BURHAN

Nombres complexes : exercices, application

2ème Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-experimentales/mathematiques/nombres-complexes/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Nombres complexes	Application	10

Exercice 1

Premiers calculs sous forme algébrique

On donne les nombres complexes $z = 4 - 3i$ et $w = -1 + 2i$.

1.

Donner $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(z)$, $\mathrm{Re}(w)$ et $\mathrm{Im}(w)$.

INDICE

La partie imaginaire est le nombre réel placé devant i. Elle ne contient jamais la lettre i.

CORRIGÉ

On lit la forme algébrique $a + ib$, avec a et b réels.

- $z = 4 + i \times (-3)$, donc $\mathrm{Re}(z) = 4$ et $\mathrm{Im}(z) = -3$.
- $w = -1 + i \times 2$, donc $\mathrm{Re}(w) = -1$ et $\mathrm{Im}(w) = 2$.

Attention. Écrire $\mathrm{Im}(z) = -3i$ est faux : la partie imaginaire est un réel.

Conclusion. $\mathrm{Re}(z) = 4$, $\mathrm{Im}(z) = -3$, $\mathrm{Re}(w) = -1$ et $\mathrm{Im}(w) = 2$.

2.

Calculer $z + w$ et $z - 2w$ sous forme algébrique.

INDICE

Regroupe d'un côté les parties réelles, de l'autre les parties imaginaires. Pour $z - 2w$, calcule d'abord $2w$.

CORRIGÉ

Somme. On regroupe les parties réelles, puis les parties imaginaires :

$$\begin{aligned} z + w &= (4 - 1) + (-3 + 2)i \\ &= 3 - i. \end{aligned}$$

Différence. On calcule d'abord $2w = -2 + 4i$. Donc :

$$\begin{aligned} z - 2w &= (4 + 2) + (-3 - 4)i \\ &= 6 - 7i. \end{aligned}$$

Conclusion. $z + w = 3 - i$ et $z - 2w = 6 - 7i$.

3.

Calculer zw et w^2 sous forme algébrique.

INDICE

Développe comme avec des réels, puis remplace i^2 par -1.

CORRIGÉ

Produit. On développe, puis on remplace i^2 par -1 :

$$\begin{aligned} zw &= (4-3i)(-1+2i) \\ &= -4+8i+3i-6i^2 \\ &= -4+11i+6 \\ &= 2+11i. \end{aligned}$$

Carré. On applique $(p+q)^2 = p^2+2pq+q^2$ avec $p=-1$ et $q=2i$:

$$\begin{aligned} w^2 &= (-1)^2 + 2\times(-1)\times 2i \\ &\quad + (2i)^2 \\ &= 1-4i-4 \\ &= -3-4i. \end{aligned}$$

Conclusion. $zw = 2+11i$ et $w^2 = -3-4i$.

4.

Déterminer les réels x et y tels que $(x+2)+i(y-1)=z$.

INDICE

Pour que deux écritures $a+ib$ désignent le même complexe, il faut **à la fois** la même partie réelle et la même partie imaginaire. Vérifie que $x+2$ et $y-1$ sont bien des réels.

CORRIGÉ

Comme x et y sont réels, $x+2$ et $y-1$ sont réels : ce sont la partie réelle et la partie imaginaire du membre de gauche.

Deux nombres complexes sont égaux lorsqu'ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire. Avec $z=4-3i$, on obtient :

$$\begin{cases} x+2 = 4 \\ y-1 = -3 \end{cases}$$

La première équation donne $x=2$, la seconde $y=-2$.

Conclusion. Les réels cherchés sont $x=2$ et $y=-2$.

Exercice 2

Un inverse et un quotient par le conjugué

On considère les nombres complexes $d = 1 + 2i$ et $n = 5 + 5i$.

1.

Écrire $\dfrac{1}{d}$ sous forme algébrique.

INDICE

Multiplie le numérateur et le dénominateur par $\overline{d} = 1 - 2i$. Le dénominateur devient un réel.

CORRIGÉ

On multiplie le numérateur et le dénominateur par $\overline{d} = 1 - 2i$. Le dénominateur devient $d\,\overline{d} = 1^2 + 2^2 = 5$, un réel :

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+2i} &= \frac{1-2i}{(1+2i)(1-2i)} \\ &= \frac{1-2i}{5} \\ &= \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i.\end{aligned}$$

Conclusion. La forme algébrique de $\dfrac{1}{d}$ est $\dfrac{1}{5} - \dfrac{2}{5}i$.

2.

Écrire $\dfrac{n}{d}$ sous forme algébrique.

INDICE

Même idée : multiplie par $1 - 2i$ en haut et en bas, puis développe le numérateur avec $i^2 = -1$.

CORRIGÉ

Méthode. On multiplie le numérateur et le dénominateur par $\overline{d} = 1 - 2i$, avec $d\,\overline{d} = 5$ (question 1).

Calcul.

$$\begin{aligned}\frac{n}{d} &= \frac{(5+5i)(1-2i)}{5} \\ &= \frac{5 - 10i + 5i - 10i^2}{5} \\ &= \frac{15 - 5i}{5} \\ &= 3 - i.\end{aligned}$$

Contrôle. On multiplie le résultat par d :

$$\begin{aligned}&(3-i)(1+2i) \\ &= 3 + 6i - i - 2i^2 \\ &= 5 + 5i.\end{aligned}$$

On retrouve bien n.

Conclusion. La forme algébrique de $\dfrac{n}{d}$ est $3 - i$.

3.

En déduire, sans nouveau calcul de quotient, la forme algébrique de $\dfrac{5-5i}{1-2i}$.

INDICE

Compare ce quotient avec celui de la question 2. Le conjugué d'un quotient est le quotient des conjugués.

CORRIGÉ

On remarque que $5-5i=\overline{n}$ et $1-2i=\overline{d}$.

Comme $d\neq 0$, le conjugué d'un quotient est le quotient des conjugués. Avec la question 2 :

$$\begin{aligned}\frac{5-5i}{1-2i}&=\frac{\overline{n}}{\overline{d}}=\overline{\left(\frac{n}{d}\right)}\\&=\overline{3-i}\\&=3+i.\end{aligned}$$

Conclusion. La forme algébrique de $\dfrac{5-5i}{1-2i}$ est $3+i$.

Exercice 3

Le conjugué pour reconnaître un imaginaire pur

On pose $z = 2 - 5i$ et $u = \dfrac{1+3i}{3-i}$.

1.

Calculer $\overline{z}$, $z + \overline{z}$, $z - \overline{z}$ et $z\,\overline{z}$.

INDICE

Le conjugué change seulement le signe de la partie imaginaire.

CORRIGÉ

Conjugué. On change le signe de la partie imaginaire : $\overline{z} = 2 + 5i$.

Calculs.

$$\begin{aligned} z + \overline{z} &= 4, \\ z - \overline{z} &= -10i, \\ z\,\overline{z} &= 2^2 + 5^2 = 29. \end{aligned}$$

Remarque. On retrouve $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$ et $z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$. Le produit $z\,\overline{z}$ est un réel positif.

Conclusion. $\overline{z} = 2 + 5i$, $z + \overline{z} = 4$, $z - \overline{z} = -10i$ et $z\,\overline{z} = 29$.

2.

Montrer que $\overline{u} = -u$. Que peut-on en déduire pour u ? Vérifier en calculant u.

INDICE

Écris $\overline{u}$ avec le conjugué d'un quotient. Pour comparer deux fractions, fais un produit en croix.

CORRIGÉ

Conjugué de u. D'après le conjugué d'un quotient :

$$\overline{u} = \frac{1 - 3i}{3 + i}.$$

Comparaison. Les dénominateurs $3 + i$ et $3 - i$ sont non nuls. Par produit en croix, $\overline{u} = -u$ équivaut à :

$$\begin{aligned}&(1 - 3i)(3 - i)\\ &= -(1 + 3i)(3 + i).\end{aligned}$$

On calcule chaque membre :

$$\begin{aligned}&(1 - 3i)(3 - i)\\ &= 3 - i - 9i + 3i^2\\ &= -10i,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&-(1 + 3i)(3 + i)\\ &= -(3 + i + 9i + 3i^2)\\ &= -10i.\end{aligned}$$

Les deux membres sont égaux, donc $\overline{u} = -u$.

Conséquence. Un nombre égal à l'opposé de son conjugué est **imaginaire pur**.

Vérification. On multiplie par $3 + i$, avec $(3 - i)(3 + i) = 10$:

$$\begin{aligned}u &= \frac{(1 + 3i)(3 + i)}{10}\\ &= \frac{10i}{10} = i.\end{aligned}$$

Conclusion. $\overline{u} = -u$, donc u est un imaginaire pur. Le calcul donne $u = i$: c'est bien un imaginaire pur.

3.

Soit m un nombre complexe quelconque. Montrer que $m^2 + \overline{m}^2$ est un réel.

INDICE

Un nombre complexe est réel lorsqu'il est égal à son conjugué. Calcule le conjugué de $m^2 + \overline{m}^2$.

CORRIGÉ

Posons $s = m^2 + \overline{m}^2$. Un nombre complexe est réel si et seulement s'il est égal à son conjugué : montrons que $\overline{s} = s$.

Le conjugué d'une somme est la somme des conjugués, et $\overline{m^2} = \overline{m}^2$ (conjugué d'un produit). Donc :

$$\begin{aligned} \overline{s} &= \overline{m}^2 + \overline{\overline{m}}^2 \\ &= \overline{m}^2 + m^2 \\ &= s. \end{aligned}$$

Conclusion. Le nombre s est égal à son conjugué : pour tout nombre complexe m, $m^2 + \overline{m}^2$ est **réel**.

Exercice 4

Modules, distance et milieu

Dans le plan muni du repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$, orthonormé direct, on place les points $A(-2+i)$ et $B(1+5i)$.

1.

Calculer $|-6+8i|$, puis $|(3-4i)(2+2i)|$ et $\left|\dfrac{5-12i}{4+3i}\right|$ sans développer.

INDICE

Pour $a+ib$, le module vaut $\sqrt{a^2+b^2}$. Pour un produit ou un quotient, calcule chaque module séparément.

CORRIGÉ

Un module. Pour a et b réels, $|a+ib| = \sqrt{a^2+b^2}$:

$$\begin{aligned} |-6+8i| &= \sqrt{36+64} \\ &= \sqrt{100} = 10. \end{aligned}$$

Un produit. Pour un produit, on multiplie les modules. Or $|3-4i| = \sqrt{9+16} = 5$ et $|2+2i| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, donc :

$$\begin{aligned} |(3-4i)(2+2i)| &= 5 \times 2\sqrt{2} \\ &= 10\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Un quotient. Pour un quotient, on divise les modules. Or $|5-12i| = \sqrt{25+144} = 13$ et $|4+3i| = \sqrt{16+9} = 5$, donc :

$$\left|\frac{5-12i}{4+3i}\right| = \frac{13}{5}.$$

Conclusion. $|-6+8i| = 10$, $|(3-4i)(2+2i)| = 10\sqrt{2}$ et $\left|\dfrac{5-12i}{4+3i}\right| = \dfrac{13}{5}$.

2.

Donner l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$, puis calculer la distance AB.

INDICE

L'affixe de $\overrightarrow{AB}$ est « arrivée moins départ ». La distance est le module de cette affixe.

CORRIGÉ

Vecteur. L'affixe de $\overrightarrow{AB}$ est $z_B - z_A$:

$$\begin{aligned} z_{\overrightarrow{AB}} &= (1+5i) - (-2+i) \\ &= 3+4i. \end{aligned}$$

Distance. La distance AB est le module de cette affixe :

$$AB = |3+4i| = \sqrt{9+16} = 5.$$

Conclusion. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $3+4i$, et $AB = 5$.

3.

Calculer l'affixe du milieu I du segment $[AB]$.

INDICE

L'affixe du milieu est la moyenne des deux affixes.

CORRIGÉ

L'affixe du milieu I de $[AB]$ est la moyenne des affixes de A et de B :

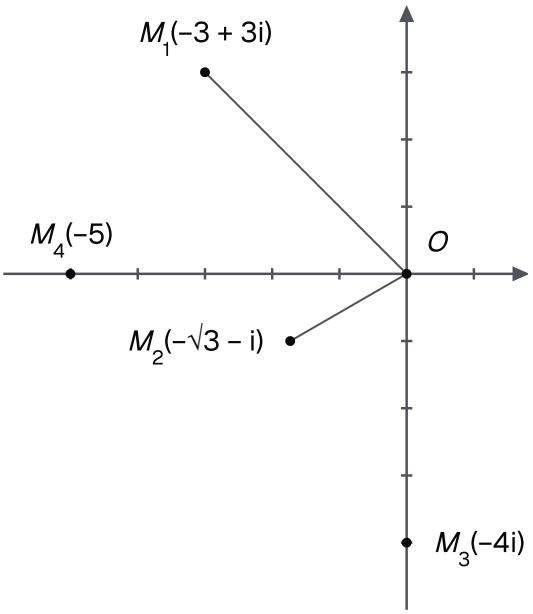
$$\begin{aligned} z_I &= \frac{z_A + z_B}{2} \\ &= \frac{(-2+i)+(1+5i)}{2} \\ &= \frac{-1+6i}{2} \\ &= -\frac{1}{2} + 3i. \end{aligned}$$

Conclusion. Le milieu I du segment $[AB]$ a pour affixe $-\frac{1}{2} + 3i$.

Exercice 5

Quatre formes trigonométriques

On considère $z_1 = -3 + 3i$, $z_2 = -\sqrt{3} - i$, $z_3 = -4i$ et $z_4 = -5$. Ces quatre nombres sont non nuls.



Les images M_1, M_2, M_3 et M_4 des quatre nombres z_1, z_2, z_3 et z_4, chacune avec son affixe.

1.

Écrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.

INDICE

Pour $z = a + ib$, calcule d'abord le module r. Cherche ensuite un angle θ qui vérifie **à la fois** $\cos\theta = \dfrac{a}{r}$ et $\sin\theta = \dfrac{b}{r}$.

CORRIGÉ

Méthode. Pour $z = a + ib$ non nul, on calcule $r = |z|$, puis on cherche un réel θ tel que $\cos\theta = \dfrac{a}{r}$ et $\sin\theta = \dfrac{b}{r}$.

Pour z_1. $|z_1| = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$, puis :

$$\cos\theta = \frac{-3}{3\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$\sin\theta = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

L'angle $\dfrac{3\pi}{4}$ convient : $\arg z_1 \equiv \dfrac{3\pi}{4}\ [2\pi]$. Donc :

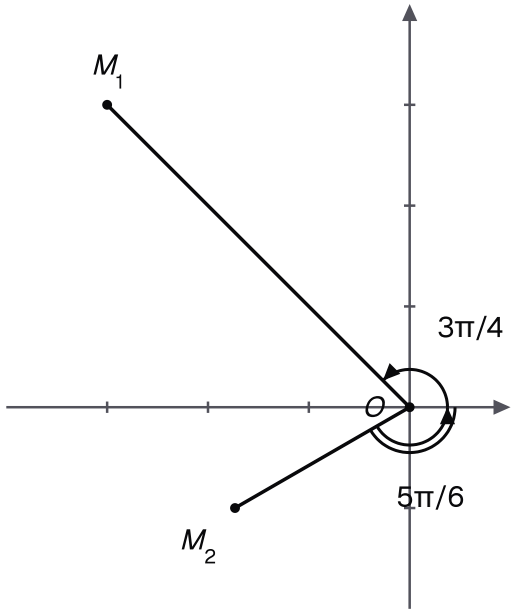
$$z_1 = 3\sqrt{2}\Big(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\Big).$$

Pour z_2. $|z_2| = \sqrt{3+1} = 2$, puis $\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta = -\dfrac{1}{2}$. L'angle $-\dfrac{5\pi}{6}$ convient : $\arg z_2 \equiv -\dfrac{5\pi}{6}\ [2\pi]$. Donc :

$$z_2 = 2\Big(\cos\Big(-\frac{5\pi}{6}\Big) + i\sin\Big(-\frac{5\pi}{6}\Big)\Big).$$

Attention. Avec le cosinus seul, $\dfrac{5\pi}{6}$ conviendrait aussi pour z_2 : c'est le signe du sinus, négatif, qui tranche.

Conclusion. z_1 a pour module $3\sqrt{2}$ et pour un argument $\dfrac{3\pi}{4}$; z_2 a pour module 2 et pour un argument $-\dfrac{5\pi}{6}$. Les formes trigonométriques sont celles écrites ci-dessus.



L'angle orienté de u vers OM_1 mesure 3π/4 ; pour M_2, sous l'axe réel, l'arc de OM_2 vers u mesure 5π/6, d'où l'argument -5π/6.

2.

Écrire z_3 et z_4 sous forme trigonométrique.

INDICE

Place les points : z_3 est sur l'axe imaginaire, en bas ; z_4 est sur l'axe réel, à gauche. Le module doit rester positif.

CORRIGÉ

Pour z_3. $|z_3| = 4$ et $z_3 = 4 \times (-i)$, avec :

$$-i = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right).$$

Donc $\arg z_3 \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et :

$$z_3 = 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right).$$

Pour z_4. $|z_4| = 5$ et $-1 = \cos\pi + i\sin\pi$, donc $\arg z_4 \equiv \pi\ [2\pi]$ et :

$$z_4 = 5(\cos\pi + i\sin\pi).$$

Attention. L'écriture $-5(\cos 0 + i\sin 0)$ n'est pas une forme trigonométrique : le facteur devant la parenthèse doit être strictement positif.

Conclusion. z_3 a pour module 4 et pour un argument $-\frac{\pi}{2}$; z_4 a pour module 5 et pour un argument π, d'où les formes trigonométriques ci-dessus.

Exercice 6

Calculer avec la forme exponentielle

On pose $u = 4e^{2i\pi/3}$ et $v = 3e^{-i\pi/6}$.

1.

Écrire uv, $\dfrac{u}{v}$ et $\overline{u}$ sous forme exponentielle.

INDICE

Pour un produit, on multiplie les modules et on additionne les arguments. Pour un quotient, on divise les modules et on soustrait les arguments.

CORRIGÉ

Produit. On multiplie les modules et on additionne les arguments :

$$\begin{aligned} uv &= 4 \times 3\, e^{i(2\pi/3 - \pi/6)} \\ &= 12e^{i\pi/2}. \end{aligned}$$

Quotient. On divise les modules et on soustrait les arguments :

$$\begin{aligned} \frac{u}{v} &= \frac{4}{3}\, e^{i(2\pi/3 + \pi/6)} \\ &= \frac{4}{3}e^{5i\pi/6}. \end{aligned}$$

Conjugué. Le conjugué a le même module et un argument opposé :

$$\overline{u} = 4e^{-2i\pi/3}.$$

Conclusion. $uv = 12e^{i\pi/2}$, $\dfrac{u}{v} = \dfrac{4}{3}e^{5i\pi/6}$ et $\overline{u} = 4e^{-2i\pi/3}$.

2.

Écrire u, v et uv sous forme algébrique, puis vérifier le produit.

INDICE

Remplace $e^{i\theta}$ par $\cos\theta + i\sin\theta$ et utilise les valeurs remarquables.

CORRIGÉ

Formes algébriques de u et v. On remplace $e^{i\theta}$ par $\cos\theta + i\sin\theta$:

$$\begin{aligned} u &= 4\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= -2 + 2i\sqrt{3}, \\ v &= 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i. \end{aligned}$$

Forme algébrique de uv. D'après la question 1, $uv = 12e^{i\pi/2}$. Comme $e^{i\pi/2} = i$, on a $uv = 12i$.

Vérification. On développe $\left(-2 + 2i\sqrt{3}\right)\left(\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i\right)$:

$$\begin{aligned} uv &= -3\sqrt{3} + 3i + 9i + 3\sqrt{3} \\ &= 12i. \end{aligned}$$

Les deux calculs concordent ; la forme exponentielle était bien plus rapide.

Conclusion. $u = -2 + 2i\sqrt{3}$, $v = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$ et $uv = 12i$, ce que confirme le développement.

3.

Calculer $\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)^4$.

INDICE

Pense à la formule de Moivre : la puissance passe devant l'angle.

CORRIGÉ

D'après la formule de Moivre, pour tout réel θ et tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} &(\cos\theta + i\sin\theta)^n \\ &= \cos(n\theta) + i\sin(n\theta). \end{aligned}$$

Avec $\theta = \frac{\pi}{8}$ et $n = 4$:

$$\begin{aligned} &\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)^4 \\ &= \cos\frac{4\pi}{8} + i\sin\frac{4\pi}{8} \\ &= \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} \\ &= i. \end{aligned}$$

Conclusion. $\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)^4 = i$.

Exercice 7

Trois équations à discriminant négatif

Résoudre dans $\mathbb{C}$ chacune des équations suivantes, d'inconnue complexe z.

1.

$(E_1) : z^2 - 2z + 10 = 0.$

INDICE

Calcule $\Delta = b^2 - 4ac$. S'il est négatif, écris-le sous la forme $(ik)^2$ avec $k > 0$.

CORRIGÉ

Discriminant.

$$\begin{aligned}\Delta &= (-2)^2 - 4 \times 1 \times 10 \\ &= 4 - 40 = -36.\end{aligned}$$

Ainsi $\Delta < 0$, et $-36 = (6i)^2$.

Solutions. L'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$$\begin{aligned}z_1 &= \frac{2 - 6i}{2} = 1 - 3i, \\ z_2 &= \frac{2 + 6i}{2} = 1 + 3i.\end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble des solutions de (E_1) est $S = \{1 - 3i\,;\, 1 + 3i\}$.

2.

$(E_2) : 2z^2 - 2z + 1 = 0.$

INDICE

Attention au coefficient $a = 2$: le dénominateur des solutions est $2a = 4$.

CORRIGÉ

Discriminant.

$$\begin{aligned}\Delta &= (-2)^2 - 4 \times 2 \times 1 \\ &= 4 - 8 = -4.\end{aligned}$$

Ainsi $\Delta < 0$, et $-4 = (2i)^2$.

Solutions. Le dénominateur vaut $2a = 4$:

$$\begin{aligned}z_1 &= \frac{2 - 2i}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i, \\ z_2 &= \frac{2 + 2i}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i.\end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble des solutions de (E_2) est $S = \left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\,;\, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right\}$.

3.

$(E_3) : z^2 + 25 = 0.$

INDICE

Ici $b = 0$. Tu peux utiliser le discriminant, ou remarquer directement que $-25 = (5i)^2$.

CORRIGÉ

Discriminant. $\Delta = 0^2 - 4 \times 1 \times 25 = -100$. Ainsi $\Delta < 0$, et $-100 = (10i)^2$.

Solutions.

$$z_1 = \frac{-10i}{2} = -5i,$$
$$z_2 = \frac{10i}{2} = 5i.$$

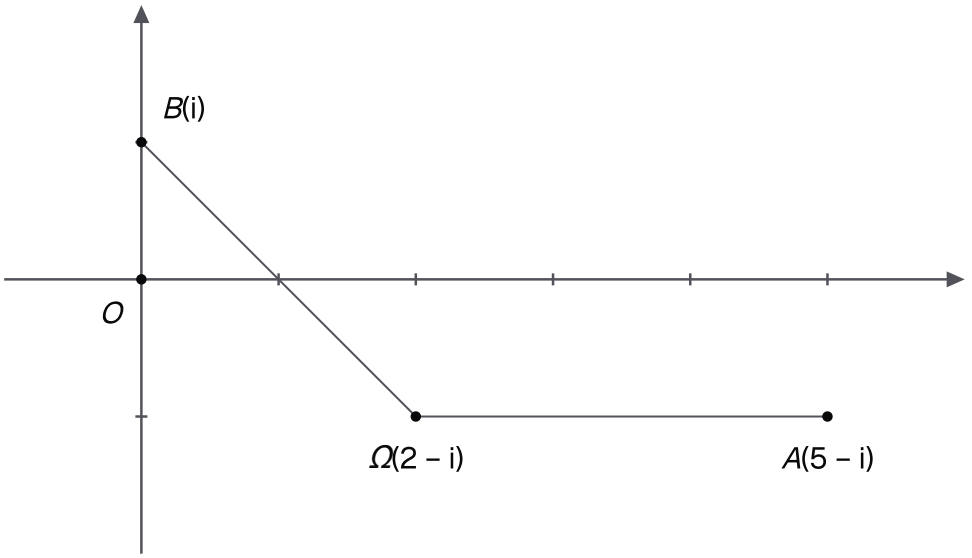
Contrôle. $(5i)^2 + 25 = -25 + 25 = 0$, et de même $(-5i)^2 + 25 = 0$.

Conclusion. L'ensemble des solutions de (E_3) est $S = \{-5i\,;\,5i\}$.

Exercice 8

Images par une rotation et par une translation

On note R la rotation de centre $\Omega(2-i)$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$. On place les points $A(5-i)$ et $B(i)$.



Le centre Ω(2 – i) de la rotation R et les deux points A(5 – i) et B(i) à transformer.

1.

Calculer l'affixe du point A', image de A par R.

INDICE

Écris d'abord la relation $z' - \omega = e^{i\theta}(z-\omega)$, puis remplace $e^{i\pi/2}$ par sa forme algébrique.

CORRIGÉ

Écriture complexe de R. Le point $M'(z')$ est l'image de $M(z)$ par la rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ si et seulement si $z' - \omega = e^{i\theta}(z-\omega)$. Ici $\omega = 2-i$ et $e^{i\pi/2} = i$:

$$z' - (2-i) = i\big(z-(2-i)\big).$$

Calcul. Pour $z = 5-i$, on a $z-(2-i) = 3$, donc $z'-(2-i) = 3i$ et :

$$z_{A'} = 2 - i + 3i = 2 + 2i.$$

Contrôle. $\Omega A = |3| = 3$ et $\Omega A' = |3i| = 3$: la rotation conserve la distance au centre.

Conclusion. L'image A' de A par R a pour affixe $2+2i$.

2.

Calculer l'affixe du point B', image de B par R.

INDICE

Même relation. Calcule d'abord $z_B - \omega$, puis multiplie par i, puis ajoute ω.

CORRIGÉ

On utilise la même relation avec $z_B = i$. D'abord $z_B - \omega = i - (2 - i) = -2 + 2i$, puis :

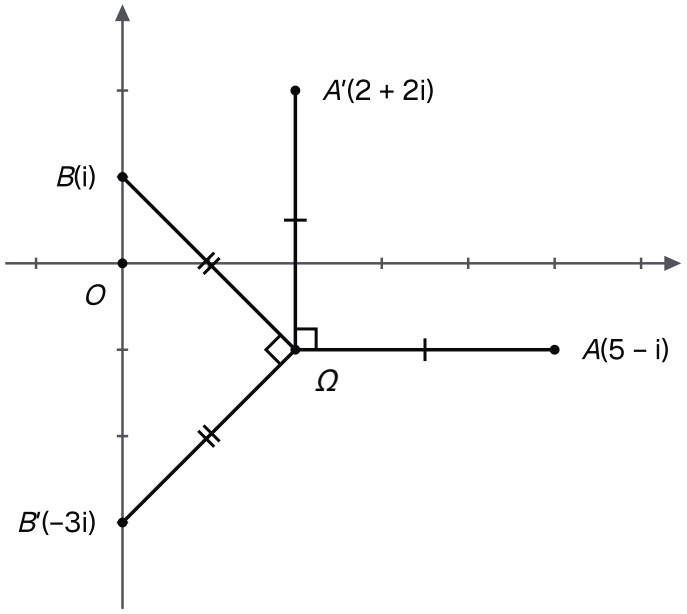
$$\begin{aligned} z_{B'} - \omega &= i(-2 + 2i) \\ &= -2 - 2i. \end{aligned}$$

On ajoute $\omega = 2 - i$:

$$z_{B'} = 2 - i - 2 - 2i = -3i.$$

Contrôle. $\Omega B = |-2 + 2i| = 2\sqrt{2}$ et $\Omega B' = |-2 - 2i| = 2\sqrt{2}$.

Conclusion. L'image B' de B par R a pour affixe $-3i$.



Le quart de tour direct autour de Ω : A va en A'(2 + 2i), B va en B'(–3i), et chaque image reste à la même distance de Ω.

3.

On note t la translation de vecteur $\vec{w}$ d'affixe $-1+4i$. Calculer l'affixe de l'image de A par t.

INDICE

Une translation ajoute la même affixe à chaque point : $z' = z + b$.

CORRIGÉ

La translation de vecteur $\vec{w}$ ajoute l'affixe de $\vec{w}$ à celle de chaque point : son écriture complexe est $z' = z + (-1+4i)$.

Pour le point A :

$$\begin{aligned} z' &= (5-i) + (-1+4i) \\ &= 4+3i. \end{aligned}$$

Conclusion. L'image de A par t a pour affixe $4+3i$.

Exercice 9

Alignés ou perpendiculaires ?

On considère les points $A(-1+2i)$, $B(5i)$, $C(-7+4i)$ et $D(1+8i)$. On note a, b, c et d leurs affixes.

1.

Calculer $\dfrac{d-a}{b-a}$. Que peut-on en déduire pour les points A, B et D ?

INDICE

Calcule d'abord $b-a$ et $d-a$. Un quotient réel traduit des vecteurs colinéaires.

CORRIGÉ

Différences. $b-a = 5i-(-1+2i) = 1+3i$ et $d-a = (1+8i)-(-1+2i) = 2+6i$.

Quotient. Comme $d-a = 2(1+3i)$ et $b-a \neq 0$:

$$\frac{d-a}{b-a} = \frac{2(1+3i)}{1+3i} = 2.$$

Déduction. Ce quotient est **réel**, donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont colinéaires.

Conclusion. $\dfrac{d-a}{b-a} = 2$, et les points A, B et D sont **alignés**.

2.

Calculer $\dfrac{c-a}{b-a}$. Que peut-on en déduire pour les droites (AB) et (AC) ?

INDICE

Multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué de $1+3i$. Un quotient imaginaire pur traduit un angle droit.

CORRIGÉ

Différence. $c-a = (-7+4i)-(-1+2i) = -6+2i$.

Quotient. On multiplie par le conjugué $1-3i$ de $b-a$, avec $(1+3i)(1-3i) = 10$:

$$\begin{aligned}\frac{c-a}{b-a} &= \frac{(-6+2i)(1-3i)}{10} \\ &= \frac{-6+18i+2i-6i^2}{10} \\ &= \frac{20i}{10} = 2i.\end{aligned}$$

Déduction. Le quotient $2i$ est **imaginaire pur** et non nul : $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \arg(2i) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

Conclusion. $\dfrac{c-a}{b-a} = 2i$, et les droites (AB) et (AC) sont **perpendiculaires**.

Exercice 10

Un cercle et une médiatrice décrits par des modules

On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des points $M(z)$ tels que $|z-3+i|=2$, et $\mathcal{D}$ l'ensemble des points $M(z)$ tels que $|z-2i|=|z+4|$.

1.

Déterminer l'ensemble $\mathcal{C}$. Le point $E(3+i)$ appartient-il à $\mathcal{C}$?

INDICE

Écris $z-3+i$ sous la forme $z-\omega$. Le module $|z-\omega|$ est la distance entre M et le point d'affixe ω.

CORRIGÉ

Traduction. On écrit $z-3+i=z-(3-i)$. Soit Ω le point d'affixe $3-i$: pour tout point $M(z)$, $|z-(3-i)|=\Omega M$. Donc :

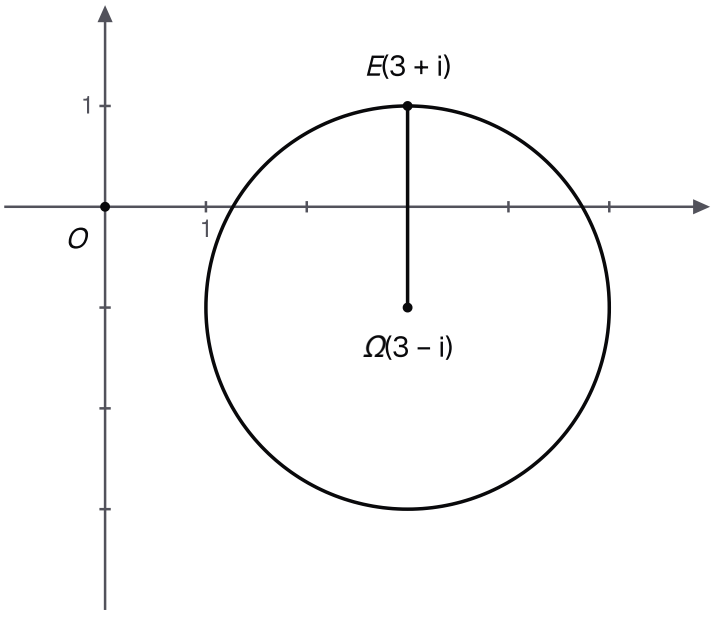
$$|z-3+i|=2 \iff \Omega M=2.$$

Ensemble. $\mathcal{C}$ est l'ensemble des points situés à la distance 2 de Ω.

Le point E.

$$\begin{aligned}|z_E-3+i| &= |3+i-3+i| \\ &= |2i|=2.\end{aligned}$$

Conclusion. $\mathcal{C}$ est le **cercle de centre** $\Omega(3-i)$ **et de rayon** 2, et le point E appartient à $\mathcal{C}$.



L'ensemble C est le cercle de centre Ω(3 – i) et de rayon 2 ; le point E(3 + i) en fait partie.

2.

Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}$.

INDICE

Fais apparaître deux points : $|z-2i|$ est une distance à un point, et $|z+4| = |z-(-4)|$ aussi.

CORRIGÉ

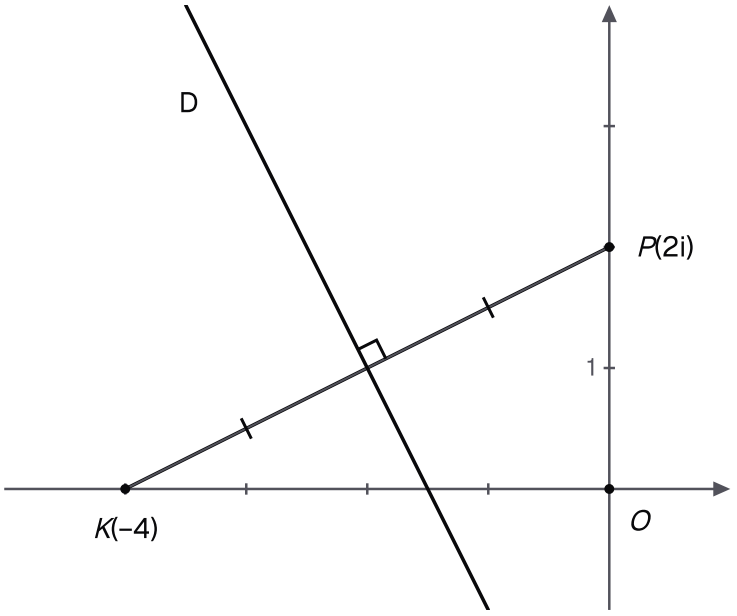
Traduction. Soient P et K les points d'affixes $2i$ et -4. Pour tout point $M(z)$, $|z-2i| = PM$ et $|z+4| = |z-(-4)| = KM$. Donc :

$$|z-2i| = |z+4| \iff PM = KM.$$

Ensemble. $\mathcal{D}$ est l'ensemble des points équidistants de P et de K.

Contrôle. Le milieu de $[PK]$ a pour affixe $\dfrac{2i-4}{2} = -2+i$. Sa distance à P vaut $|-2-i| = \sqrt{5}$, sa distance à K vaut $|2+i| = \sqrt{5}$: il est bien sur $\mathcal{D}$.

Conclusion. $\mathcal{D}$ est la **médiatrice du segment** $[PK]$.



L'ensemble D est la médiatrice de [PK] : la droite perpendiculaire à [PK] en son milieu, d'affixe –2 + i.