i

On sait que $\sqrt{3} - i = 2e^{-i\pi/6}$. D'après la formule de Moivre :

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{3} - i\right)^6 &= 2^6\, e^{-6i\pi/6} \\ &= 64\, e^{-i\pi} = -64. \end{aligned}$$

Plus généralement, pour tout entier naturel n, $\left(\sqrt{3} - i\right)^n = 2^n e^{-in\pi/6}$. Ce nombre est réel exactement quand $\dfrac{n\pi}{6} \equiv 0\ [\pi]$, c'est-à-dire quand n est un multiple de 6.

Par exemple, $2022 = 6 \times 337$: la puissance d'exposant 2022 est réelle.

Remarque : Bonus : formules d'Euler

Ce qui suit sert à comprendre, pas à l'examen : aucun des 15 sujets consultés ne demande les formules d'Euler ni une linéarisation. Tu peux sauter ce passage.

Propriété : Formules d'Euler

Pour tout réel θ :

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2},$$
$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Exemple : Bonus : écrire sin²θ sans carré

Soit θ un réel. On remplace $\sin\theta$ par sa formule d'Euler, puis on développe avec $e^{i\theta}e^{-i\theta} = 1$:

$$\begin{aligned}\sin^2\theta &= \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)^2 \\ &= \frac{e^{2i\theta} - 2 + e^{-2i\theta}}{-4} \\ &= \frac{2 - 2\cos(2\theta)}{4} \\ &= \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}.\end{aligned}$$

Contrôle avec $\theta = \frac{\pi}{8}$, où $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$: $\sin^2\frac{\pi}{8} = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$.

Équation du second degré dans $\mathbb{C}$

Théorème : Équation du second degré à coefficients réels

Soient a, b et c des **réels**, avec $a \neq 0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$ le **discriminant** de l'équation (E) : $az^2 + bz + c = 0$, d'inconnue complexe z.

- Si $\Delta = 0$, (E) a une seule solution : $-\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$, (E) a deux solutions réelles : $\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$, (E) a deux solutions complexes non réelles et conjuguées : $\frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Dans tous les cas, si z_1 et z_2 sont les solutions (égales lorsque $\Delta = 0$), pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2).$$

Méthode : résoudre az² + bz + c = 0, coefficients réels

1. **Calcule** $\Delta = b^2 - 4ac$ et donne son signe.
2. **Si** $\Delta < 0$**, écris-le comme un carré** : $\Delta = \left(i\sqrt{-\Delta}\right)^2$. Jamais de racine carrée d'un nombre négatif.
3. **Donne les deux solutions** $\dfrac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $\dfrac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$. Elles sont conjuguées : si les tiennes ne le sont pas, cherche l'erreur.
4. **Conclus** par l'ensemble S des solutions.

Exemple : z² + 4z + 13 = 0

Discriminant.

$$\begin{aligned}\Delta &= 4^2 - 4 \times 1 \times 13 \\ &= 16 - 52 = -36.\end{aligned}$$

Ainsi $\Delta < 0$, et $-36 = (6i)^2$.

Solutions.

$$\begin{aligned}z_1 &= \frac{-4 - 6i}{2} = -2 - 3i, \\ z_2 &= \frac{-4 + 6i}{2} = -2 + 3i.\end{aligned}$$

Donc $S = \{-2 - 3i ; -2 + 3i\}$.

Contrôle.

$$\begin{aligned}&(-2 + 3i)^2 + 4(-2 + 3i) + 13 \\ &= (-5 - 12i) - 8 + 12i + 13 \\ &= 0.\end{aligned}$$

Factorisation. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z^2 + 4z + 13 = (z + 2 + 3i)(z + 2 - 3i)$.

Complexes et géométrie

Affixe du vecteur AB

$$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$$

Milieu I du segment [AB]

$$z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$$

Distance AB

$$AB = |z_B - z_A|$$

Angle avec l'axe réel, si A ≠ B

$$\left(\vec{u}, \overrightarrow{AB}\right) \equiv \arg(z_B - z_A)\ [2\pi]$$

Propriété : Angles orientés et arguments

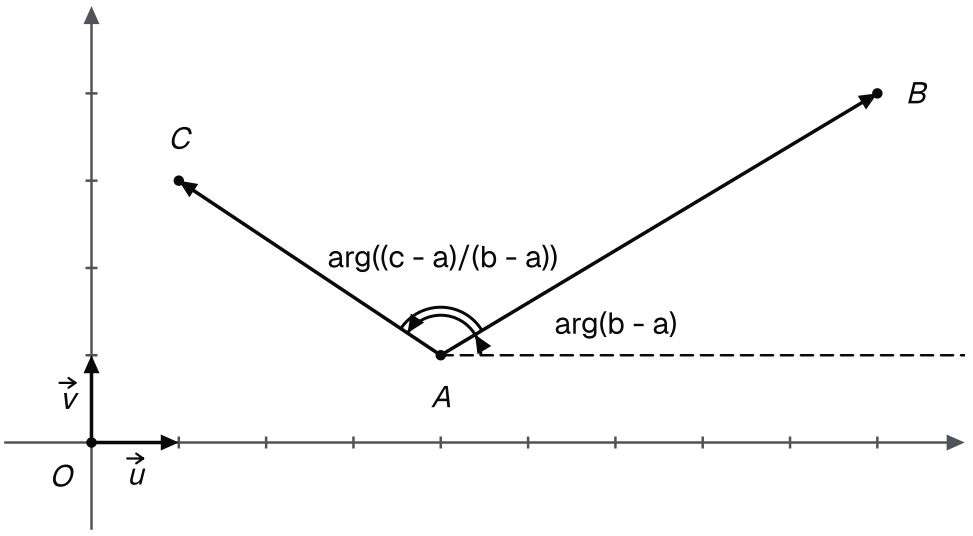
Soient A, B et C des points d'affixes a, b et c.

- Si $A \neq B$: $\left(\vec{u}, \overrightarrow{AB}\right) \equiv \arg(b-a)\ [2\pi]$.
- Si $A \neq B$ et $A \neq C$:

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)\ [2\pi]$$

et

$$\frac{AC}{AB} = \left|\frac{c-a}{b-a}\right|.$$



Deux angles orientés lus en A : de u vers AB, il vaut arg(b – a) ; de AB vers AC, il vaut l'argument du quotient.

Propriété : Alignement et orthogonalité

Soient A, B et C des points d'affixes a, b et c, avec $A \neq B$.

- A, B et C sont **alignés** si et seulement si $\frac{c-a}{b-a}$ est réel.
- Si de plus $C \neq A$: les droites (AB) et (AC) sont **perpendiculaires** si et seulement si $\frac{c-a}{b-a}$ est imaginaire pur.

Pour trois points A, B, C distincts d'affixes a, b, c, pose $q = \frac{c-a}{b-a}$.

Si…	alors…
q est réel	A, B et C sont alignés
q est imaginaire pur	$(AB) \perp (AC)$: le triangle est rectangle en A
$\lvert q \rvert = 1$	$AC = AB$: le triangle est isocèle en A

Si…	alors…
$q = i$ ou $q = -i$	le triangle est rectangle **et** isocèle en A
$q = e^{i\pi/3}$ ou $q = e^{-i\pi/3}$	le triangle est équilatéral

Exemple : la nature d'un triangle

Soient $A(-1+i)$, $B(2+2i)$ et $C(-2+4i)$. On a $b-a = 3+i$ et $c-a = -1+3i$.

$$\begin{aligned}\frac{c-a}{b-a} &= \frac{-1+3i}{3+i} \\ &= \frac{(-1+3i)(3-i)}{9+1} = \frac{10i}{10} = i.\end{aligned}$$

Le module vaut 1, donc $AC = AB$. Un argument vaut $\dfrac{\pi}{2}$, donc $(AB) \perp (AC)$.

Le triangle ABC est rectangle et isocèle en A, et $AB = |3+i| = \sqrt{10}$.

Exemple : trois points alignés

Soient $D(1-i)$, $E(3+i)$ et $F(6+4i)$:

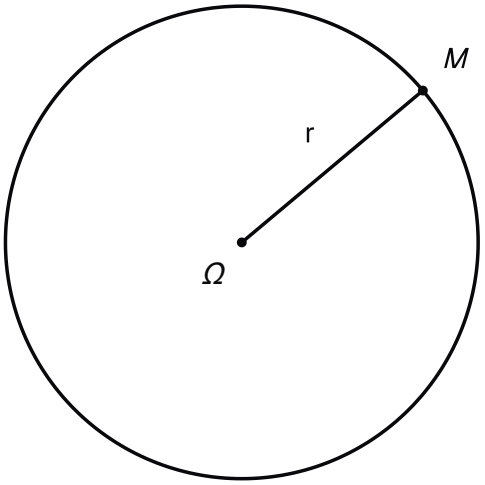
$$\frac{f-d}{e-d} = \frac{5+5i}{2+2i} = \frac{5}{2}.$$

Ce quotient est réel : les points D, E et F sont alignés.

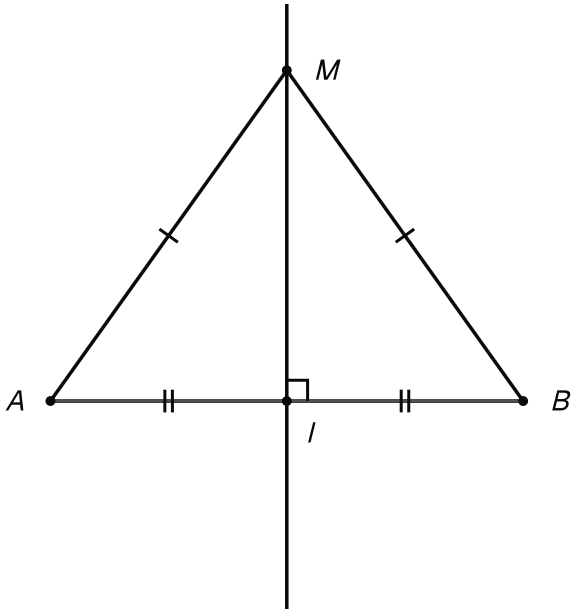
Propriété : Cercle et médiatrice décrits par des modules

Soient Ω, A et B des points d'affixes ω, a et b, avec $A \neq B$, et r un réel strictement positif.

- L'ensemble des points $M(z)$ tels que $|z-\omega| = r$ est le **cercle** de centre Ω et de rayon r.
- L'ensemble des points $M(z)$ tels que $|z-a| = |z-b|$ est la **médiatrice** du segment $[AB]$.



Condition |z – ω| = r : le point M reste à la distance r de Ω, il décrit le cercle de centre Ω.



Condition |z – a| = |z – b| : M est à égale distance de A et de B, il parcourt la médiatrice de [AB].

Exemple : reconnaître un cercle, une médiatrice

- $|z-3+2i|=4$ s'écrit $|z-(3-2i)|=4$. Avec $\Omega(3-2i)$, cela donne $\Omega M=4$: l'ensemble est le cercle de centre Ω et de rayon 4.
- $|z-1|=|z+i|$ s'écrit $PM=QM$, avec $P(1)$ et $Q(-i)$: l'ensemble est la médiatrice du segment $[PQ]$.

Translation, homothétie, rotation

Translation de vecteur d'affixe b

$$z' = z + b$$

Homothétie de centre Ω(ω), de rapport k réel non nul

$$z' - \omega = k(z - \omega)$$

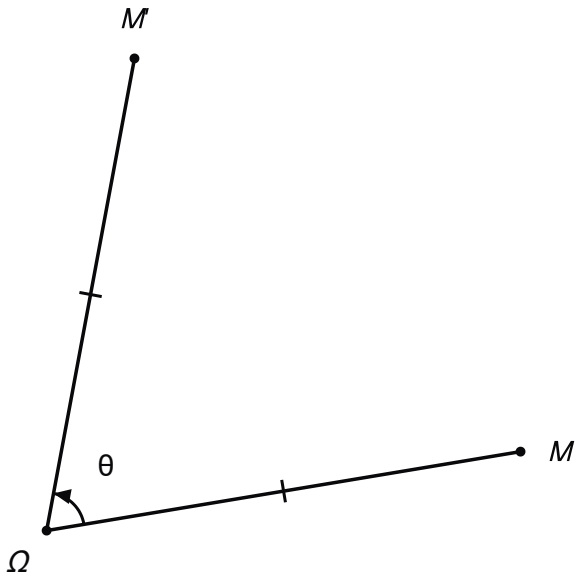
Rotation de centre Ω(ω) et d'angle θ

$$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$$

Propriété : Écriture complexe d'une rotation

Soient Ω un point d'affixe ω et θ un réel. La rotation de centre Ω et d'angle θ transforme le point $M(z)$ en le point $M'(z')$ tel que

$$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega).$$



Rotation de centre Ω et d'angle θ : M' est à la même distance de Ω que M, et l'angle orienté de ΩM vers ΩM' vaut θ.

Méthode : l'image d'un point par une rotation

1. **Écris la formule avec le centre** : $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$.
2. **Calcule** $e^{i\theta}$ sous la forme $a + ib$, par exemple $e^{i\pi/2} = i$.
3. **Isole** z' : $z' = \omega + e^{i\theta}(z - \omega)$, puis remplace z par l'affixe du point.
4. **Vérifie** : le centre est à la même distance du point et de son image.

Exemple : rotation de centre Ω(2 – i) et d'angle π/2

L'écriture complexe est $z' - (2 - i) = i\big(z - (2 - i)\big)$. Pour $M(3 + i)$, on a $z - \omega = 1 + 2i$, donc

$$z' = (2 - i) + i(1 + 2i)$$
$$= 2 - i + i - 2 = 0.$$

L'image de M est l'origine O.

Contrôle : $|1 + 2i| = |0 - (2 - i)| = \sqrt{5}$.

Exemple : translation et homothétie

- Translation de vecteur d'affixe $1 - 3i$: $z' = z + 1 - 3i$. L'image de $K(2 + i)$ est $K'(3 - 2i)$.
- Homothétie de centre $\Omega(1 + i)$ et de rapport 3 : $z' - (1 + i) = 3\big(z - (1 + i)\big)$. L'image de $L(2)$ a pour affixe $1 + i + 3(1 - i) = 4 - 2i$.

Remarque : Retrouver le centre d'une écriture z' = αz + β

L'énoncé donne parfois $z' = iz + 2 + 2i$. Cherche le point qui ne bouge pas : $\omega = i\omega + 2 + 2i$ donne $\omega(1 - i) = 2 + 2i$, donc $\omega = 2i$.

Comme $|i| = 1$ et $\arg i \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$, c'est la rotation de centre $\Omega(2i)$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

Vérification : $z' - 2i = i(z - 2i)$.

Neuf pièges classiques

Attention : Zéro n'a pas d'argument

Le point O ne donne aucune direction. Avant de parler d'argument, vérifie que le nombre est **non nul**. Les règles sur $\arg(zz')$ et $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right)$ supposent z et z' non nuls.

Pour le quotient $\dfrac{c - a}{b - a}$, il faut $A \neq B$ et $A \neq C$.

Attention : Les arguments ne s'ajoutent pas dans une somme

Prends $z = 2$ et $z' = -2 + 2i$. Un argument de z est 0 et un argument de z' est $\dfrac{3\pi}{4}$. Or leur somme vaut $2i$, dont un argument est $\dfrac{\pi}{2}$, et non $\dfrac{3\pi}{4}$.

Les arguments s'ajoutent pour un **produit**, jamais pour une somme.

Attention : Le module d'une somme n'est pas la somme des modules

$|3| + |4i| = 3 + 4 = 7$, mais $|3 + 4i| = \sqrt{9 + 16} = 5$. Le module passe au produit et au quotient, pas à la somme.

Attention : La partie imaginaire est un réel

Pour $z = -5 + 7i$: $\mathrm{Im}(z) = 7$, et non $7i$.

Attention : Pas de forme trigonométrique avec un facteur négatif

$-3\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$ n'est pas une forme trigonométrique, car $-3 < 0$. Comme $-1 = e^{i\pi}$, ce nombre vaut $3e^{5i\pi/4}$: son module est 3 et un argument est $\dfrac{5\pi}{4}$.

Attention : Pas de racine carrée d'un nombre négatif

Avec $\Delta = -36$, n'écris jamais la racine carrée de -36 : elle n'existe pas. Écris $-36 = (6i)^2$ et utilise $6i$ dans les formules.

Attention : Tout le numérateur se divise par 2a

Pour $2z^2 - 2z + 5 = 0$: $\Delta = 4 - 40 = -36 = (6i)^2$. Les solutions sont

$$\frac{2 - 6i}{4} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\,i,$$
$$\frac{2 + 6i}{4} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\,i.$$

Écrire $\dfrac{1}{2} + 6i$ revient à ne diviser que la partie réelle : la partie imaginaire aussi passe sous le 4.

Attention : L'ordre du quotient compte

Un argument de $\dfrac{c-a}{b-a}$ mesure l'angle $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$: on part de B pour aller vers C.

Dans l'exemple du triangle, ce quotient vaut i, d'argument $\dfrac{\pi}{2}$. Son inverse $\dfrac{b-a}{c-a}$ vaut $-i$, d'argument $-\dfrac{\pi}{2}$: il mesure $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right)$. Retourner la fraction change le signe de l'angle.

Attention : Le centre d'une rotation se retire des deux côtés

La rotation de centre $\Omega(2i)$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ envoie O sur le point d'affixe $2i + i(0 - 2i) = 2 + 2i$.

L'écriture $z' = iz + 2i$ donnerait $2i$: elle oublie de retirer ω à z. Garde toujours la forme $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$.

Au bac

Constats sur **15 sujets nationaux** 2BAC SE (option française, 2016 à 2025) et sur **13 barèmes** lus. Un exercice de nombres complexes figure dans les 15 sujets, pour 3 à 5 points sur 20. Ces fréquences décrivent ces sujets-là, pas le prochain examen.

Question	Sujets	Points
équation du second degré, discriminant négatif	10 sur 15	0,75
image d'un point par une rotation	10 sur 15	0,25 à 0,5 par image
forme trigonométrique d'un nombre	10 sur 15	0,25 à 0,5
nature d'un triangle	9 sur 15	0,25 à 0,5
écriture complexe d'une rotation à établir	8 sur 15	0,25 à 0,75
quotient de différences d'affixes	8 sur 15	0,25 à 0,75
module et argument demandés	7 sur 15	0,25 + 0,25
alignement de trois points	7 sur 15	0,25 à 0,75
puissance d'un nombre	6 sur 15	0,25 à 0,75
translation	5 sur 15	0,25 à 0,5
mesure d'un angle orienté	4 sur 15	0,25 à 0,5
cercle ou ensemble de points	3 sur 15	0,5
homothétie	1 sur 15	0,25 et 0,25

Méthode : Rédactions qui rapportent les points

1. **Équation** (10 des 15 sujets) : écris Δ et son signe, puis chaque solution. Dans les barèmes lus : 0,25 pour Δ et 0,25 par solution.
2. **Nature d'un triangle** (9 des 15 sujets) : une propriété par phrase. « Le module du quotient vaut 1, donc $AC = AB$ » rapporte 0,25 ; « un argument vaut $\frac{\pi}{2}$, donc $(AB) \perp (AC)$ » rapporte 0,25.
3. **Rotation** (12 des 15 sujets) : écris d'abord $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$. Dans deux barèmes, cette écriture est notée à elle seule. Calcule ensuite l'image.
4. **Alignement** (7 des 15 sujets) : l'égalité, puis la déduction, notées à part : 0,25 + 0,5 ou 0,5 + 0,25.
5. **Cercle** (3 des 15 sujets) : 0,25 pour traduire $|z - \omega| = r$ en $\Omega M = r$, puis 0,25 pour nommer l'ensemble.

Remarque : Ce que ces sujets ne montrent pas

- La notation $e^{i\theta}$ figure dans l'énoncé de 2 des 15 sujets seulement ; la forme $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ domine.

- Non relevés dans les 15 sujets consultés : la formule de Moivre nommée, les formules d'Euler, la linéarisation, les équations à coefficients complexes non réels. Cela ne veut pas dire « jamais demandé ».
- Les barèmes acceptent toute méthode correcte, et une question « … puis en déduire » sépare le calcul de la déduction.

Checklist avant le devoir

À retenir : Je sais…

- calculer une somme, un produit, un conjugué, un module, et un quotient grâce au conjugué ;
- écrire un nombre non nul sous forme trigonométrique et exponentielle, avec $r > 0$;
- multiplier, diviser et élever à une puissance en forme exponentielle ;
- résoudre une équation du second degré à coefficients réels, même avec $\Delta < 0$;
- lire le quotient $\dfrac{c-a}{b-a}$: alignement, angle droit, isocèle, équilatéral ;
- reconnaître un cercle ou une médiatrice écrits avec des modules ;
- calculer l'image d'un point par une translation, une homothétie ou une rotation.

Remarque : Le mot de la fin

Ce chapitre rapporte de 3 à 5 points dans chacun des 15 sujets consultés. Tu as maintenant toutes les clés : il reste à t'entraîner.