BURHAN

# Nombres complexes : exercices, niveau examen

2ème Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-experimentales/mathematiques/nombres-complexes/exercices/examen

| Chapitre | Palier | Exercices |
| --- | --- | --- |
| Nombres complexes | Niveau examen | 5 |

**Exercice 1** 3 pts

## Équation, rotation de centre O et triangle rectangle isocèle

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère l'équation $(E)$ : $z^2 - 6z + 18 = 0$.

**1.** 0,75 pts

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E)$.

INDICE

Calcule $\Delta$ et donne son signe avant d'écrire les solutions.

CORRIGÉ

**Discriminant.**

$$\begin{aligned}\Delta &= (-6)^2 - 4 \times 1 \times 18 \\ &= 36 - 72 = -36.\end{aligned}$$

Ainsi $\Delta < 0$, et $-36 = (6i)^2$.

**Solutions.** L'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$$\begin{aligned}z_1 &= \frac{6 - 6i}{2} = 3 - 3i, \\ z_2 &= \frac{6 + 6i}{2} = 3 + 3i.\end{aligned}$$

**Conclusion.** L'ensemble des solutions de $(E)$ est $S = \{3 - 3i\,;\, 3 + 3i\}$.

**2.** 0,5 pts

On pose $a = 3 + 3i$ et $b = 3 - 3i$, et on note $A$ et $B$ leurs images. Écrire $a$ sous forme trigonométrique.

INDICE

Le module se simplifie : $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

CORRIGÉ

**Module.** $|a| = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

**Angle.** On cherche un réel $\theta$ tel que :

$$\cos\theta = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$\sin\theta = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

L'angle $\dfrac{\pi}{4}$ convient : $\arg a \equiv \dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$. Donc :

$$a = 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

**Remarque.** Comme $b = \overline{a}$, on obtient de même :

$$b = 3\sqrt{2}\Big(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\Big).$$

**Conclusion.** La forme trigonométrique de $a$ est $3\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$.

**3.** 0,5 pts

Soit $R$ la rotation de centre $O$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$. Montrer que $A$ est l'image de $B$ par $R$.

INDICE

Cite l'écriture complexe de la rotation avant de calculer. Ici le centre a pour affixe $0$.

CORRIGÉ

**Écriture complexe de $R$.** La rotation de centre $O$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ transforme $M(z)$ en $M'(z')$ tel que $z' - 0 = e^{i\pi/2}(z - 0)$. Comme $e^{i\pi/2} = i$ :

$$z' = iz.$$

**Image de $B$.**

$$ib = i(3 - 3i) = 3i - 3i^2$$
$$= 3 + 3i = a.$$

**Conclusion.** $R(B) = A$ : le point $A$ est l'image de $B$ par $R$.

**4.** 0,25 pts

Calculer $\dfrac{a}{b}$.

INDICE

Multiplie le numérateur et le dénominateur par $\overline{b} = a$.

CORRIGÉ

On multiplie le numérateur et le dénominateur par $\overline{b} = a$, avec $b\,\overline{b} = 3^2 + 3^2 = 18$ :

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &= \frac{(3+3i)^2}{(3-3i)(3+3i)} \\ &= \frac{9+18i-9}{18} \\ &= \frac{18i}{18} = i. \end{aligned}$$

**Conclusion.** $\dfrac{a}{b} = i$.

**5.** 0,5 pts

En déduire la nature du triangle $OAB$.

INDICE

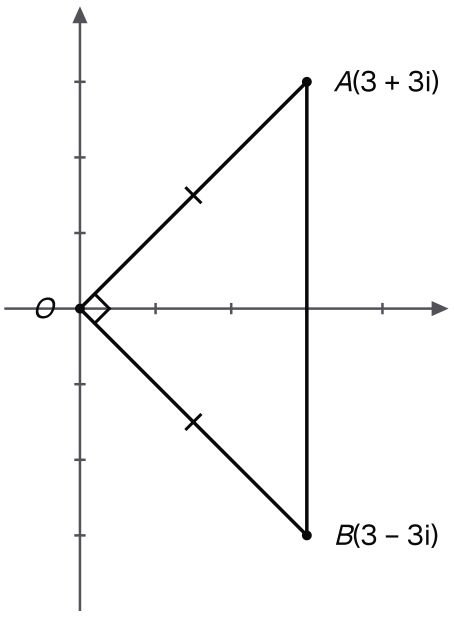
Lis le module du quotient, puis son argument. Donne une propriété pour chacun.

CORRIGÉ

D'après la question 4, $\dfrac{a-0}{b-0} = \dfrac{a}{b} = i$.

- **Longueurs.** $\dfrac{OA}{OB} = \left|\dfrac{a}{b}\right| = |i| = 1$, donc $OA = OB$ : le triangle est isocèle en $O$.
- **Angle.** $\left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}\right) \equiv \arg i \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$ : le triangle est rectangle en $O$.

**Conclusion.** Le triangle $OAB$ est **rectangle et isocèle en** $O$.




**Le triangle OAB rectangle isocèle en O : OA = OB et l'angle en O est droit, car a/b = i.**

**6.** 0,5 pts

Calculer $a^4$.

INDICE

Passe par la forme trigonométrique : la puissance multiplie l'argument par $4$.

CORRIGÉ

On part de la forme trigonométrique de $a$ (question 2). Le module est élevé à la puissance $4$ et l'argument est multiplié par $4$, avec $4 \times \dfrac{\pi}{4} = \pi$ :

$$\begin{aligned} a^4 &= \left(3\sqrt{2}\right)^4 (\cos\pi + i\sin\pi) \\ &= 324 \times (-1) \\ &= -324. \end{aligned}$$

En effet $\left(3\sqrt{2}\right)^4 = 3^4 \times 2^2 = 81 \times 4 = 324$.

**Contrôle.** $a^2 = (3+3i)^2 = 9 + 18i - 9 = 18i$, puis $a^4 = (18i)^2 = -324$.

**Conclusion.** $a^4 = -324$.

**Exercice 2** 4 pts

## Forme exponentielle, puissance réelle et rotation de centre B

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère l'équation $(E)$ : $z^2 - 2\sqrt{2}\,z + 4 = 0$.

**1.** 0,75 pts

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E)$.

INDICE

$\left(2\sqrt{2}\right)^2 = 8$. Le discriminant est négatif.

CORRIGÉ

**Discriminant.**

$$\begin{aligned}\Delta &= \left(-2\sqrt{2}\right)^2 - 4 \times 1 \times 4 \\ &= 8 - 16 = -8.\end{aligned}$$

Ainsi $\Delta < 0$, et $-8 = \left(2i\sqrt{2}\right)^2$.

**Solutions.** L'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$$\begin{aligned}z_1 &= \frac{2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}}{2} \\ &= \sqrt{2} - i\sqrt{2}, \\ z_2 &= \frac{2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}}{2} \\ &= \sqrt{2} + i\sqrt{2}.\end{aligned}$$

**Conclusion.** L'ensemble des solutions de $(E)$ est $S = \left\{\sqrt{2} - i\sqrt{2}\,;\ \sqrt{2} + i\sqrt{2}\right\}$.

**2.** 0,5 pts

On pose $a = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ et $b = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$. Écrire $a$ et $b$ sous forme exponentielle.

INDICE

Calcule le module de $a$, puis reconnais $\cos\theta$ et $\sin\theta$. Remarque que $b = \overline{a}$.

CORRIGÉ

**Module.** $|a| = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{4} = 2$.

**Angle.** $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ : l'angle $\dfrac{\pi}{4}$ convient, donc $\arg a \equiv \dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$ et :

$$a = 2e^{i\pi/4}.$$

**Conjugué.** $b = \overline{a}$ a le même module et un argument opposé :

$$b = 2e^{-i\pi/4}.$$

**Conclusion.** $a = 2e^{i\pi/4}$ et $b = 2e^{-i\pi/4}$.

**3.** 0,5 pts

Montrer que $a^{2024}$ est un nombre réel.

INDICE

Calcule $2024 \times \dfrac{\pi}{4}$, puis cherche combien de tours complets de $2\pi$ il contient.

CORRIGÉ

D'après la question 2, $a = 2e^{i\pi/4}$. Pour la puissance d'une forme exponentielle, on élève le module à cette puissance et on multiplie l'argument par l'exposant :

$$\begin{aligned} a^{2024} &= 2^{2024} e^{2024 i\pi/4} \\ &= 2^{2024} e^{506 i\pi}. \end{aligned}$$

Or $506\pi = 253 \times 2\pi$, donc $e^{506 i\pi} = 1$ et :

$$a^{2024} = 2^{2024}.$$

**Conclusion.** $a^{2024} = 2^{2024}$ : c'est un nombre réel (strictement positif).

**4.** 0,5 pts

Soit $R$ la rotation de centre $B$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$. Montrer que l'écriture complexe de $R$ est $z' = iz - 2i\sqrt{2}$.

INDICE

Écris $z' - b = e^{i\pi/2}(z - b)$, puis développe $b - ib$.

CORRIGÉ

**Écriture.** $M'(z')$ est l'image de $M(z)$ par $R$ si et seulement si $z' - b = e^{i\pi/2}(z - b)$, avec $e^{i\pi/2} = i$. Donc $z' = iz + b - ib$.

**Calcul de $b - ib$.**

$$\begin{aligned} & b - ib \\ &= \sqrt{2} - i\sqrt{2} \\ &\quad - i\left(\sqrt{2} - i\sqrt{2}\right) \\ &= \sqrt{2} - i\sqrt{2} \\ &\quad - i\sqrt{2} + i^2\sqrt{2} \\ &= -2i\sqrt{2}. \end{aligned}$$

**Conclusion.** L'écriture complexe de $R$ est $z' = iz - 2i\sqrt{2}$.

**5.** 0,5 pts

Soit $A'$ l'image de $A$ par $R$. Montrer que $z_{A'} = -a$.

INDICE

Remplace $z$ par $a$ dans l'écriture de la question 4.

CORRIGÉ

On remplace $z$ par $a = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ dans l'écriture de la question 4 :

$$\begin{aligned} z_{A'} &= i\left(\sqrt{2} + i\sqrt{2}\right) - 2i\sqrt{2} \\ &= i\sqrt{2} - \sqrt{2} - 2i\sqrt{2} \\ &= -\sqrt{2} - i\sqrt{2} \\ &= -a. \end{aligned}$$

**Conclusion.** $z_{A'} = -a$.

**6.** 0,5 pts

Calculer $\dfrac{z_{A'}}{a}$, puis en déduire que les points $O$, $A$ et $A'$ sont alignés.

INDICE

Le quotient se calcule de tête avec la question 5. Un quotient réel donne un alignement.

CORRIGÉ

**Calcul.** $a \neq 0$, et d'après la question 5 :

$$\frac{z_{A'} - 0}{a - 0} = \frac{-a}{a} = -1.$$

**Déduction.** Ce quotient est réel, donc les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OA'}$ sont colinéaires. Plus précisément, $z_{A'} = -a$ : $O$ est le milieu de $[AA']$.

**Conclusion.** $\dfrac{z_{A'}}{a} = -1$, et les points $O$, $A$ et $A'$ sont **alignés**.

**7.** 0,75 pts

Calculer $\dfrac{z_{A'}-b}{a-b}$, puis en déduire la nature du triangle $BAA'$.

INDICE

Pense à la rotation de centre $B$.

CORRIGÉ

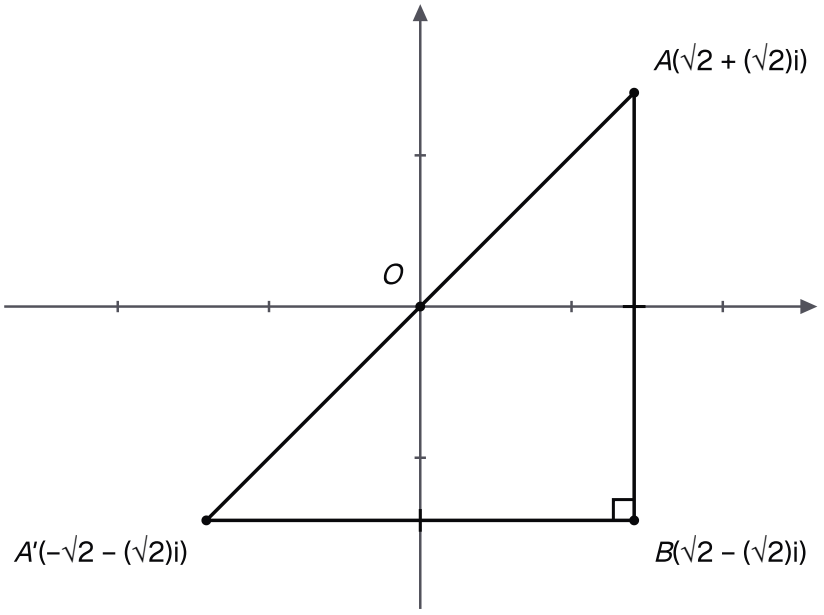
**Calcul.** $z_{A'}-b=-\sqrt{2}-i\sqrt{2}-\sqrt{2}+i\sqrt{2}=-2\sqrt{2}$ et $a-b=2i\sqrt{2}$. Donc, avec $\dfrac{1}{i}=-i$ :

$$\begin{aligned}\frac{z_{A'}-b}{a-b}&=\frac{-2\sqrt{2}}{2i\sqrt{2}}\\&=\frac{-1}{i}=i.\end{aligned}$$

**Nature.**

- $\left|\dfrac{z_{A'}-b}{a-b}\right|=|i|=1$, donc $BA'=BA$ : le triangle est isocèle en $B$.
- $\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BA'}\right)\equiv\arg i\equiv\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$ : il est rectangle en $B$.

**Conclusion.** $\dfrac{z_{A'}-b}{a-b}=i$, et le triangle $BAA'$ est **rectangle et isocèle en** $B$.

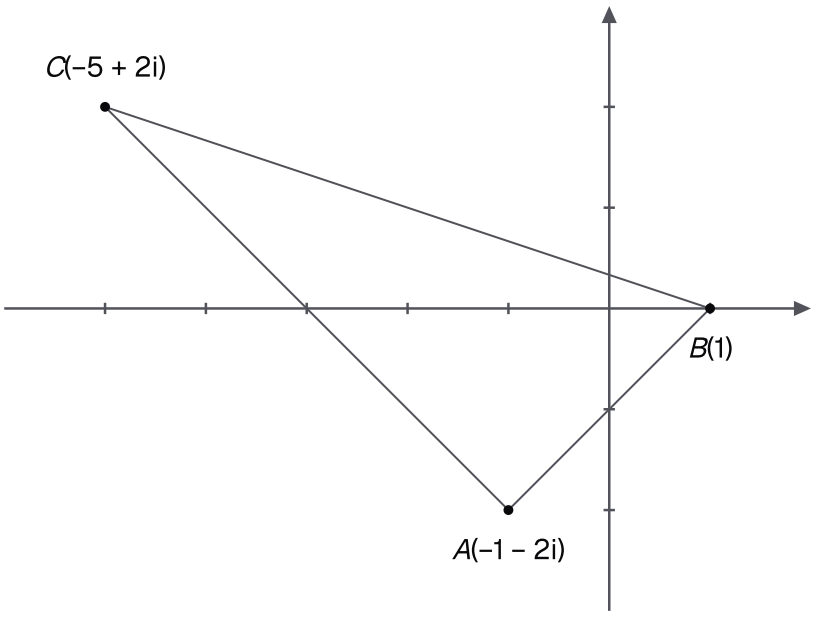



**Le triangle BAA' rectangle isocèle en B ; O est le milieu de l'hypoténuse [AA'].**

## Exercice 3 — 3,5 pts

### Triangle rectangle, cercle circonscrit et translation

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points $A$, $B$ et $C$ d'affixes respectives $a = -1 - 2i$, $b = 1$ et $c = -5 + 2i$.




**Les points A(−1 − 2i), B(1) et C(−5 + 2i) placés dans le repère (O, u, v).**

#### 1. — 0,5 pts

Montrer que $\dfrac{c-a}{b-a} = 2i$.

INDICE

Calcule $c - a$ et $b - a$, puis multiplie par le conjugué du dénominateur.

CORRIGÉ

On calcule $c - a = (-5 + 2i) - (-1 - 2i) = -4 + 4i$ et $b - a = 1 - (-1 - 2i) = 2 + 2i$.

On multiplie par le conjugué $2 - 2i$ du dénominateur, avec $(2 + 2i)(2 - 2i) = 8$ :

$$\begin{aligned} \frac{c-a}{b-a} &= \frac{(-4+4i)(2-2i)}{8} \\ &= \frac{-8 + 8i + 8i - 8i^2}{8} \\ &= \frac{16i}{8} = 2i. \end{aligned}$$

**Conclusion.** $\dfrac{c-a}{b-a} = 2i$.

**2.** 0,75 pts

Écrire $2i$ sous forme trigonométrique, puis en déduire que le triangle $ABC$ est rectangle en $A$ et que $AC = 2AB$.

INDICE

Le module du quotient vaut $\dfrac{AC}{AB}$ ; un argument mesure l'angle $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.

CORRIGÉ

**Forme trigonométrique.** $|2i| = 2$ et $\arg(2i) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$, donc :

$$2i = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right).$$

**Angle.** $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$ : le triangle $ABC$ est rectangle en $A$.

**Longueurs.** $\dfrac{AC}{AB} = \left|\dfrac{c-a}{b-a}\right| = |2i| = 2$, donc $AC = 2AB$. En particulier, le triangle n'est pas isocèle en $A$.

**Conclusion.** Le triangle $ABC$ est **rectangle en** $A$, et $AC = 2AB$.

**3.** 0,75 pts

Soit $(\Gamma)$ l'ensemble des points $M(z)$ tels que $|z+2-i| = \sqrt{10}$. Déterminer $(\Gamma)$, puis vérifier que $A$, $B$ et $C$ appartiennent à $(\Gamma)$.

INDICE

Écris $z + 2 - i = z - \omega$. Le point $\Omega(\omega)$ a peut-être un lien avec le segment $[BC]$.

CORRIGÉ

**Traduction.** $z + 2 - i = z - (-2 + i)$. Soit $\Omega$ le point d'affixe $-2 + i$ : pour tout point $M(z)$, $|z + 2 - i| = \Omega M$. Donc :

$$\begin{aligned} &|z+2-i| = \sqrt{10} \\ \iff\ &\Omega M = \sqrt{10}. \end{aligned}$$

**Ensemble.** $(\Gamma)$ est le **cercle de centre** $\Omega(-2+i)$ **et de rayon** $\sqrt{10}$.

**Vérification.**

$$\begin{aligned} \Omega A &= |1 - 3i| = \sqrt{10}, \\ \Omega B &= |3 - i| = \sqrt{10}, \\ \Omega C &= |-3 + i| = \sqrt{10}. \end{aligned}$$

**Remarque.** $\dfrac{b+c}{2} = \dfrac{-4+2i}{2} = -2 + i$ : $\Omega$ est le milieu de l'hypoténuse $[BC]$.

**Conclusion.** $(\Gamma)$ est le cercle de centre $\Omega(-2+i)$ et de rayon $\sqrt{10}$, et les points $A$, $B$ et $C$ appartiennent à $(\Gamma)$.

**4.** 0,5 pts

Soit $t$ la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$, et $D$ l'image de $C$ par $t$. Calculer l'affixe $d$ de $D$.

INDICE

L'affixe de $\overrightarrow{AB}$ est $b-a$, déjà calculée à la question 1.

CORRIGÉ

L'affixe de $\overrightarrow{AB}$ est $b-a=2+2i$ (question 1), donc l'écriture complexe de $t$ est $z'=z+2+2i$. Pour $z=c$ :

$$\begin{aligned} d &= c+2+2i \\ &= -5+2i+2+2i \\ &= -3+4i. \end{aligned}$$

**Conclusion.** Le point $D$ a pour affixe $d=-3+4i$.

**5.** 0,5 pts

Montrer que le quadrilatère $ABDC$ est un rectangle.

INDICE

Commence par un parallélogramme, grâce à la translation. Utilise ensuite l'angle droit trouvé à la question 2.

CORRIGÉ

**Parallélogramme.** $D$ est l'image de $C$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$, donc $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}$ : $ABDC$ est un **parallélogramme**.

**Angle droit.** D'après la question 2, le triangle $ABC$ est rectangle en $A$ : l'angle $\widehat{BAC}$ du parallélogramme est droit.

**Conclusion.** Le parallélogramme $ABDC$ a un angle droit : c'est un **rectangle**.

**6.** 0,5 pts

Vérifier que $D$ appartient à $(\Gamma)$, et expliquer pourquoi ce résultat était prévisible.

INDICE

Calcule $\Omega D$. Pense ensuite au milieu de la diagonale $[AD]$.

CORRIGÉ

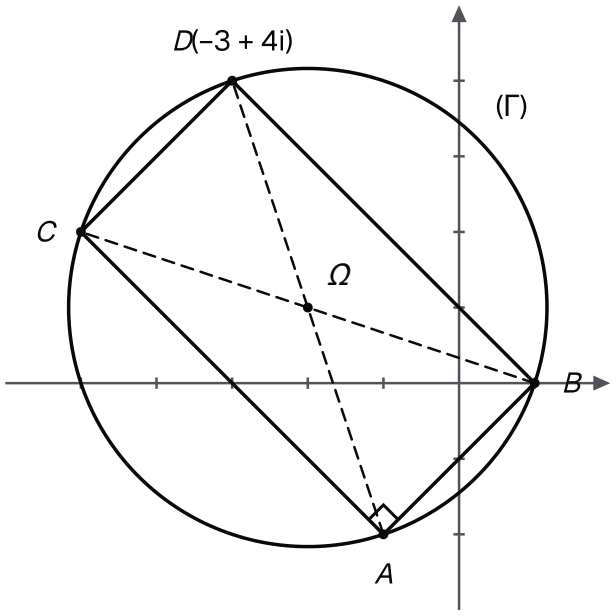
**Calcul.**

$$\begin{aligned}\Omega D &= |-3+4i+2-i| \\ &= |-1+3i| = \sqrt{10}.\end{aligned}$$

Donc $D \in (\Gamma)$.

**Explication.** $\dfrac{a+d}{2} = \dfrac{-4+2i}{2} = -2+i$ : $\Omega$ est le milieu de la diagonale $[AD]$, comme de la diagonale $[BC]$. Les diagonales d'un rectangle ont la même longueur et le même milieu, donc les quatre sommets sont à la même distance $\sqrt{10}$ de $\Omega$.

**Conclusion.** $D$ appartient à $(\Gamma)$. C'était prévisible : $\Omega$ est le centre du rectangle $ABDC$, et $(\Gamma)$ passait déjà par trois de ses sommets.

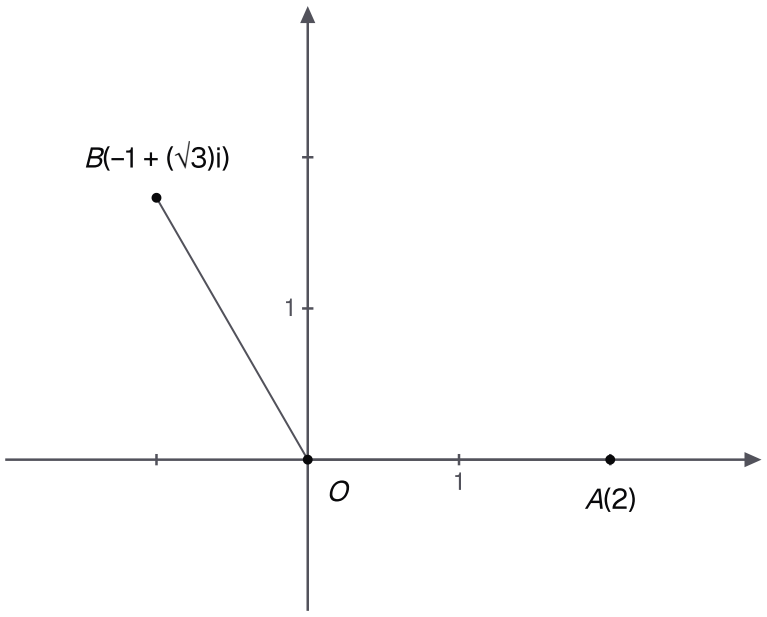



**Le rectangle ABDC et son cercle circonscrit (Γ), de centre Ω(−2 + i), milieu commun des diagonales [AD] et [BC].**

**Exercice 4** 4 pts

## Rotation d'angle 2π/3 et triangle équilatéral

On se place dans le plan rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points $A$ et $B$ d'affixes $a = 2$ et $b = -1 + i\sqrt{3}$.




Les points A(2) et B(−1 + √3 i) de l'énoncé.

### 1. 0,5 pts

Écrire $b$ sous forme exponentielle.

INDICE

Calcule le module, puis cherche un angle remarquable.

CORRIGÉ

**Module.** $|b| = \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2$.

**Angle.** $\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ : l'angle $\dfrac{2\pi}{3}$ convient, donc $\arg b \equiv \dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi]$.

**Conclusion.** La forme exponentielle de $b$ est $b = 2e^{2i\pi/3}$.

**2.** 0,25 pts

Soit $R$ la rotation de centre $O$ et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$. Donner l'écriture complexe de $R$.

INDICE

Le centre a pour affixe $0$ dans $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$.

CORRIGÉ

La rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle $\theta$ a pour écriture complexe $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$. Ici le centre est $O$, d'affixe $0$, et $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$ :

$$z' - 0 = e^{2i\pi/3}(z - 0).$$

**Conclusion.** L'écriture complexe de $R$ est $z' = e^{2i\pi/3}z$.

**3.** 0,5 pts

Montrer que $B$ est l'image de $A$ par $R$.

INDICE

Remplace $z$ par $a = 2$ et compare avec la question 1.

CORRIGÉ

On remplace $z$ par $a = 2$ dans l'écriture de la question 2. D'après la question 1 :

$$e^{2i\pi/3} \times 2 = 2e^{2i\pi/3} = b.$$

**Conclusion.** $R(A) = B$ : le point $B$ est l'image de $A$ par $R$.

**4.** 0,5 pts

On note $C$ l'image de $B$ par $R$. Montrer que l'affixe de $C$ est $c = -1 - i\sqrt{3}$.

INDICE

Multiplie deux formes exponentielles : les arguments s'additionnent.

CORRIGÉ

Le point $C = R(B)$ a pour affixe $c = e^{2i\pi/3}\,b$. Pour un produit de formes exponentielles, on multiplie les modules et on additionne les arguments :

$$\begin{aligned} c &= e^{2i\pi/3} \times 2e^{2i\pi/3} \\ &= 2e^{4i\pi/3} \\ &= 2\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\ &= -1 - i\sqrt{3}. \end{aligned}$$

**Conclusion.** L'affixe de $C$ est $c = -1 - i\sqrt{3}$.

**5.** 0,5 pts

Montrer que $\dfrac{c-a}{b-a} = e^{i\pi/3}$.

INDICE

Calcule $c-a$ et $b-a$, puis multiplie par le conjugué du dénominateur.

CORRIGÉ

On calcule $b-a = -3+i\sqrt{3}$ et $c-a = -3-i\sqrt{3}$. Le conjugué du dénominateur est $c-a$ lui-même, et $(b-a)(c-a) = 9+3 = 12$ :

$$\begin{aligned}\frac{c-a}{b-a} &= \frac{\left(-3-i\sqrt{3}\right)^2}{12}\\ &= \frac{9+6i\sqrt{3}-3}{12}\\ &= \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i.\end{aligned}$$

Or $\cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$ et $\sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

**Conclusion.** $\dfrac{c-a}{b-a} = \dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i = e^{i\pi/3}$.

**6.** 0,5 pts

En déduire la nature du triangle $ABC$.

INDICE

Une propriété par information : le module, puis l'argument.

CORRIGÉ

D'après la question 5, $\dfrac{c-a}{b-a} = e^{i\pi/3}$.

- **Longueurs.** $\dfrac{AC}{AB} = \left|e^{i\pi/3}\right| = 1$, donc $AC = AB$ : le triangle est isocèle en $A$.
- **Angle.** $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

Dans un triangle isocèle d'angle au sommet $\dfrac{\pi}{3}$, chaque angle à la base mesure $\dfrac{1}{2}\left(\pi - \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\pi}{3}$ : les trois angles sont égaux.

**Conclusion.** Le triangle $ABC$ est **équilatéral**.

**7.** 0,75 pts

Montrer que $b^{2025}$ est un réel et le calculer.

INDICE

Calcule $n\theta$, puis compte les tours de $2\pi$.

CORRIGÉ

D'après la question 1, $b = 2e^{2i\pi/3}$. On élève le module à la puissance $2025$ et on multiplie l'argument par $2025$, avec $\dfrac{2025 \times 2\pi}{3} = 1350\pi$ :

$$b^{2025} = 2^{2025} e^{1350 i\pi}.$$

Or $1350\pi = 675 \times 2\pi$, donc $e^{1350 i\pi} = 1$ et :

$$b^{2025} = 2^{2025}.$$

**Conclusion.** $b^{2025} = 2^{2025}$ : c'est un nombre réel.

**8.** 0,5 pts

Montrer que $A$, $B$ et $C$ sont sur un même cercle de centre $O$ dont on précisera le rayon.

INDICE

Calcule les trois modules : ce sont les distances à $O$.

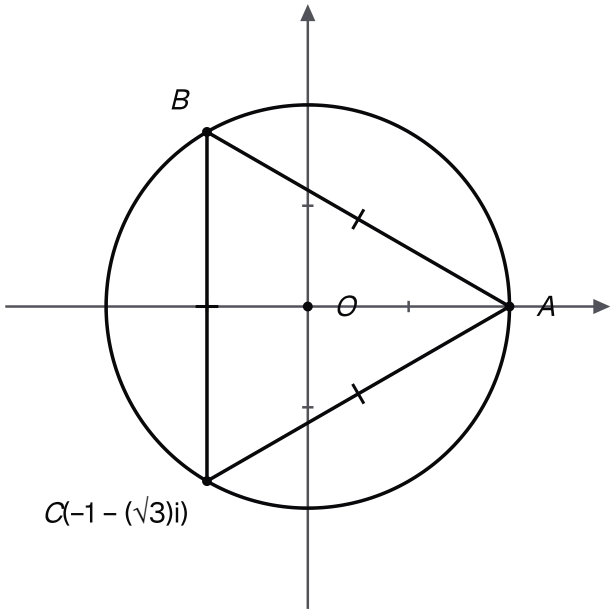
CORRIGÉ

Les distances à $O$ sont les modules des affixes :

- $OA = |a| = 2$ ;
- $OB = |b| = 2$ (question 1) ;
- $OC = |c| = \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$.

Donc $OA = OB = OC = 2$.

**Conclusion.** Les points $A$, $B$ et $C$ sont sur le **cercle de centre $O$ et de rayon $2$**.




**Le triangle équilatéral ABC inscrit dans le cercle de centre O et de rayon 2 ; chaque sommet est l'image du précédent par R.**

**Exercice 5** 3,5 pts

## Équation, rotation de centre Ω et points alignés

Le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ du plan est orthonormé direct. On étudie l'équation $(E)$ : $z^2 - 4z + 20 = 0$ et le point $\Omega$ d'affixe $\omega = -2$.

**1.** 0,75 pts

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E)$.

INDICE

Commence par le discriminant, puis écris-le comme le carré d'un imaginaire pur.

CORRIGÉ

**Discriminant.**

$$\begin{aligned}\Delta &= (-4)^2 - 4 \times 1 \times 20 \\ &= 16 - 80 = -64.\end{aligned}$$

Ainsi $\Delta < 0$, et $-64 = (8i)^2$.

**Solutions.** L'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$$\begin{aligned}z_1 &= \frac{4 - 8i}{2} = 2 - 4i, \\ z_2 &= \frac{4 + 8i}{2} = 2 + 4i.\end{aligned}$$

**Conclusion.** L'ensemble des solutions de $(E)$ est $S = \{2 - 4i\,;\, 2 + 4i\}$.

**2.** 0,5 pts

On note $A$ et $B$ les points d'affixes $a = 2 + 4i$ et $b = 2 - 4i$, et $R$ la rotation de centre $\Omega$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$. Montrer que l'écriture complexe de $R$ est $z' = -iz - 2 - 2i$.

INDICE

Écris la relation de la rotation avec $\omega = -2$, puis calcule $e^{-i\pi/2}$.

CORRIGÉ

**Écriture.** $M'(z')$ est l'image de $M(z)$ par $R$ si et seulement si $z' - \omega = e^{-i\pi/2}(z - \omega)$. Ici $\omega = -2$ et $e^{-i\pi/2} = -i$, donc :

$$z' + 2 = -i(z + 2).$$

**Développement.**

$$\begin{aligned}z' &= -iz - 2i - 2 \\ &= -iz - 2 - 2i.\end{aligned}$$

**Conclusion.** L'écriture complexe de $R$ est $z' = -iz - 2 - 2i$.

**3.** 0,5 pts

Montrer que $B$ est l'image de $A$ par $R$.

INDICE

Remplace $z$ par $a$ dans l'écriture de la question 2.

CORRIGÉ

On remplace $z$ par $a = 2 + 4i$ dans l'écriture de la question 2 :

$$\begin{aligned} &- i(2 + 4i) - 2 - 2i \\ &= -2i + 4 - 2 - 2i \\ &= 2 - 4i = b. \end{aligned}$$

**Conclusion.** $R(A) = B$ : le point $B$ est l'image de $A$ par $R$.

**4.** 0,75 pts

En déduire la nature du triangle $\Omega AB$.

INDICE

Traduis $R(A) = B$ par une égalité entre $b - \omega$ et $a - \omega$.

CORRIGÉ

**Quotient.** $a - \omega = 4 + 4i \neq 0$. D'après la question 3, $b - \omega = e^{-i\pi/2}(a - \omega)$, donc :

$$\frac{b - \omega}{a - \omega} = e^{-i\pi/2}.$$

**Nature.**

- $\left|e^{-i\pi/2}\right| = 1$, donc $\Omega B = \Omega A$ : le triangle est isocèle en $\Omega$.
- $\left(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}\right) \equiv \arg\left(e^{-i\pi/2}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ : il est rectangle en $\Omega$.

**Conclusion.** Le triangle $\Omega AB$ est **rectangle et isocèle en** $\Omega$.

**5.** 0,5 pts

Soit $C$ l'image du point $O$ par $R$. Calculer l'affixe $c$ de $C$.

INDICE

Remplace $z$ par $0$.

CORRIGÉ

On remplace $z$ par $0$ dans l'écriture de la question 2 :

$$\begin{aligned} c &= -i \times 0 - 2 - 2i \\ &= -2 - 2i. \end{aligned}$$

**Contrôle.** $\Omega O = |0 + 2| = 2$ et $\Omega C = |-2 - 2i + 2| = |-2i| = 2$.

**Conclusion.** Le point $C$ a pour affixe $c = -2 - 2i$.

**6.** 0,5 pts

Soit $D$ le point d'affixe $d = -6$. Calculer $\dfrac{d-b}{c-b}$, puis en déduire que les points $B$, $C$ et $D$ sont alignés.

INDICE

Calcule $d-b$ et $c-b$, puis écris le quotient $\dfrac{d-b}{c-b}$ sous forme algébrique : de quelle nature est-il ?

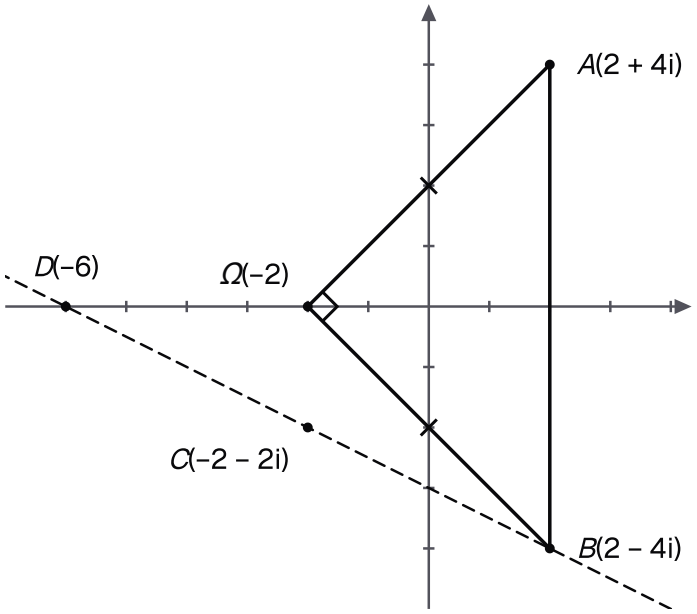
CORRIGÉ

**Calcul.** $d-b = -6-(2-4i) = -8+4i$ et $c-b = (-2-2i)-(2-4i) = -4+2i$. Donc $d-b = 2(c-b)$, avec $c-b \neq 0$, et :

$$\frac{d-b}{c-b} = 2.$$

**Déduction.** Ce quotient est réel, donc les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont colinéaires.

**Conclusion.** $\dfrac{d-b}{c-b} = 2$, et les points $B$, $C$ et $D$ sont **alignés**.




**Le triangle ΩAB rectangle isocèle en Ω, et les points B, C(−2 − 2i) et D(−6) sur une même droite.**