BURHAN

Nombres complexes : exercices, application

2ème Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-experimentales/mathematiques/nombres-complexes/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Nombres complexes	Application	10

Exercice 1

Premiers calculs sous forme algébrique

On donne les nombres complexes $z = 4 - 3i$ et $w = -1 + 2i$.

1.

Donner $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(z)$, $\mathrm{Re}(w)$ et $\mathrm{Im}(w)$.

INDICE

La partie imaginaire est le nombre réel placé devant i. Elle ne contient jamais la lettre i.

2.

Calculer $z + w$ et $z - 2w$ sous forme algébrique.

INDICE

Regroupe d'un côté les parties réelles, de l'autre les parties imaginaires. Pour $z - 2w$, calcule d'abord $2w$.

3.

Calculer zw et w^2 sous forme algébrique.

INDICE

Développe comme avec des réels, puis remplace i^2 par -1.

4.

Déterminer les réels x et y tels que $(x + 2) + i(y - 1) = z$.

INDICE

Pour que deux écritures $a + ib$ désignent le même complexe, il faut **à la fois** la même partie réelle et la même partie imaginaire. Vérifie que $x + 2$ et $y - 1$ sont bien des réels.

Exercice 2

Un inverse et un quotient par le conjugué

On considère les nombres complexes $d = 1 + 2i$ et $n = 5 + 5i$.

1.

Écrire $\dfrac{1}{d}$ sous forme algébrique.

INDICE

Multiplie le numérateur et le dénominateur par $\overline{d} = 1 - 2i$. Le dénominateur devient un réel.

2.

Écrire $\dfrac{n}{d}$ sous forme algébrique.

INDICE

Même idée : multiplie par $1 - 2i$ en haut et en bas, puis développe le numérateur avec $i^2 = -1$.

3.

En déduire, sans nouveau calcul de quotient, la forme algébrique de $\dfrac{5 - 5i}{1 - 2i}$.

INDICE

Compare ce quotient avec celui de la question 2. Le conjugué d'un quotient est le quotient des conjugués.

Exercice 3

Le conjugué pour reconnaître un imaginaire pur

On pose $z = 2 - 5i$ et $u = \dfrac{1 + 3i}{3 - i}$.

1.

Calculer $\overline{z}$, $z + \overline{z}$, $z - \overline{z}$ et $z\,\overline{z}$.

INDICE

Le conjugué change seulement le signe de la partie imaginaire.

2.

Montrer que $\overline{u} = -u$. Que peut-on en déduire pour u ? Vérifier en calculant u.

INDICE

Écris $\overline{u}$ avec le conjugué d'un quotient. Pour comparer deux fractions, fais un produit en croix.

3.

Soit m un nombre complexe quelconque. Montrer que $m^2 + \overline{m}^2$ est un réel.

INDICE

Un nombre complexe est réel lorsqu'il est égal à son conjugué. Calcule le conjugué de $m^2 + \overline{m}^2$.

Exercice 4

Modules, distance et milieu

Dans le plan muni du repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$, orthonormé direct, on place les points $A(-2+i)$ et $B(1+5i)$.

1.

Calculer $|-6+8i|$, puis $|(3-4i)(2+2i)|$ et $\left|\dfrac{5-12i}{4+3i}\right|$ sans développer.

INDICE

Pour $a+ib$, le module vaut $\sqrt{a^2+b^2}$. Pour un produit ou un quotient, calcule chaque module séparément.

2.

Donner l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$, puis calculer la distance AB.

INDICE

L'affixe de $\overrightarrow{AB}$ est « arrivée moins départ ». La distance est le module de cette affixe.

3.

Calculer l'affixe du milieu I du segment $[AB]$.

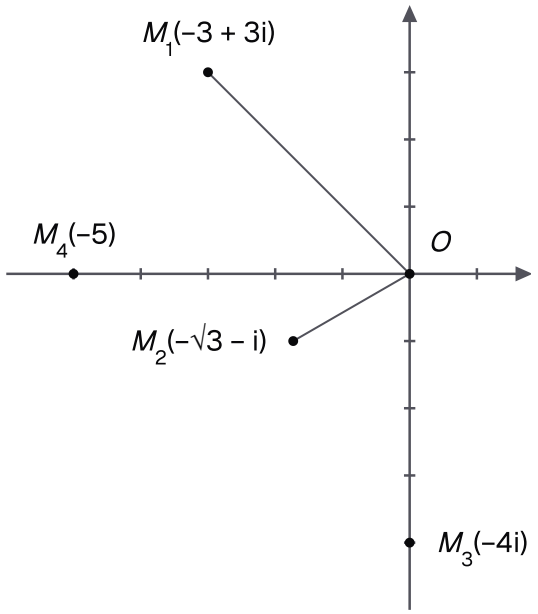
INDICE

L'affixe du milieu est la moyenne des deux affixes.

Exercice 5

Quatre formes trigonométriques

On considère $z_1 = -3 + 3i$, $z_2 = -\sqrt{3} - i$, $z_3 = -4i$ et $z_4 = -5$. Ces quatre nombres sont non nuls.



Les images M_1, M_2, M_3 et M_4 des quatre nombres z_1, z_2, z_3 et z_4, chacune avec son affixe.

1.

Écrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.

INDICE

Pour $z = a + ib$, calcule d'abord le module r. Cherche ensuite un angle θ qui vérifie **à la fois** $\cos\theta = \dfrac{a}{r}$ et $\sin\theta = \dfrac{b}{r}$.

2.

Écrire z_3 et z_4 sous forme trigonométrique.

INDICE

Place les points : z_3 est sur l'axe imaginaire, en bas ; z_4 est sur l'axe réel, à gauche. Le module doit rester positif.

Exercice 6

Calculer avec la forme exponentielle

On pose $u = 4e^{2i\pi/3}$ et $v = 3e^{-i\pi/6}$.

1.

Écrire uv, $\dfrac{u}{v}$ et $\overline{u}$ sous forme exponentielle.

INDICE

Pour un produit, on multiplie les modules et on additionne les arguments. Pour un quotient, on divise les modules et on soustrait les arguments.

2.

Écrire u, v et uv sous forme algébrique, puis vérifier le produit.

INDICE

Remplace $e^{i\theta}$ par $\cos\theta + i\sin\theta$ et utilise les valeurs remarquables.

3.

Calculer $\left(\cos\dfrac{\pi}{8} + i\sin\dfrac{\pi}{8}\right)^4$.

INDICE

Pense à la formule de Moivre : la puissance passe devant l'angle.

Exercice 7

Trois équations à discriminant négatif

Résoudre dans $\mathbb{C}$ chacune des équations suivantes, d'inconnue complexe z.

1.

$(E_1) : z^2 - 2z + 10 = 0$.

INDICE

Calcule $\Delta = b^2 - 4ac$. S'il est négatif, écris-le sous la forme $(ik)^2$ avec $k > 0$.

2.

$(E_2) : 2z^2 - 2z + 1 = 0$.

INDICE

Attention au coefficient $a = 2$: le dénominateur des solutions est $2a = 4$.

3.

$(E_3) : z^2 + 25 = 0$.

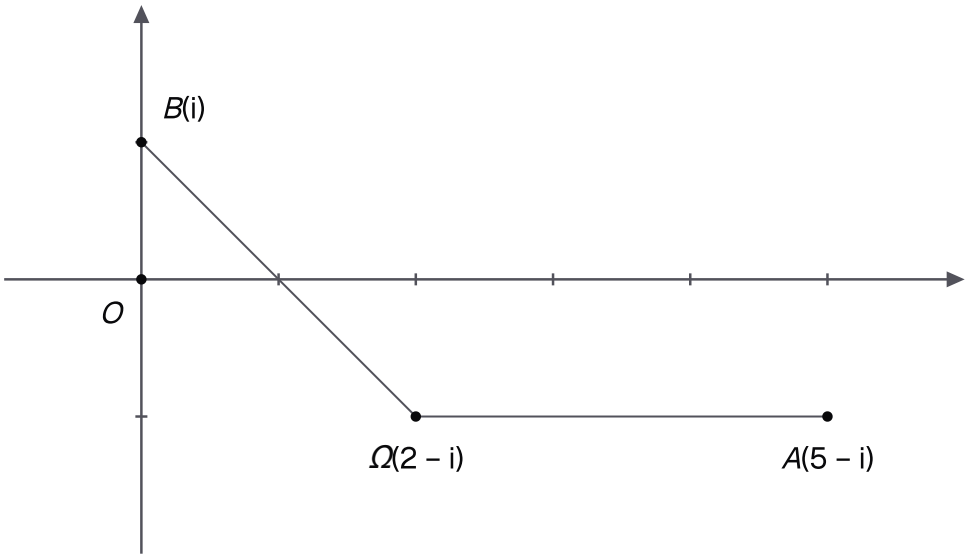
INDICE

Ici $b = 0$. Tu peux utiliser le discriminant, ou remarquer directement que $-25 = (5i)^2$.

Exercice 8

Images par une rotation et par une translation

On note R la rotation de centre $\Omega(2-i)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$. On place les points $A(5-i)$ et $B(i)$.



Le centre Ω(2 – i) de la rotation R et les deux points A(5 – i) et B(i) à transformer.

1.

Calculer l'affixe du point A', image de A par R.

INDICE

Écris d'abord la relation $z' - \omega = e^{i\theta}(z-\omega)$, puis remplace $e^{i\pi/2}$ par sa forme algébrique.

2.

Calculer l'affixe du point B', image de B par R.

INDICE

Même relation. Calcule d'abord $z_B - \omega$, puis multiplie par i, puis ajoute ω.

3.

On note t la translation de vecteur $\vec{w}$ d'affixe $-1+4i$. Calculer l'affixe de l'image de A par t.

INDICE

Une translation ajoute la même affixe à chaque point : $z' = z + b$.

Exercice 9

Alignés ou perpendiculaires ?

On considère les points $A(-1+2i)$, $B(5i)$, $C(-7+4i)$ et $D(1+8i)$. On note a, b, c et d leurs affixes.

1.

Calculer $\dfrac{d-a}{b-a}$. Que peut-on en déduire pour les points A, B et D ?

INDICE

Calcule d'abord $b-a$ et $d-a$. Un quotient réel traduit des vecteurs colinéaires.

2.

Calculer $\dfrac{c-a}{b-a}$. Que peut-on en déduire pour les droites (AB) et (AC) ?

INDICE

Multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué de $1+3i$. Un quotient imaginaire pur traduit un angle droit.

Exercice 10

Un cercle et une médiatrice décrits par des modules

On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des points $M(z)$ tels que $|z-3+i|=2$, et $\mathcal{D}$ l'ensemble des points $M(z)$ tels que $|z-2i|=|z+4|$.

1.

Déterminer l'ensemble $\mathcal{C}$. Le point $E(3+i)$ appartient-il à $\mathcal{C}$?

INDICE

Écris $z-3+i$ sous la forme $z-\omega$. Le module $|z-\omega|$ est la distance entre M et le point d'affixe ω.

2.

Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}$.

INDICE

Fais apparaître deux points : $|z-2i|$ est une distance à un point, et $|z+4|=|z-(-4)|$ aussi.