BURHAN

Nombres complexes : exercices, entraînement

2ème Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-experimentales/mathematiques/nombres-complexes/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Nombres complexes	Entraînement	8

Exercice 1

Des solutions d'une équation à leurs puissances réelles

On considère l'équation (E) : $z^2 + 6z + 12 = 0$, d'inconnue complexe z.

1.

Résoudre (E) dans $\mathbb{C}$. On note z_1 la solution de partie imaginaire positive et z_2 l'autre.

INDICE

Commence par le discriminant et son signe. Écris-le ensuite comme le carré d'un imaginaire pur.

2.

Écrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

INDICE

Le module de z_1 se simplifie en $2\sqrt{3}$. Pour l'angle, cherche un cosinus négatif et un sinus positif. Pour z_2, pense au conjugué.

3.

Déterminer les entiers naturels n non nuls pour lesquels z_1^n est un réel. Calculer z_1^6.

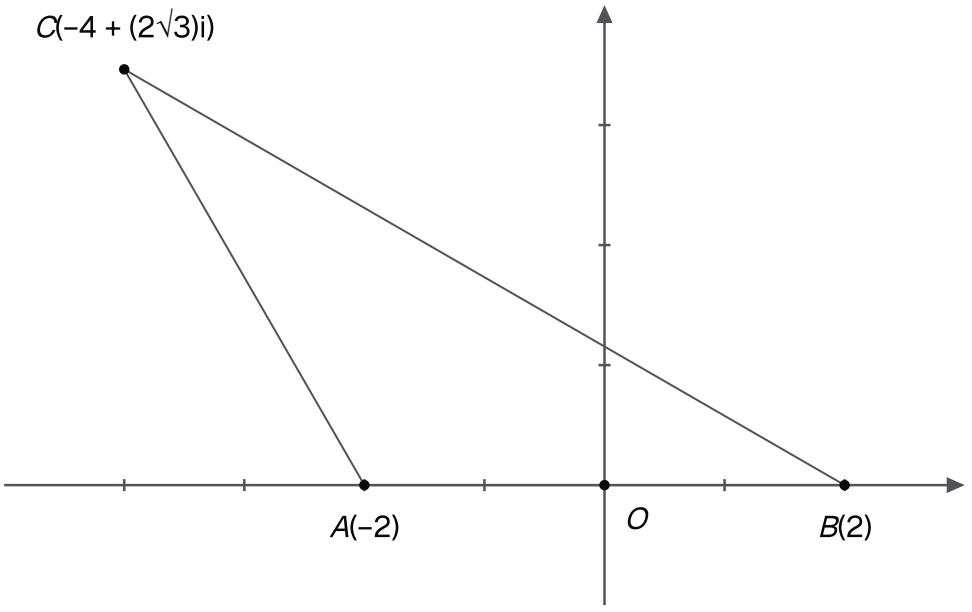
INDICE

z_1^n est non nul. Il est réel exactement quand son argument est un multiple de π. Utilise $\arg(z^n) \equiv n \arg z \ [2\pi]$.

Exercice 2

Un triangle isocèle qui n'est pas équilatéral

On considère les points A, B et C d'affixes $a = -2$, $b = 2$ et $c = -4 + 2i\sqrt{3}$.



Les trois points de l'exercice : A(−2) et B(2) sur l'axe réel, C(−4 + 2√3 i) en haut à gauche.

1.

Montrer que $\dfrac{c-a}{b-a} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, puis écrire ce nombre sous forme exponentielle.

INDICE

Ici $b - a$ est un réel : la division est directe. Pour la forme exponentielle, reconnais les valeurs remarquables de $\dfrac{2\pi}{3}$.

2.

En déduire la nature du triangle ABC.

INDICE

Le module du quotient compare AC et AB. Son argument mesure l'angle $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$. Donne une propriété par information.

3.

Calculer la longueur BC.

INDICE

Une distance est le module d'une différence d'affixes.

4.

Montrer que C est l'image de B par une rotation dont on précisera le centre et l'angle.

INDICE

Réécris le résultat de la question 1 sans fraction, puis compare avec $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$.

Exercice 3

Une rotation d'angle –π/2 : image, antécédent, point fixe

On note R la rotation de centre $\Omega(1 + 2i)$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

1.

Montrer que l'écriture complexe de R est $z' = -iz - 1 + 3i$.

INDICE

Pars de $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$ et calcule d'abord $e^{-i\pi/2}$.

2.

Calculer l'affixe de l'image O' du point O.

INDICE

Remplace z par 0 dans l'écriture de la question 1.

3.

Déterminer l'affixe du point G dont l'image par R est le point $D(4i)$.

INDICE

Cette fois, c'est z' qui est connu.

4.

Montrer que Ω est le seul point invariant par R.

INDICE

Un point est invariant quand $z' = z$. Résous $z = -iz - 1 + 3i$.

Exercice 4

Deux écritures d'un produit pour trouver cos(π/12)

On pose $s = \sqrt{3} + i$, $t = -1 + i$ et $p = st$.

1.

Écrire p sous forme algébrique.

INDICE

Développe, puis regroupe les termes réels et les termes en i.

2.

Écrire s, t puis p sous forme trigonométrique.

INDICE

Calcule module et argument de chaque facteur. Pour le produit, multiplie les modules et additionne les arguments.

3.

En déduire les valeurs exactes de $\cos\dfrac{11\pi}{12}$ et de $\sin\dfrac{11\pi}{12}$.

INDICE

Les deux écritures désignent le même nombre. Identifie la partie réelle de l'une avec celle de l'autre, puis la partie imaginaire.

4.

En déduire $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

INDICE

Remarque que $\dfrac{11\pi}{12} = \pi - \dfrac{\pi}{12}$. Rappelle-toi ce que deviennent cosinus et sinus de $\pi - x$.

5.

Bonus (hors des exigences observées dans les sujets consultés). À l'aide des formules d'Euler, montrer que pour tout réel x, $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos(2x)}{2}$. Vérifier ce résultat avec la valeur de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ trouvée.

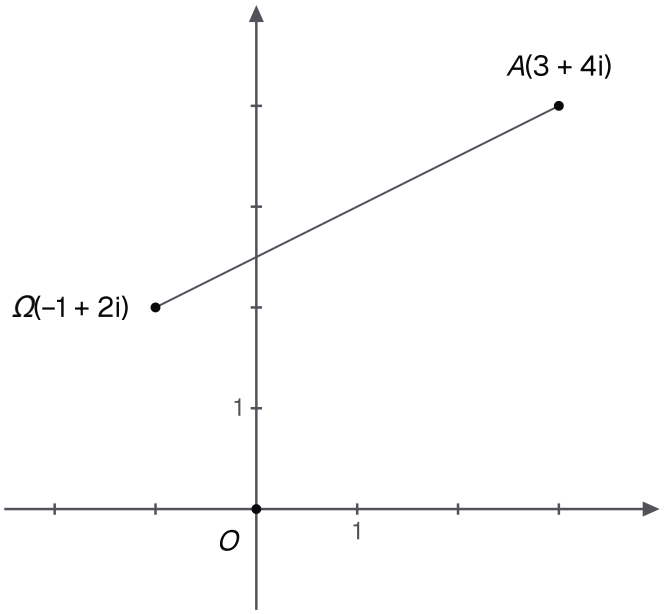
INDICE

Remplace $\cos x$ par $\dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$, développe le carré, puis regroupe $e^{2ix} + e^{-2ix}$.

Exercice 5

Une homothétie de rapport −2, puis une translation

On note h l'homothétie de centre $\Omega(-1+2i)$ et de rapport -2, et A le point d'affixe $3+4i$.



Le centre Ω(−1 + 2i) de l'homothétie h et le point A(3 + 4i).

1.

Montrer que l'écriture complexe de h est $z' = -2z - 3 + 6i$.

INDICE

L'écriture d'une homothétie de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport k est $z' - \omega = k(z - \omega)$.

2.

Calculer l'affixe de l'image A' de A par h.

INDICE

Remplace z par $3+4i$.

3.

Calculer $\dfrac{z_{A'} - \omega}{z_A - \omega}$. En déduire que Ω, A et A' sont alignés, et comparer $\Omega A'$ et ΩA.

INDICE

Calcule les deux différences, puis le quotient. Le module du quotient compare les longueurs.

4.

On note t la translation de vecteur $\overrightarrow{\Omega A}$. Calculer l'affixe de l'image de A' par t.

INDICE

L'affixe du vecteur $\overrightarrow{\Omega A}$ a déjà été calculée à la question 3.

Exercice 6

Une médiatrice, un cercle caché derrière un conjugué

On note (Δ) l'ensemble des points $M(z)$ tels que $|z+3| = |z-1-4i|$, et (Γ) l'ensemble des points $M(z)$ tels que $|\overline{z}+1-3i| = 5$.

1.

Déterminer l'ensemble (Δ).

INDICE

Écris $z+3$ sous la forme $z-z_A$ et $z-1-4i$ sous la forme $z-z_B$.

2.

Montrer que, pour tout nombre complexe z, $|\overline{z}+1-3i| = |z+1+3i|$. En déduire l'ensemble (Γ).

INDICE

Reconnais dans $\overline{z}+1-3i$ le conjugué d'un nombre simple. Un nombre et son conjugué ont le même module.

3.

Vérifier que les points $K(-1+2i)$ et $L(4-3i)$ appartiennent à la fois à (Δ) et à (Γ).

INDICE

Pour chaque point, calcule les deux distances qui définissent (Δ), puis sa distance à Ω.

Exercice 7

Approfondissement : une équation de degré 3 qui se ramène au second degré

Pour tout nombre complexe z, on pose $P(z) = z^3 + z^2 + 7z - 9$.

1.

Calculer $P(1)$.

INDICE

Remplace z par 1.

2.

Déterminer les réels α et β tels que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z-1)\left(z^2 + \alpha z + \beta\right)$.

INDICE

Développe le membre de droite, puis identifie les coefficients de z^2, de z et le terme constant.

3.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

INDICE

Un produit est nul quand l'un de ses facteurs est nul. Le second facteur donne une équation du second degré.

4.

Calculer les modules de z_1 et de z_2. Que peut-on dire de leurs images dans le plan ?

INDICE

Deux nombres conjugués ont le même module. Un module est une distance à l'origine.

Exercice 8

Une équation où z et son conjugué se mélangent

On cherche les nombres complexes z tels que $2z + i\,\overline{z} = 7 + 2i$.

1.

On pose $z = x + iy$, avec x et y réels. Écrire $2z + i\,\overline{z}$ sous forme algébrique.

INDICE

Remplace $\overline{z}$ par $x - iy$, puis développe $i(x - iy)$ avec $i^2 = -1$.

2.

En déduire l'unique solution de l'équation, puis la vérifier.

INDICE

Identifie les parties réelles et les parties imaginaires : tu obtiens un système de deux équations.