BURHAN

Nombres complexes : exercices, niveau examen

2ème Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-experimentales/mathematiques/nombres-complexes/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Nombres complexes	Niveau examen	5

Exercice 1 3 pts

Équation, rotation de centre O et triangle rectangle isocèle

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère l'équation (E) : $z^2 - 6z + 18 = 0$.

1. 0,75 pts

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

INDICE

Calcule Δ et donne son signe avant d'écrire les solutions.

2. 0,5 pts

On pose $a = 3 + 3i$ et $b = 3 - 3i$, et on note A et B leurs images. Écrire a sous forme trigonométrique.

INDICE

Le module se simplifie : $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

3. 0,5 pts

Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Montrer que A est l'image de B par R.

INDICE

Cite l'écriture complexe de la rotation avant de calculer. Ici le centre a pour affixe 0.

4. 0,25 pts

Calculer $\frac{a}{b}$.

INDICE

Multiplie le numérateur et le dénominateur par $\overline{b} = a$.

5. 0,5 pts

En déduire la nature du triangle OAB.

INDICE

Lis le module du quotient, puis son argument. Donne une propriété pour chacun.

6. 0,5 pts

Calculer a^4.

INDICE

Passe par la forme trigonométrique : la puissance multiplie l'argument par 4.

Exercice 2 4 pts

Forme exponentielle, puissance réelle et rotation de centre B

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère l'équation (E) : $z^2 - 2\sqrt{2}\,z + 4 = 0$.

1. 0,75 pts

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

INDICE

$\left(2\sqrt{2}\right)^2 = 8$. Le discriminant est négatif.

2. 0,5 pts

On pose $a = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ et $b = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$. Écrire a et b sous forme exponentielle.

INDICE

Calcule le module de a, puis reconnais $\cos\theta$ et $\sin\theta$. Remarque que $b = \overline{a}$.

3. 0,5 pts

Montrer que a^{2024} est un nombre réel.

INDICE

Calcule $2024 \times \dfrac{\pi}{4}$, puis cherche combien de tours complets de 2π il contient.

4. 0,5 pts

Soit R la rotation de centre B et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$. Montrer que l'écriture complexe de R est $z' = iz - 2i\sqrt{2}$.

INDICE

Écris $z' - b = e^{i\pi/2}(z - b)$, puis développe $b - ib$.

5. 0,5 pts

Soit A' l'image de A par R. Montrer que $z_{A'} = -a$.

INDICE

Remplace z par a dans l'écriture de la question 4.

6. 0,5 pts

Calculer $\dfrac{z_{A'}}{a}$, puis en déduire que les points O, A et A' sont alignés.

INDICE

Le quotient se calcule de tête avec la question 5. Un quotient réel donne un alignement.

7. 0,75 pts

Calculer $\dfrac{z_{A'} - b}{a - b}$, puis en déduire la nature du triangle BAA'.

INDICE

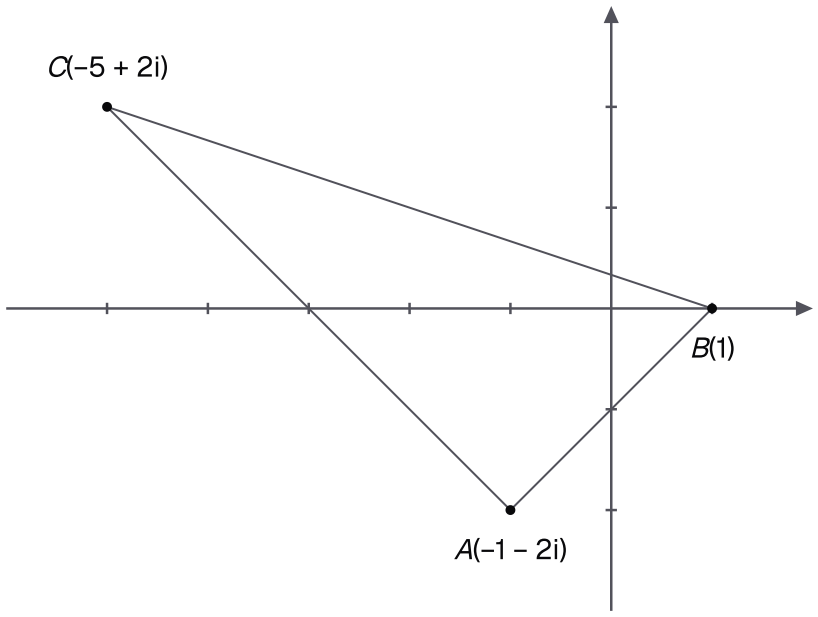
Pense à la rotation de centre B.

Exercice 3

3,5 pts

Triangle rectangle, cercle circonscrit et translation

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = -1 - 2i$, $b = 1$ et $c = -5 + 2i$.



Les points A(−1 − 2i), B(1) et C(−5 + 2i) placés dans le repère (O, u, v).

1. 0,5 pts

Montrer que $\dfrac{c-a}{b-a} = 2i$.

INDICE

Calcule $c - a$ et $b - a$, puis multiplie par le conjugué du dénominateur.

2. 0,75 pts

Écrire $2i$ sous forme trigonométrique, puis en déduire que le triangle ABC est rectangle en A et que $AC = 2AB$.

INDICE

Le module du quotient vaut $\dfrac{AC}{AB}$; un argument mesure l'angle $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.

3. 0,75 pts

Soit (Γ) l'ensemble des points $M(z)$ tels que $|z + 2 - i| = \sqrt{10}$. Déterminer (Γ), puis vérifier que A, B et C appartiennent à (Γ).

INDICE

Écris $z + 2 - i = z - \omega$. Le point $\Omega(\omega)$ a peut-être un lien avec le segment $[BC]$.

4. 0,5 pts

Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$, et D l'image de C par t. Calculer l'affixe d de D.

INDICE

L'affixe de $\overrightarrow{AB}$ est $b-a$, déjà calculée à la question 1.

5. 0,5 pts

Montrer que le quadrilatère $ABDC$ est un rectangle.

INDICE

Commence par un parallélogramme, grâce à la translation. Utilise ensuite l'angle droit trouvé à la question 2.

6. 0,5 pts

Vérifier que D appartient à (Γ), et expliquer pourquoi ce résultat était prévisible.

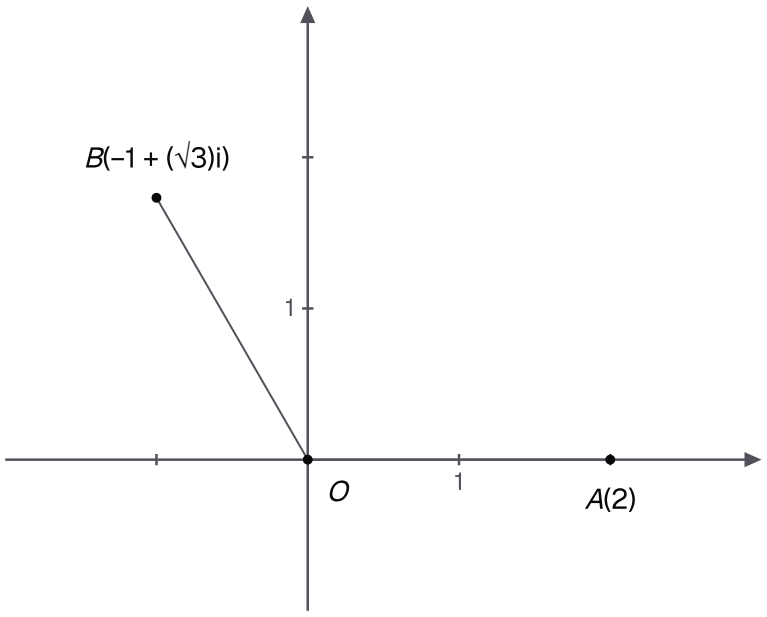
INDICE

Calcule ΩD. Pense ensuite au milieu de la diagonale $[AD]$.

Exercice 4 4 pts

Rotation d'angle 2π/3 et triangle équilatéral

On se place dans le plan rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A et B d'affixes $a = 2$ et $b = -1 + i\sqrt{3}$.



Les points A(2) et B(–1 + √3 i) de l'énoncé.

1. 0,5 pts

Écrire b sous forme exponentielle.

INDICE

Calcule le module, puis cherche un angle remarquable.

2. 0,25 pts

Soit R la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$. Donner l'écriture complexe de R.

INDICE

Le centre a pour affixe 0 dans $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$.

3. 0,5 pts

Montrer que B est l'image de A par R.

INDICE

Remplace z par $a = 2$ et compare avec la question 1.

4. 0,5 pts

On note C l'image de B par R. Montrer que l'affixe de C est $c = -1 - i\sqrt{3}$.

INDICE

Multiplie deux formes exponentielles : les arguments s'additionnent.

5. 0,5 pts

Montrer que $\dfrac{c-a}{b-a} = e^{i\pi/3}$.

INDICE

Calcule $c-a$ et $b-a$, puis multiplie par le conjugué du dénominateur.

6. 0,5 pts

En déduire la nature du triangle ABC.

INDICE

Une propriété par information : le module, puis l'argument.

7. 0,75 pts

Montrer que b^{2025} est un réel et le calculer.

INDICE

Calcule $n\theta$, puis compte les tours de 2π.

8. 0,5 pts

Montrer que A, B et C sont sur un même cercle de centre O dont on précisera le rayon.

INDICE

Calcule les trois modules : ce sont les distances à O.

Exercice 5 3,5 pts

Équation, rotation de centre Ω et points alignés

Le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ du plan est orthonormé direct. On étudie l'équation (E) : $z^2 - 4z + 20 = 0$ et le point Ω d'affixe $\omega = -2$.

1. 0,75 pts

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

INDICE

Commence par le discriminant, puis écris-le comme le carré d'un imaginaire pur.

2. 0,5 pts

On note A et B les points d'affixes $a = 2 + 4i$ et $b = 2 - 4i$, et R la rotation de centre Ω et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$. Montrer que l'écriture complexe de R est $z' = -iz - 2 - 2i$.

INDICE

Écris la relation de la rotation avec $\omega = -2$, puis calcule $e^{-i\pi/2}$.

3. 0,5 pts

Montrer que B est l'image de A par R.

INDICE

Remplace z par a dans l'écriture de la question 2.

4. 0,75 pts

En déduire la nature du triangle ΩAB.

INDICE

Traduis $R(A) = B$ par une égalité entre $b - \omega$ et $a - \omega$.

5. 0,5 pts

Soit C l'image du point O par R. Calculer l'affixe c de C.

INDICE

Remplace z par 0.

6. 0,5 pts

Soit D le point d'affixe $d = -6$. Calculer $\dfrac{d-b}{c-b}$, puis en déduire que les points B, C et D sont alignés.

INDICE

Calcule $d - b$ et $c - b$, puis écris le quotient $\dfrac{d-b}{c-b}$ sous forme algébrique : de quelle nature est-il ?