BURHAN

Nombres complexes : exercices, entraînement

2ème Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-experimentales/mathematiques/nombres-complexes/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Nombres complexes	Entraînement	8

Exercice 1

Des solutions d'une équation à leurs puissances réelles

On considère l'équation (E) : $z^2 + 6z + 12 = 0$, d'inconnue complexe z.

1.

Résoudre (E) dans $\mathbb{C}$. On note z_1 la solution de partie imaginaire positive et z_2 l'autre.

INDICE

Commence par le discriminant et son signe. Écris-le ensuite comme le carré d'un imaginaire pur.

CORRIGÉ

Discriminant.

$$\begin{aligned}\Delta &= 6^2 - 4 \times 1 \times 12 \\ &= 36 - 48 = -12.\end{aligned}$$

Ainsi $\Delta < 0$, et $-12 = \left(2i\sqrt{3}\right)^2$.

Solutions. L'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$$\begin{aligned}z_1 &= \frac{-6 + 2i\sqrt{3}}{2} = -3 + i\sqrt{3}, \\ z_2 &= \frac{-6 - 2i\sqrt{3}}{2} = -3 - i\sqrt{3}.\end{aligned}$$

Contrôle. On remplace z par z_1. D'abord :

$$\begin{aligned}z_1^2 &= 9 - 6i\sqrt{3} - 3 \\ &= 6 - 6i\sqrt{3}.\end{aligned}$$

Puis :

$$\begin{aligned}&z_1^2 + 6z_1 + 12 \\ &= 6 - 6i\sqrt{3} \\ &\quad - 18 + 6i\sqrt{3} + 12 \\ &= 0.\end{aligned}$$

Conclusion. Dans $\mathbb{C}$, (E) a deux solutions : $z_1 = -3 + i\sqrt{3}$ et $z_2 = -3 - i\sqrt{3}$.

2.

Écrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

INDICE

Le module de z_1 se simplifie en $2\sqrt{3}$. Pour l'angle, cherche un cosinus négatif et un sinus positif. Pour z_2, pense au conjugué.

CORRIGÉ

Module. $|z_1| = \sqrt{(-3)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

Angle. On cherche un réel θ tel que :

$$\cos\theta = \frac{-3}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}.$$

L'angle $\dfrac{5\pi}{6}$ convient : $\arg z_1 \equiv \dfrac{5\pi}{6}\ [2\pi]$. Donc :

$$z_1 = 2\sqrt{3}\, e^{5i\pi/6}.$$

Conjugué. $z_2 = \overline{z_1}$ a le même module et un argument opposé :

$$z_2 = 2\sqrt{3}\, e^{-5i\pi/6}.$$

Conclusion. $z_1 = 2\sqrt{3}\, e^{5i\pi/6}$ et $z_2 = 2\sqrt{3}\, e^{-5i\pi/6}$.

3.

Déterminer les entiers naturels n non nuls pour lesquels z_1^n est un réel. Calculer z_1^6.

INDICE

z_1^n est non nul. Il est réel exactement quand son argument est un multiple de π. Utilise $\arg(z^n) \equiv n \arg z \ [2\pi]$.

CORRIGÉ

Argument de z_1^n. Soit n un entier naturel non nul. Comme $z_1 \neq 0$, on a $z_1^n \neq 0$ et :

$$\arg\left(z_1^n\right) \equiv \frac{5n\pi}{6} \ [2\pi].$$

Condition. Pour un complexe non nul, être réel revient à avoir un argument multiple de π. Donc z_1^n est réel si et seulement s'il existe un entier k tel que $\dfrac{5n\pi}{6} = k\pi$, c'est-à-dire $5n = 6k$: le nombre $\dfrac{5n}{6}$ doit être un entier.

Recherche des entiers n. On écrit $n = 6p + r$, avec p entier et $r \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Alors :

$$\frac{5n}{6} = 5p + \frac{5r}{6}.$$

Pour $r = 1, 2, 3, 4, 5$, le nombre $\dfrac{5r}{6}$ vaut $\dfrac{5}{6}$, $\dfrac{10}{6}$, $\dfrac{15}{6}$, $\dfrac{20}{6}$ ou $\dfrac{25}{6}$: aucun n'est entier. Seul $r = 0$ convient.

Calcul de z_1^6. D'après la formule de Moivre :

$$\begin{aligned} z_1^6 &= \left(2\sqrt{3}\right)^6 e^{30i\pi/6} \\ &= 1728\, e^{5i\pi} \\ &= 1728 \times (-1) \\ &= -1728. \end{aligned}$$

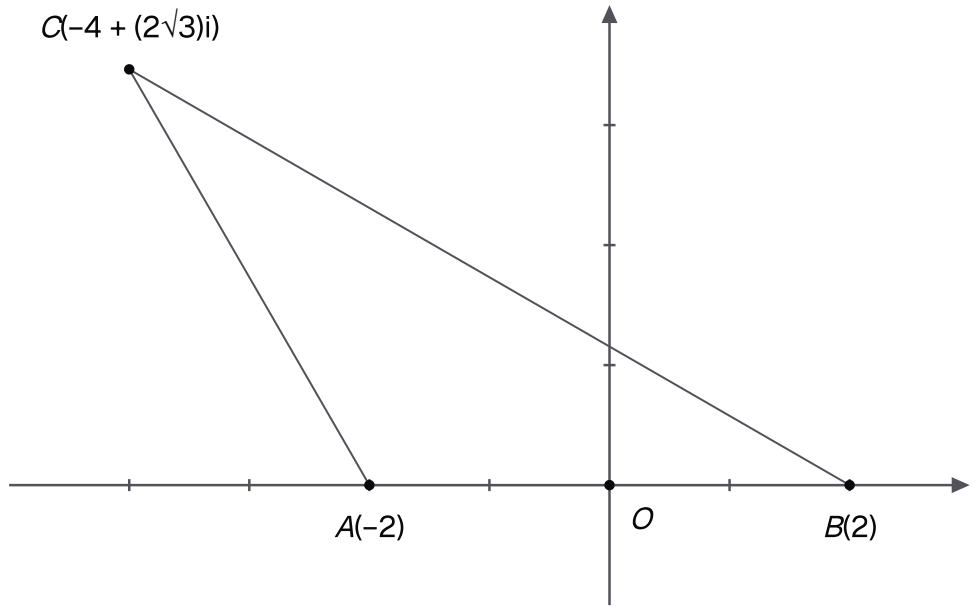
En effet $\left(2\sqrt{3}\right)^6 = 2^6 \times 3^3 = 64 \times 27 = 1728$, et $5\pi \equiv \pi \ [2\pi]$.

Conclusion. z_1^n est réel si et seulement si n est un **multiple de** 6, et $z_1^6 = -1728$.

Exercice 2

Un triangle isocèle qui n'est pas équilatéral

On considère les points A, B et C d'affixes $a = -2$, $b = 2$ et $c = -4 + 2i\sqrt{3}$.



Les trois points de l'exercice : A(−2) et B(2) sur l'axe réel, C(−4 + 2√3 i) en haut à gauche.

1.

Montrer que $\dfrac{c-a}{b-a} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, puis écrire ce nombre sous forme exponentielle.

INDICE

Ici $b - a$ est un réel : la division est directe. Pour la forme exponentielle, reconnais les valeurs remarquables de $\dfrac{2\pi}{3}$.

CORRIGÉ

Quotient. $b - a = 4$ et $c - a = -2 + 2i\sqrt{3}$. Le dénominateur est réel, donc :

$$\begin{aligned}\frac{c-a}{b-a} &= \frac{-2 + 2i\sqrt{3}}{4} \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i.\end{aligned}$$

Forme exponentielle. Le module de ce nombre vaut $\sqrt{\dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}} = 1$. De plus $\cos\dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}$ et $\sin\dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Donc :

$$\frac{c-a}{b-a} = e^{2i\pi/3}.$$

Conclusion. $\dfrac{c-a}{b-a} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, et sa forme exponentielle est $e^{2i\pi/3}$.

2.

En déduire la nature du triangle ABC.

INDICE

Le module du quotient compare AC et AB. Son argument mesure l'angle $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$. Donne une propriété par information.

CORRIGÉ

Longueurs. Le module du quotient vaut $\dfrac{|c-a|}{|b-a|} = \dfrac{AC}{AB}$. Il est égal à 1, donc $AC = AB$: le triangle est **isocèle en** A.

Angle en A**.**

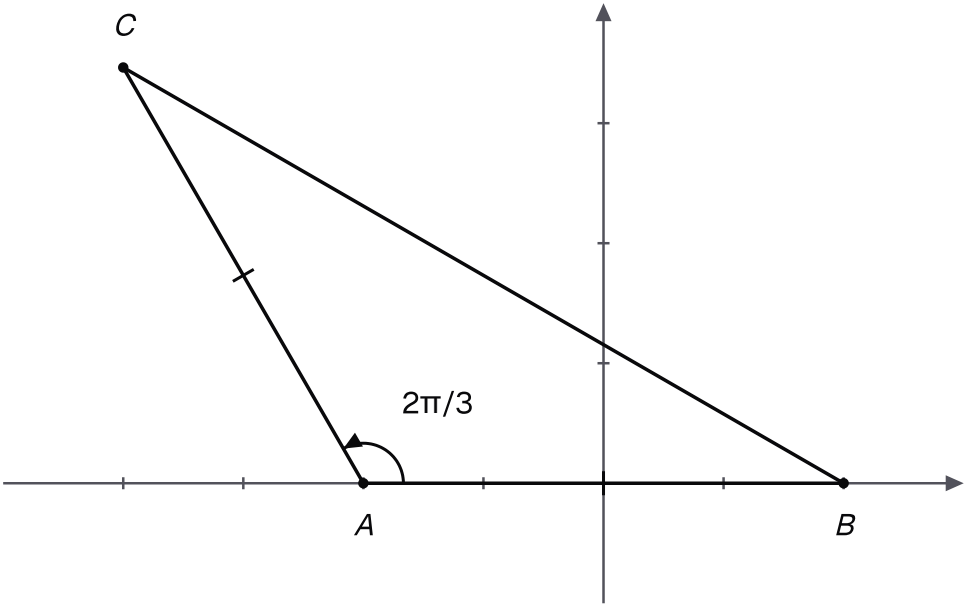
$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) &\equiv \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \\ &\equiv \frac{2\pi}{3}\ [2\pi].\end{aligned}$$

Autres angles. Les deux angles à la base d'un triangle isocèle sont égaux ; chacun mesure :

$$\frac{1}{2}\left(\pi - \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

Aucun angle n'est droit : le triangle n'est **pas rectangle**. Il n'est pas non plus équilatéral, car un triangle équilatéral a trois angles de $\dfrac{\pi}{3}$.

Conclusion. ABC est un triangle isocèle en A, dont l'angle au sommet mesure $\dfrac{2\pi}{3}$; il n'est ni rectangle, ni équilatéral.



Le triangle ABC isocèle en A : AB = AC, et l'angle orienté de AB vers AC mesure 2π/3.

3.

Calculer la longueur BC.

INDICE

Une distance est le module d'une différence d'affixes.

CORRIGÉ

La distance BC est le module de $c-b=-6+2i\sqrt{3}$:

$$\begin{aligned} BC &= \left|-6+2i\sqrt{3}\right| \\ &= \sqrt{36+12} \\ &= \sqrt{48} = 4\sqrt{3}. \end{aligned}$$

On a aussi $AB=|4|=4$: le côté $[BC]$ est le plus long, ce qui est normal en face d'un angle obtus.

Conclusion. $BC=4\sqrt{3}$.

4.

Montrer que C est l'image de B par une rotation dont on précisera le centre et l'angle.

INDICE

Réécris le résultat de la question 1 sans fraction, puis compare avec $z'-\omega=e^{i\theta}(z-\omega)$.

CORRIGÉ

D'après la question 1, $\dfrac{c-a}{b-a}=e^{2i\pi/3}$, donc :

$$c-a=e^{2i\pi/3}(b-a).$$

La rotation de centre $A(a)$ et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$ transforme $M(z)$ en $M'(z')$ tel que :

$$z'-a=e^{2i\pi/3}(z-a).$$

L'égalité obtenue est exactement cette relation pour $z=b$ et $z'=c$.

Conclusion. C est l'image de B par la **rotation de centre A et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$**.

Exercice 3

Une rotation d'angle –π/2 : image, antécédent, point fixe

On note R la rotation de centre $\Omega(1+2i)$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

1.

Montrer que l'écriture complexe de R est $z' = -iz - 1 + 3i$.

INDICE

Pars de $z' - \omega = e^{i\theta}(z-\omega)$ et calcule d'abord $e^{-i\pi/2}$.

CORRIGÉ

Écriture d'une rotation. La rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ a pour écriture complexe $z' - \omega = e^{i\theta}(z-\omega)$. Ici $\omega = 1+2i$ et :

$$\begin{aligned} e^{-i\pi/2} &= \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) \\ &\quad + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \\ &= -i. \end{aligned}$$

Développement.

$$\begin{aligned} z' &= 1 + 2i - i\big(z - 1 - 2i\big) \\ &= 1 + 2i - iz + i + 2i^2 \\ &= -iz - 1 + 3i. \end{aligned}$$

Conclusion. L'écriture complexe de R est $z' = -iz - 1 + 3i$.

2.

Calculer l'affixe de l'image O' du point O.

INDICE

Remplace z par 0 dans l'écriture de la question 1.

CORRIGÉ

On remplace z par 0 dans l'écriture de la question 1 :

$$\begin{aligned} z_{O'} &= -i \times 0 - 1 + 3i \\ &= -1 + 3i. \end{aligned}$$

Contrôle. $\Omega O = |-1-2i| = \sqrt{5}$ et $\Omega O' = |-2+i| = \sqrt{5}$.

Conclusion. L'image O' du point O a pour affixe $-1+3i$.

3.

Déterminer l'affixe du point G dont l'image par R est le point $D(4i)$.

INDICE

Cette fois, c'est z' qui est connu.

CORRIGÉ

Équation. On cherche l'affixe z de G telle que $R(G) = D$, c'est-à-dire $4i = -iz - 1 + 3i$, soit $-iz = 1 + i$.

Résolution. On multiplie les deux membres par i ; comme $i \times (-i) = 1$:

$$z = i(1 + i) = i + i^2 = -1 + i.$$

Contrôle.

$$\begin{aligned} &- i(-1 + i) - 1 + 3i \\ &= i + 1 - 1 + 3i \\ &= 4i. \end{aligned}$$

Conclusion. Le point G a pour affixe $-1 + i$.

4.

Montrer que Ω est le seul point invariant par R.

INDICE

Un point est invariant quand $z' = z$. Résous $z = -iz - 1 + 3i$.

CORRIGÉ

Équation. Le point $M(z)$ est invariant par R si et seulement si $z = -iz - 1 + 3i$, c'est-à-dire $(1 + i)z = -1 + 3i$.

Résolution. $1 + i \neq 0$, donc l'équation a une seule solution :

$$\begin{aligned} z &= \frac{-1 + 3i}{1 + i} \\ &= \frac{(-1 + 3i)(1 - i)}{2} \\ &= \frac{-1 + i + 3i - 3i^2}{2} \\ &= \frac{2 + 4i}{2} = 1 + 2i. \end{aligned}$$

Conclusion. Le seul point invariant par R a pour affixe $1 + 2i$: c'est le centre Ω.

Exercice 4

Deux écritures d'un produit pour trouver cos(π/12)

On pose $s = \sqrt{3} + i$, $t = -1 + i$ et $p = st$.

1.

Écrire p sous forme algébrique.

INDICE

Développe, puis regroupe les termes réels et les termes en i.

CORRIGÉ

On développe, puis on regroupe les termes réels et les termes en i :

$$\begin{aligned} p &= \left(\sqrt{3} + i\right)(-1 + i) \\ &= -\sqrt{3} + i\sqrt{3} - i + i^2 \\ &= \left(-\sqrt{3} - 1\right) \\ &\quad + i\left(\sqrt{3} - 1\right). \end{aligned}$$

Conclusion. La forme algébrique de p est $\left(-\sqrt{3} - 1\right) + i\left(\sqrt{3} - 1\right)$.

2.

Écrire s, t puis p sous forme trigonométrique.

INDICE

Calcule module et argument de chaque facteur. Pour le produit, multiplie les modules et additionne les arguments.

CORRIGÉ

Facteur s. $|s| = \sqrt{3+1} = 2$, $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{1}{2}$. Donc $\arg s \equiv \dfrac{\pi}{6}\ [2\pi]$ et :

$$s = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right).$$

Facteur t. $|t| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, $\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Donc $\arg t \equiv \dfrac{3\pi}{4}\ [2\pi]$ et :

$$t = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right).$$

Produit. s et t sont non nuls. On multiplie leurs modules et on additionne leurs arguments :

$$|p| = 2\times\sqrt{2} = 2\sqrt{2},$$
$$\arg p \equiv \frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{4} \equiv \frac{11\pi}{12}\ [2\pi].$$

Donc :

$$p = 2\sqrt{2}\Big(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\Big).$$

Conclusion. Les formes trigonométriques de s, t et p sont celles écrites ci-dessus, de modules 2, $\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$ et d'arguments $\dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{3\pi}{4}$, $\dfrac{11\pi}{12}$.

3.

En déduire les valeurs exactes de $\cos\dfrac{11\pi}{12}$ et de $\sin\dfrac{11\pi}{12}$.

INDICE

Les deux écritures désignent le même nombre. Identifie la partie réelle de l'une avec celle de l'autre, puis la partie imaginaire.

CORRIGÉ

Identification. Les deux écritures de p (questions 1 et 2) désignent le même nombre. Par unicité de la forme algébrique :

$$2\sqrt{2}\cos\frac{11\pi}{12} = -\sqrt{3}-1,$$
$$2\sqrt{2}\sin\frac{11\pi}{12} = \sqrt{3}-1.$$

Valeurs. On divise par $2\sqrt{2}$, puis on multiplie le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{2}$:

$$\begin{aligned}\cos\frac{11\pi}{12} &= \frac{-\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\\ &= -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\sin\frac{11\pi}{12} &= \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\\ &= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

Conclusion. $\cos\dfrac{11\pi}{12} = -\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\dfrac{11\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

4.

En déduire $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

INDICE

Remarque que $\dfrac{11\pi}{12} = \pi - \dfrac{\pi}{12}$. Rappelle-toi ce que deviennent cosinus et sinus de $\pi - x$.

CORRIGÉ

Pour tout réel x, $\cos(\pi - x) = -\cos x$ et $\sin(\pi - x) = \sin x$. Avec $x = \dfrac{11\pi}{12}$, on a $\pi - x = \dfrac{\pi}{12}$, donc :

$$\cos\frac{\pi}{12} = -\cos\frac{11\pi}{12},$$
$$\sin\frac{\pi}{12} = \sin\frac{11\pi}{12}.$$

Avec la question 3 :

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},$$
$$\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Contrôle de signe. $\dfrac{\pi}{12}$ est entre 0 et $\dfrac{\pi}{2}$: les deux valeurs doivent être positives, et elles le sont.

Conclusion. $\cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

5.

Bonus (hors des exigences observées dans les sujets consultés). À l'aide des formules d'Euler, montrer que pour tout réel x, $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$. Vérifier ce résultat avec la valeur de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ trouvée.

INDICE

Remplace $\cos x$ par $\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$, développe le carré, puis regroupe $e^{2ix}+e^{-2ix}$.

CORRIGÉ

Formule d'Euler. Pour tout réel x, $\cos x = \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$. Soit x un réel :

$$\begin{aligned}\cos^2 x &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{e^{2ix}+2+e^{-2ix}}{4} \\ &= \frac{2\cos(2x)+2}{4} \\ &= \frac{1+\cos(2x)}{2}.\end{aligned}$$

On a utilisé $e^{ix}e^{-ix}=1$ et $e^{2ix}+e^{-2ix}=2\cos(2x)$.

Vérification. D'une part :

$$\begin{aligned}\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2 &= \frac{8+2\sqrt{12}}{16} \\ &= \frac{2+\sqrt{3}}{4}.\end{aligned}$$

D'autre part, avec $\cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$:

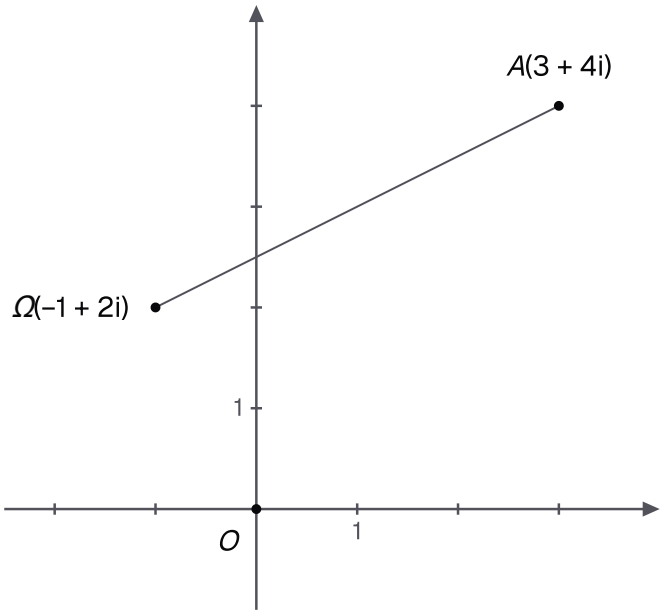
$$\frac{1+\cos\frac{\pi}{6}}{2} = \frac{2+\sqrt{3}}{4}.$$

Conclusion. Pour tout réel x, $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$, et la valeur de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ trouvée vérifie bien cette égalité.

Exercice 5

Une homothétie de rapport −2, puis une translation

On note h l'homothétie de centre $\Omega(-1+2i)$ et de rapport -2, et A le point d'affixe $3+4i$.



Le centre Ω(−1 + 2i) de l'homothétie h et le point A(3 + 4i).

1.

Montrer que l'écriture complexe de h est $z' = -2z - 3 + 6i$.

INDICE

L'écriture d'une homothétie de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport k est $z' - \omega = k(z - \omega)$.

CORRIGÉ

L'homothétie de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport k a pour écriture complexe $z' - \omega = k(z - \omega)$. Ici $\omega = -1 + 2i$ et $k = -2$, ce qui donne $z' + 1 - 2i = -2(z + 1 - 2i)$. Donc :

$$\begin{aligned} z' &= -1 + 2i - 2z - 2 + 4i \\ &= -2z - 3 + 6i. \end{aligned}$$

Conclusion. L'écriture complexe de h est $z' = -2z - 3 + 6i$.

2.

Calculer l'affixe de l'image A' de A par h.

INDICE

Remplace z par $3+4i$.

CORRIGÉ

On remplace z par $z_A = 3+4i$:

$$\begin{aligned} z_{A'} &= -2(3+4i) - 3 + 6i \\ &= -6 - 8i - 3 + 6i \\ &= -9 - 2i. \end{aligned}$$

Conclusion. L'image A' de A par h a pour affixe $-9-2i$.

3.

Calculer $\dfrac{z_{A'}-\omega}{z_A-\omega}$. En déduire que Ω, A et A' sont alignés, et comparer $\Omega A'$ et ΩA.

INDICE

Calcule les deux différences, puis le quotient. Le module du quotient compare les longueurs.

CORRIGÉ

Différences. $z_A-\omega=(3+4i)-(-1+2i)=4+2i$ et $z_{A'}-\omega=(-9-2i)-(-1+2i)=-8-4i$, soit $-2(4+2i)$.

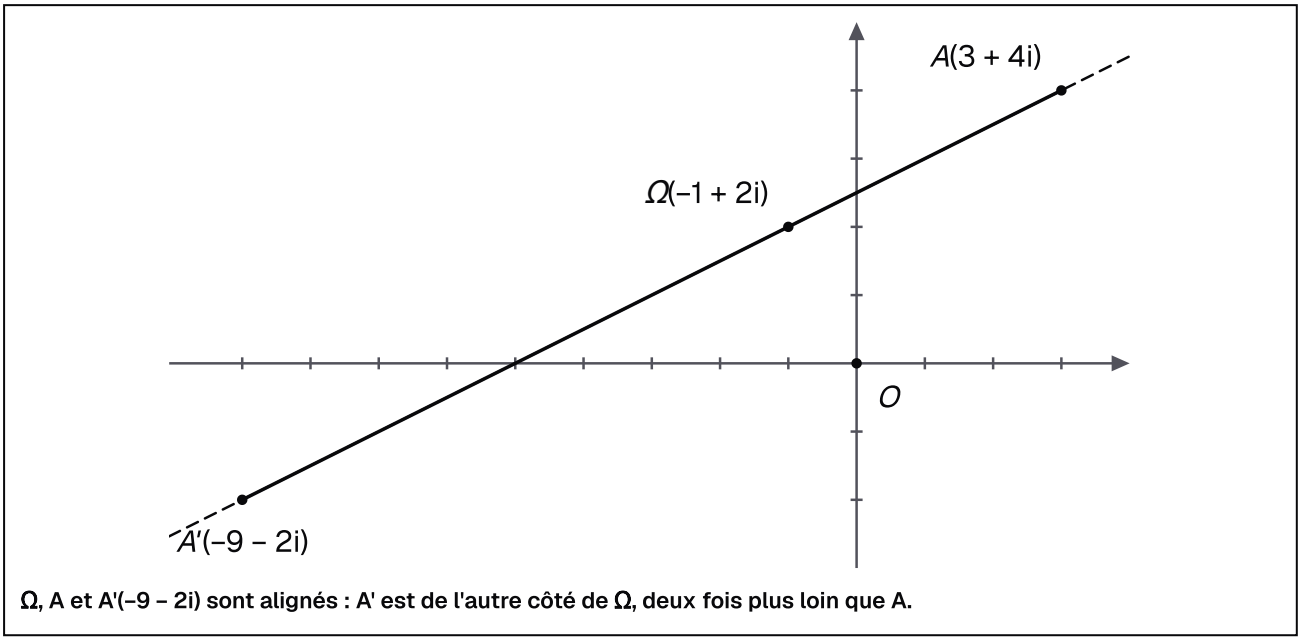
Quotient.

$$\frac{z_{A'}-\omega}{z_A-\omega}=\frac{-2(4+2i)}{4+2i}=-2.$$

Alignement. Ce quotient est **réel**, donc les vecteurs $\overrightarrow{\Omega A}$ et $\overrightarrow{\Omega A'}$ sont colinéaires : Ω, A et A' sont **alignés**.

Longueurs. Le module du quotient vaut $|-2|=2$, donc $\Omega A'=2\,\Omega A$. En effet $\Omega A=|4+2i|=2\sqrt{5}$ et $\Omega A'=|-8-4i|=4\sqrt{5}$. Le signe négatif place A et A' de part et d'autre de Ω.

Conclusion. $\dfrac{z_{A'}-\omega}{z_A-\omega}=-2$: les points Ω, A et A' sont alignés, et $\Omega A'=2\,\Omega A$.



Ω, A et A'(–9 – 2i) sont alignés : A' est de l'autre côté de Ω, deux fois plus loin que A.

4.

On note t la translation de vecteur $\overrightarrow{\Omega A}$. Calculer l'affixe de l'image de A' par t.

INDICE

L'affixe du vecteur $\overrightarrow{\Omega A}$ a déjà été calculée à la question 3.

CORRIGÉ

L'affixe de $\overrightarrow{\Omega A}$ est $z_A - \omega = 4 + 2i$ (question 3). L'écriture complexe de t est donc $z' = z + 4 + 2i$. Pour le point A' :

$$z' = -9 - 2i + 4 + 2i = -5.$$

Conclusion. L'image de A' par t a pour affixe -5.

Exercice 6

Une médiatrice, un cercle caché derrière un conjugué

On note (Δ) l'ensemble des points $M(z)$ tels que $|z+3| = |z-1-4i|$, et (Γ) l'ensemble des points $M(z)$ tels que $|\overline{z}+1-3i| = 5$.

1.

Déterminer l'ensemble (Δ).

INDICE

Écris $z+3$ sous la forme $z-z_A$ et $z-1-4i$ sous la forme $z-z_B$.

CORRIGÉ

Soient A et B les points d'affixes -3 et $1+4i$. Pour tout point $M(z)$:

$$\begin{aligned} |z+3| &= |z-(-3)| \\ &= AM, \\ |z-1-4i| &= |z-(1+4i)| \\ &= BM. \end{aligned}$$

Donc :

$$|z+3| = |z-1-4i| \iff AM = BM.$$

Conclusion. (Δ) est la **médiatrice du segment** $[AB]$, où $A(-3)$ et $B(1+4i)$.

2.

Montrer que, pour tout nombre complexe z, $|\overline{z}+1-3i| = |z+1+3i|$. En déduire l'ensemble (Γ).

INDICE

Reconnais dans $\overline{z}+1-3i$ le conjugué d'un nombre simple. Un nombre et son conjugué ont le même module.

CORRIGÉ

Égalité des modules. Soit z un nombre complexe. Le conjugué d'une somme est la somme des conjugués, donc $\overline{z+1+3i} = \overline{z}+1-3i$. Or un nombre et son conjugué ont le même module :

$$|\overline{z}+1-3i| = |z+1+3i|.$$

Ensemble. Soit Ω le point d'affixe $-1-3i$. Alors $|z+1+3i| = |z-(-1-3i)| = \Omega M$, donc :

$$M \in (\Gamma) \iff \Omega M = 5.$$

Conclusion. Pour tout nombre complexe z, $|\overline{z}+1-3i| = |z+1+3i|$, et (Γ) est le **cercle de centre** $\Omega(-1-3i)$ **et de rayon** 5.

3.

Vérifier que les points $K(-1+2i)$ et $L(4-3i)$ appartiennent à la fois à (Δ) et à (Γ).

INDICE

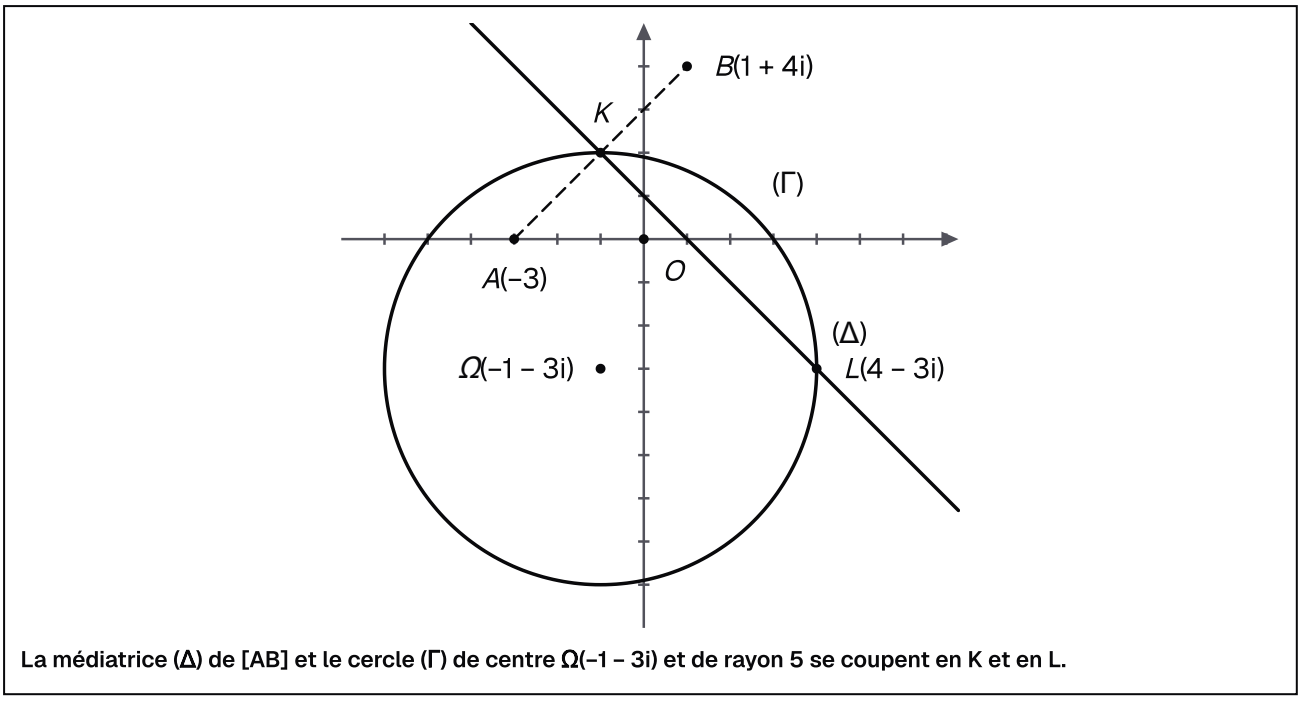
Pour chaque point, calcule les deux distances qui définissent (Δ), puis sa distance à Ω.

CORRIGÉ

Le point K. $AK = |2+2i| = 2\sqrt{2}$ et $BK = |-2-2i| = 2\sqrt{2}$: K est équidistant de A et de B, donc $K \in (\Delta)$. De plus $\Omega K = |5i| = 5$, donc $K \in (\Gamma)$.

Le point L. $AL = |7-3i| = \sqrt{58}$ et $BL = |3-7i| = \sqrt{58}$, donc $L \in (\Delta)$. De plus $\Omega L = |5| = 5$, donc $L \in (\Gamma)$.

Conclusion. Les points K et L appartiennent à la fois à la médiatrice (Δ) et au cercle (Γ).



La médiatrice (Δ) de [AB] et le cercle (Γ) de centre Ω(−1 − 3i) et de rayon 5 se coupent en K et en L.

Exercice 7

Approfondissement : une équation de degré 3 qui se ramène au second degré

Pour tout nombre complexe z, on pose $P(z) = z^3 + z^2 + 7z - 9$.

1.

Calculer $P(1)$.

INDICE

Remplace z par 1.

CORRIGÉ

$$\begin{aligned} P(1) &= 1^3 + 1^2 + 7 \times 1 - 9 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Conclusion. $P(1) = 0$: le nombre 1 est une **racine** de P.

2.

Déterminer les réels α et β tels que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z-1)\left(z^2 + \alpha z + \beta\right)$.

INDICE

Développe le membre de droite, puis identifie les coefficients de z^2, de z et le terme constant.

CORRIGÉ

Développement. Pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} &(z-1)\left(z^2 + \alpha z + \beta\right) \\ &= z^3 + \alpha z^2 + \beta z \\ &\quad - z^2 - \alpha z - \beta \\ &= z^3 + (\alpha - 1)z^2 \\ &\quad + (\beta - \alpha)z - \beta. \end{aligned}$$

Identification. On identifie les coefficients avec ceux de $z^3 + z^2 + 7z - 9$:

$$\begin{cases} \alpha - 1 = 1 \\ \beta - \alpha = 7 \\ -\beta = -9 \end{cases}$$

La première équation donne $\alpha = 2$, la troisième $\beta = 9$, et la deuxième est alors vérifiée : $9 - 2 = 7$.

Conclusion. $\alpha = 2$ et $\beta = 9$: pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z-1)\left(z^2 + 2z + 9\right)$.

3.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

INDICE

Un produit est nul quand l'un de ses facteurs est nul. Le second facteur donne une équation du second degré.

CORRIGÉ

Produit nul. D'après la question 2, $P(z)$ est le produit de $z - 1$ par $z^2 + 2z + 9$: il est nul exactement lorsque l'un de ces deux facteurs est nul. Donc $P(z) = 0$ équivaut à $z = 1$ ou $z^2 + 2z + 9 = 0$.

Discriminant. Pour $z^2 + 2z + 9 = 0$: $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 9 = -32$. Ainsi $\Delta < 0$, et $-32 = \left(4i\sqrt{2}\right)^2$.

Solutions du second facteur.

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{-2 - 4i\sqrt{2}}{2} \\ &= -1 - 2i\sqrt{2}, \\ z_2 &= \frac{-2 + 4i\sqrt{2}}{2} \\ &= -1 + 2i\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble des solutions de $P(z) = 0$ est $S = \left\{1\,;\,-1 - 2i\sqrt{2}\,;\,-1 + 2i\sqrt{2}\right\}$.

4.

Calculer les modules de z_1 et de z_2. Que peut-on dire de leurs images dans le plan ?

INDICE

Deux nombres conjugués ont le même module. Un module est une distance à l'origine.

CORRIGÉ

Modules. $z_2 = \overline{z_1}$, donc $|z_2| = |z_1|$, et :

$$\begin{aligned} |z_1| &= \sqrt{(-1)^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{9} = 3. \end{aligned}$$

Images. Les images M_1 et M_2 de z_1 et z_2 vérifient $OM_1 = OM_2 = 3$. Elles sont aussi symétriques par rapport à l'axe réel, car $z_2 = \overline{z_1}$.

Conclusion. $|z_1| = |z_2| = 3$: les images de z_1 et z_2 sont sur le **cercle de centre O et de rayon 3**, symétriques par rapport à l'axe réel.

Exercice 8

Une équation où z et son conjugué se mélangent

On cherche les nombres complexes z tels que $2z + i\,\overline{z} = 7 + 2i$.

1.

On pose $z = x + iy$, avec x et y réels. Écrire $2z + i\,\overline{z}$ sous forme algébrique.

INDICE

Remplace $\overline{z}$ par $x - iy$, puis développe $i(x - iy)$ avec $i^2 = -1$.

CORRIGÉ

On a $\overline{z} = x - iy$, donc :

$$\begin{aligned} i\,\overline{z} &= ix - i^2 y \\ &= y + ix. \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} &2z + i\,\overline{z} \\ &= 2x + 2iy + y + ix \\ &= (2x + y) + i(x + 2y). \end{aligned}$$

Les nombres $2x + y$ et $x + 2y$ sont réels : c'est bien la forme algébrique.

Conclusion. $2z + i\,\overline{z} = (2x + y) + i(x + 2y)$.

2.

En déduire l'unique solution de l'équation, puis la vérifier.

INDICE

Identifie les parties réelles et les parties imaginaires : tu obtiens un système de deux équations.

CORRIGÉ

Système. D'après la question 1, l'équation s'écrit $(2x + y) + i(x + 2y) = 7 + 2i$. Comme $2x + y$ et $x + 2y$ sont réels, on identifie les parties réelles et les parties imaginaires :

$$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$$

Résolution. La première équation donne $y = 7 - 2x$. Dans la seconde : $x + 14 - 4x = 2$, soit $-3x = -12$. Donc $x = 4$, puis $y = 7 - 8 = -1$.

Vérification.

$$\begin{aligned} &2(4 - i) + i(4 + i) \\ &= 8 - 2i + 4i - 1 \\ &= 7 + 2i. \end{aligned}$$

Conclusion. L'unique solution de l'équation est $z = 4 - i$.