BURHAN

Nombres complexes

2ème Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-experimentales/mathematiques/nombres-complexes/cours

Chapitre	Semestre
Nombres complexes	Semestre 1

Un carré qui vaut –4

Un carré négatif

Ce soir, tu aides ta petite sœur à résoudre $x^2 + 4 = 0$. Ta calculatrice affiche une erreur. Elle a raison, du moins dans $\mathbb{R}$.

En effet, il faudrait trouver un nombre x tel que $x^2 = -4$.

Devine : Un nombre dont le carré vaut –4

Existe-t-il un **réel** x tel que $x^2 = -4$?

A. Oui : 2 et -2.

Faux.
$2^2 = 4$ et $(-2)^2 = 4$. Le carré vaut 4, jamais -4.

B. Non : aucun réel ne convient.

Juste.
Pour tout réel x, $x^2 \geq 0$. Un carré de réel ne peut donc pas valoir -4.

C. Oui : -2, car le signe moins passe dans le carré.

Faux.
$(-2)^2 = (-2) \times (-2) = 4$: deux signes moins donnent un plus.

Correction
Aucun réel ne convient. Pour tout réel x, on a $x^2 \geq 0$, alors que $-4 < 0$.

Pour résoudre cette équation, il faut donc de **nouveaux nombres**. C'est l'objet de ce chapitre.

Ce que tu vas gagner. On va fabriquer un nombre i dont le carré vaut -1. Alors $(2i)^2 = 4i^2 = -4$: l'équation de ta sœur a une solution.

Ces nouveaux nombres décrivent aussi les points du plan. Les 15 sujets de bac consultés contiennent tous un exercice sur ces nombres, noté de 3 à 5 points sur 20. Tu vas apprendre à les gagner, question par question.

Le nombre i, la forme algébrique et le plan

Un nouveau nombre

On admet qu'il existe un nombre i tel que $i^2 = -1$. On calcule avec lui comme avec une lettre. Puis on remplace i^2 par -1.

Par exemple :

$$(2i)^2 = 4 \times i^2 = -4.$$

De même, $(-2i)^2 = -4$. L'équation $x^2 + 4 = 0$ a donc deux solutions : $2i$ et $-2i$.

Définition : L'ensemble $\mathbb{C}$ et la forme algébrique

On admet l'existence d'un ensemble noté $\mathbb{C}$, dont les éléments sont appelés **nombres complexes**, tel que :

- $\mathbb{C}$ contient $\mathbb{R}$ et un élément i vérifiant $i^2 = -1$;
- $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui prolongent celles de $\mathbb{R}$ et suivent les mêmes règles de calcul ;
- tout nombre complexe z s'écrit de façon **unique** $z = a + ib$, avec a et b réels.

Cette écriture est la **forme algébrique** de z. Le réel a est la **partie réelle** de z, notée $\mathrm{Re}(z)$; le réel b est sa **partie imaginaire**, notée $\mathrm{Im}(z)$. Le nombre z est **réel** lorsque $b = 0$, et **imaginaire pur** lorsque $a = 0$.

En clair. Un nombre complexe s'écrit $a + ib$, avec deux réels a et b. Le premier est la partie réelle. Le second, celui qui accompagne i, est la partie imaginaire.

Ainsi 5 est réel, $3i$ est imaginaire pur, et 0 est les deux à la fois.

Vérifie : Lire les deux parties

Pour $z = 7 - 3i$, que vaut $\mathrm{Im}(z)$?

A. $-3i$

Faux.
La partie imaginaire est un **réel** : le i n'en fait pas partie.

B. 3

Faux.
Le signe compte : $z = 7 + (-3)i$, donc le réel devant i est -3.

C. -3

Juste.
On écrit $z = 7 + (-3)i$: le réel qui multiplie i est -3.

D. 7

Faux.
7 est la partie réelle : $\mathrm{Re}(z) = 7$.

Correction

On écrit $z = 7 + (-3)i$, avec 7 et -3 réels. Donc $\mathrm{Re}(z) = 7$ et $\mathrm{Im}(z) = -3$.

Retiens : la partie imaginaire est un réel, sans i.

Calculer comme d'habitude

Exemple : Somme et produit (guidé)

Soient $z = 2 + 3i$ et $z' = 1 - i$.

1. **Somme** : on ajoute les parties réelles, puis les parties imaginaires. On obtient $z + z' = 3 + 2i$.
2. **Produit** : on développe, puis on remplace i^2 par -1.

$$\begin{aligned} zz' &= 2 - 2i + 3i - 3i^2 \\ &= 2 + i + 3 \\ &= 5 + i. \end{aligned}$$

Vérifie : Un carré à développer

Que vaut $(1 + 2i)^2$?

A. -3

Faux.
Tu as écrit $1^2 + (2i)^2 = 1 - 4$. Il manque le double produit $2 \times 1 \times 2i = 4i$.

B. $5 + 4i$

Faux.
Tu as pris $i^2 = 1$. Or $i^2 = -1$, donc $(2i)^2 = -4$.

C. $1 + 4i$

Faux.
Le terme $(2i)^2 = 4i^2 = -4$ a disparu en route.

D. $-3 + 4i$

Juste.
Identité remarquable, puis $i^2 = -1$: on trouve $-3 + 4i$.

Correction

On développe avec l'identité remarquable, puis on remplace i^2 par -1 :

$$\begin{aligned} (1 + 2i)^2 &= 1^2 + 2 \times 1 \times 2i \\ &\quad + (2i)^2 \\ &= 1 + 4i - 4 \\ &= -3 + 4i. \end{aligned}$$

Deux nombres égaux

Propriété : Égalité de deux nombres complexes

Soient a, b, a' et b' des réels.

$$a + ib = a' + ib' \iff a = a' \text{ et } b = b'.$$

En particulier, $a + ib = 0$ si et seulement si $a = 0$ et $b = 0$.

À toi : Trouver deux réels

Trouve les réels x et y tels que $(x + 1) + 2y\,i = 3 - 4i$.

Indice 1
Les deux membres sont sous forme algébrique : compare-les partie par partie.
Indice 2
Égale les parties réelles, puis les parties imaginaires.

Réponse
Comme x et y sont réels, $x + 1$ et $2y$ sont des **réels** : on peut comparer les deux membres partie par partie.

Les parties réelles sont égales : $x + 1 = 3$, donc $x = 2$.

Les parties imaginaires aussi : $2y = -4$, donc $y = -2$.

Un nombre, un point

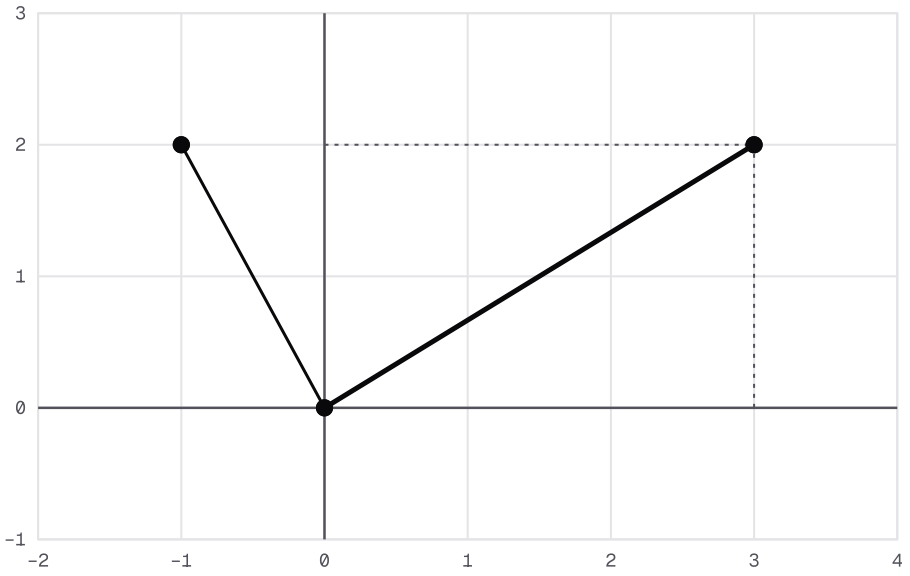
Un nombre complexe porte deux réels. Un point du plan aussi : ses deux coordonnées. On associe donc au nombre $a + ib$ le point de coordonnées $(a; b)$.

Définition : Image d'un nombre complexe, affixe d'un point et d'un vecteur

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soient a et b des réels.

- Le point $M(a; b)$ est l'**image** du nombre complexe $z = a + ib$, et z est l'**affixe** du point M ; on note $M(z)$ ou $z_M = z$.
- Le vecteur $\vec{w}(a; b)$ a pour **affixe** $a + ib$.

L'axe des abscisses est l'**axe réel**, l'axe des ordonnées l'**axe imaginaire**.



Le point M(3 ; 2) est l'image de 3 + 2i, et N(−1 ; 2) celle de −1 + 2i. Les deux segments tracés depuis M lisent ses coordonnées : 3 sur l'axe réel, 2 sur l'axe imaginaire.

Propriété : Affixe d'un vecteur, d'un milieu ; opérations sur les vecteurs

Soient A et B deux points d'affixes z_A et z_B, et $\vec{w}$, $\vec{w}\,'$ deux vecteurs d'affixes z et z'.

- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$.
- Le milieu I du segment $[AB]$ a pour affixe $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$.
- Le vecteur $\vec{w} + \vec{w}\,'$ a pour affixe $z + z'$ et, pour tout réel k, le vecteur $k\vec{w}$ a pour affixe kz.

Vérifie : L'affixe d'un vecteur

Soient $A(2 - i)$ et $B(-1 + 3i)$. Quelle est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$?

A. $1 + 2i$

Faux.

C'est $z_A + z_B$. Un vecteur se calcule par une différence : arrivée moins départ.

B. $-3 + 4i$

Juste.

Arrivée moins départ : $z_B - z_A = -3 + 4i$.

C. $3 - 4i$

Faux.

C'est $z_A - z_B$, l'affixe de $\overrightarrow{BA}$: l'ordre est inversé.

D. $\dfrac{1}{2} + i$

Faux.
C'est l'affixe du milieu de $[AB]$, pas celle du vecteur.

Correction
Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$:

$$\begin{aligned} z_B - z_A &= (-1+3i) - (2-i) \\ &= -3+4i. \end{aligned}$$

Conjugué et module

Le reflet dans l'axe réel

Place le point M, image de $2+i$. Change seulement le signe de la partie imaginaire : tu obtiens $2-i$. Le point passe sous l'axe réel, à la même distance de cet axe.

Un peu comme un palmier qui se reflète dans l'eau d'une piscine.

Devine : Quelle symétrie ?

Le point d'image $2-i$ est le symétrique de $M(2+i)$ par rapport à quoi ?

A. L'axe imaginaire.
Faux.
Le symétrique par rapport à l'axe imaginaire a pour image $-2+i$: c'est la partie réelle qui change de signe.

B. Le point O.
Faux.
Le symétrique par rapport à O a pour image $-2-i$: les deux parties changent de signe.

C. L'axe réel.
Juste.
L'abscisse 2 reste, l'ordonnée 1 devient -1 : c'est un reflet dans l'axe réel.

Correction
Les points $(2;1)$ et $(2;-1)$ ont la même abscisse et des ordonnées opposées. Ils sont symétriques par rapport à l'axe réel.

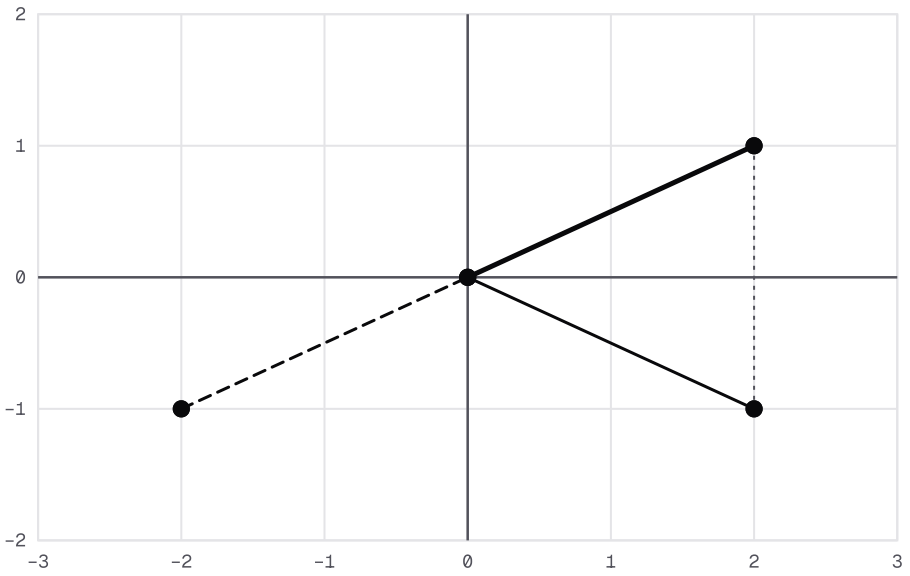
Le nombre $2-i$ s'appelle le **conjugué** de $2+i$.

Définition : Conjugué d'un nombre complexe

Soit $z = a+ib$ un nombre complexe, avec a et b réels. Le **conjugué** de z est le nombre complexe

$$\overline{z} = a - ib.$$

Dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$, les images de z et de $\overline{z}$ sont symétriques par rapport à l'axe réel.



OM OM_1 OM_2 ● Point plein $M(2+i)$ ● Point plein $M_1(2-i)$ ● Point plein $M_2(-2-i)$ ● Point du graphe

Les images de z = 2 + i, de son conjugué 2 − i et de son opposé −2 − i. Le conjugué est le symétrique par rapport à l'axe réel, l'opposé le symétrique par rapport à O. Les trois points sont à la même distance √5 de O : même module.

Propriété : Propriétés du conjugué

Pour tous nombres complexes z et z' et tout entier naturel n :

- $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ et $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$;
- $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$;
- si $z' \neq 0$, $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$;
- $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$ et $z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$;
- z est réel si et seulement si $\overline{z} = z$; z est imaginaire pur si et seulement si $\overline{z} = -z$.

Vérifie : Le conjugué d'un carré

Pour $z = 1 + 2i$, que vaut $\overline{z^2}$?

A. $-3 - 4i$

Juste.
$z^2 = -3 + 4i$, et son conjugué est $-3 - 4i$.

B. $3 - 4i$

Faux.
C'est l'opposé de z^2 : les deux parties ont changé de signe. Le conjugué ne change que la partie imaginaire.

C. $-3+4i$

Faux.
C'est z^2 lui-même : il reste à le conjuguer.

D. $5-4i$

Faux.
Tu as pris $i^2=1$ en calculant $(1-2i)^2$. Or $(-2i)^2=-4$.

Correction
Premier chemin. $z^2=-3+4i$, donc $\overline{z^2}=-3-4i$.

Second chemin. On utilise $\overline{z^2}=(\overline{z})^2$, avec $\overline{z}=1-2i$:

$$\begin{aligned}(1-2i)^2 &= 1-4i+4i^2\\ &= -3-4i.\end{aligned}$$

Les deux chemins donnent le même nombre.

La distance à l'origine

Dans la figure, à quelle distance de O se trouve $M(2+i)$? Le théorème de Pythagore donne :

$$OM=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}.$$

Cette distance porte un nom.

Définition : Module d'un nombre complexe

Soit $z=a+ib$ un nombre complexe, avec a et b réels, et M son image. Le **module** de z est le réel positif

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2}=OM.$$

De plus, $z\,\overline{z}=a^2+b^2$, donc $|z|^2=z\,\overline{z}$.

Exemple : Deux modules (guidé)

1. **Avec la formule** :
$$\begin{aligned}|3-4i| &= \sqrt{3^2+(-4)^2}\\ &= \sqrt{25}=5.\end{aligned}$$
2. **Avec le conjugué** : $|z|^2=z\,\overline{z}$, et ici $(3-4i)(3+4i)=9-16i^2=25$. Comme $25=5^2$, on retrouve $|3-4i|=5$.
3. **Un imaginaire pur** : $|-2i|=\sqrt{0^2+(-2)^2}=2$. Un module n'est jamais négatif.

Propriété : Propriétés du module

Pour tous nombres complexes z et z' et tout entier naturel n :

- $|z| = 0$ si et seulement si $z = 0$;
- $|\overline{z}| = |-z| = |z|$;
- $|zz'| = |z|\,|z'|$ et $|z^n| = |z|^n$;
- si $z' \neq 0$, $\left|\dfrac{1}{z'}\right| = \dfrac{1}{|z'|}$ et $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$.

Attention : Le module d'une somme

Prends $z = 2i$ et $z' = -2i$. Leurs modules valent 2 chacun, soit 4 en tout. Or $z + z' = 0$, de module 0 .

Le module se multiplie avec un produit. Il ne s'additionne pas avec une somme.

Vérifie : Le module d'un produit

Que vaut $|(1+i)(3-4i)|$?

A. $5 + \sqrt{2}$

Faux.
Tu as additionné les modules. Pour un produit, on les **multiplie**.

B. 50

Faux.
50 est le **carré** du module, car $(7-i)(7+i) = 50$. Il manque la racine.

C. $5\sqrt{2}$

Juste.
$|1+i| = \sqrt{2}$, $|3-4i| = 5$, et le module d'un produit est le produit des modules.

D. 7

Faux.
Le produit vaut $7 - i$. Le nombre 7 est sa partie réelle, pas son module.

Correction
Avec la règle du produit. Le module d'un produit est le produit des modules :

$$\begin{aligned} &|(1+i)(3-4i)| \\ &= |1+i| \times |3-4i| \\ &= \sqrt{2} \times 5 = 5\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Vérification directe. $(1+i)(3-4i) = 7 - i$, et

$$\begin{aligned} |7-i| &= \sqrt{49+1} \\ &= \sqrt{50} = 5\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Inverse et quotient

Chasser i du dénominateur

Écrire $\dfrac{1}{1-i}$ sous la forme $a+ib$ semble difficile : le i est en bas. Mais regarde :

$$(1-i)(1+i) = 1 - i^2 = 2.$$

Multiplier par le conjugué rend le dénominateur réel. Toute l'astuce est là.

Propriété : Inverse et quotient sous forme algébrique

Tout nombre complexe z non nul a un **inverse** :

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}, \quad \text{soit, pour } z = a+ib : \quad \frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}.$$

Pour tout nombre complexe z', le quotient $\dfrac{z'}{z}$ s'écrit $\dfrac{z'\,\overline{z}}{|z|^2}$: on multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur.

Exemple : Un quotient (guidé)

On écrit $\dfrac{2+i}{1-i}$ sous forme algébrique. Le conjugué du dénominateur est $1+i$:

$$\begin{aligned} \frac{2+i}{1-i} &= \frac{(2+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} \\ &= \frac{2+3i+i^2}{1-i^2} \\ &= \frac{1+3i}{2} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\,i. \end{aligned}$$

Méthode : écrire un quotient sous forme algébrique

1. **Repère** le conjugué du dénominateur.
2. **Multiplie** le haut et le bas par ce conjugué.
3. **En bas**, tu obtiens un réel strictement positif : la somme des carrés des deux parties.
4. **En haut**, développe et remplace i^2 par -1.
5. **Sépare** la partie réelle et la partie imaginaire.

À toi

À toi : Un quotient à écrire

Écris $\dfrac{3+i}{1+2i}$ sous forme algébrique.

Indice 1

Le conjugué du dénominateur est $1-2i$.

Indice 2

En bas : $(1+2i)(1-2i) = 1+4 = 5$.

Indice 3

En haut : développe $(3+i)(1-2i)$ sans oublier $i^2 = -1$.

Réponse

On multiplie en haut et en bas par $1-2i$, le conjugué du dénominateur :

$$\begin{aligned}&\frac{3+i}{1+2i}\\ &= \frac{(3+i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}\\ &= \frac{3-6i+i-2i^2}{5}\\ &= \frac{5-5i}{5}\\ &= 1-i.\end{aligned}$$

Contrôle :

$$\begin{aligned}&(1-i)(1+2i)\\ &= 1+2i-i-2i^2\\ &= 3+i.\end{aligned}$$

On retrouve bien le numérateur.

Trouve l'erreur : Un inverse trop rapide

Un élève écrit $\dfrac{1}{2+i} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{i}$. Que vaut vraiment $\dfrac{1}{2+i}$?

A. $\dfrac{1}{2} - i$

Faux.

C'est le résultat de l'élève, car $\dfrac{1}{i} = -i$. Or l'inverse d'une somme n'est pas la somme des inverses.

B. $\dfrac{2+i}{5}$

Faux.

En haut, on doit trouver le conjugué $2-i$, celui par lequel on a multiplié.

C. $\dfrac{2-i}{3}$

Faux.

En bas, $(2+i)(2-i) = 4 - i^2 = 4 + 1 = 5$, et non $4 - 1$.

D. $\dfrac{2}{5} - \dfrac{1}{5}\,i$

Juste.

On multiplie en haut et en bas par $2 - i$: on obtient $\dfrac{2-i}{5}$.

Correction

On multiplie en haut et en bas par $2 - i$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2+i} &= \frac{2-i}{(2+i)(2-i)} \\ &= \frac{2-i}{5} \\ &= \frac{2}{5} - \frac{1}{5}\,i.\end{aligned}$$

L'erreur de l'élève : couper une fraction dont le dénominateur est une somme. Ce n'est pas plus permis avec i qu'avec des réels : $\dfrac{1}{2+3}$ ne vaut pas $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}$.

Le mot du prof. Tu sais maintenant écrire n'importe quel quotient sous la forme $a + ib$. Garde cette méthode sous la main : elle resservira pour reconnaître la forme d'un triangle.

Équations du second degré dans $\mathbb{C}$

Ce que la 1ère laissait de côté

Petit rappel. Pour $ax^2 + bx + c = 0$, avec a, b, c réels et $a \neq 0$, on calcule $\Delta = b^2 - 4ac$. En 1ère, si $\Delta < 0$, on concluait : pas de solution réelle.

Dans $\mathbb{C}$, l'histoire continue. Un réel négatif y devient un carré : par exemple, $-49 = (7i)^2$.

Devine : Résoudre une équation sans solution réelle

Quelles sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 + 9 = 0$?

A. Il n'y en a pas : un carré n'est jamais négatif.

Faux.

C'est vrai pour un carré de **réel**. Dans $\mathbb{C}$, $(3i)^2 = 9i^2 = -9$.

B. 3 et -3

Faux.

$3^2 + 9 = 18$: ce ne sont pas des solutions. Ce sont celles de $z^2 - 9 = 0$.

C. $3i$ seulement

Faux.

Il en manque une : $(-3i)^2 = 9i^2 = -9$ aussi.

D. $3i$ et $-3i$

Juste.
$(3i)^2 = (-3i)^2 = -9$: les deux conviennent.

Correction
L'équation s'écrit $z^2 = -9$. Or $-9 = (3i)^2$, donc, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} z^2 + 9 &= z^2 - (3i)^2 \\ &= (z - 3i)(z + 3i). \end{aligned}$$

Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul. Les solutions sont donc $3i$ et $-3i$: deux nombres **conjugués**.

Théorème : Équation du second degré à coefficients réels

Soient a, b et c des **réels**, avec $a \neq 0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$ le **discriminant** de l'équation (E) : $az^2 + bz + c = 0$, d'inconnue complexe z.

- Si $\Delta = 0$, (E) a une seule solution : $-\dfrac{b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$, (E) a deux solutions réelles : $\dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$, (E) a deux solutions complexes non réelles et conjuguées : $\dfrac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $\dfrac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Dans tous les cas, si z_1 et z_2 sont les solutions (égales lorsque $\Delta = 0$), $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

En clair. Le signe de Δ décide de tout. S'il est négatif, on l'écrit comme le carré d'un imaginaire pur. Les deux solutions sont alors conjuguées : même partie réelle, parties imaginaires opposées.

Un exemple guidé

Exemple : Résoudre z² − 2z + 5 = 0 (guidé)

1. **Discriminant** :

$$\begin{aligned} \Delta &= (-2)^2 - 4 \times 1 \times 5 \\ &= 4 - 20 = -16. \end{aligned}$$

   Il est strictement négatif.

2. **Carré** : $-16 = (4i)^2$, donc $i\sqrt{-\Delta} = 4i$.

3. **Solutions** :

$$z_1 = \frac{2 - 4i}{2} = 1 - 2i,$$
$$z_2 = \frac{2 + 4i}{2} = 1 + 2i.$$

4. **Conclusion** : $S = \{1 - 2i\,;\, 1 + 2i\}$, deux nombres conjugués.

Pour contrôler, remplace z par $1 + 2i$:

$$(1 + 2i)^2 - 2(1 + 2i) + 5$$
$$= -3 + 4i - 2 - 4i + 5 = 0.$$

Attention : Pas de racine d'un négatif

La racine carrée n'existe que pour un réel positif ou nul. Écrire « racine de -25 » n'a donc aucun sens, même dans $\mathbb{C}$.

On écrit $\Delta = -25 = (5i)^2$. Puis on utilise $i\sqrt{-\Delta} = i\sqrt{25} = 5i$ dans les formules.

Méthode : résoudre dans $\mathbb{C}$

L'équation est $az^2 + bz + c = 0$, où $a \neq 0$ et où les trois coefficients sont **réels**.

1. **Discriminant** : calcule $\Delta = b^2 - 4ac$ et écris son signe.
2. **Carré** : si $\Delta < 0$, écris $\Delta = \left(i\sqrt{-\Delta}\right)^2$.
3. **Formules** :

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a},$$
$$z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

4. **Vérifie** que les deux solutions sont conjuguées.
5. **Conclus** par l'ensemble S des solutions.

Exemple à compléter

À toi : À toi de finir

On résout dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + 4z + 13 = 0$. Le discriminant vaut $\Delta = 16 - 52 = -36$. Termine le calcul.

Indice 1
Écris -36 comme le carré d'un imaginaire pur.
Indice 2

$-36 = (6i)^2$. Ici, $-b = -4$ et $2a = 2$.

Indice 3

Simplifie chaque fraction par 2.

Réponse

$\Delta = -36 = (6i)^2$, et ici $-b = -4$, $2a = 2$. Les solutions sont

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{-4 - 6i}{2} \\ &= -2 - 3i, \\ z_2 &= \frac{-4 + 6i}{2} \\ &= -2 + 3i. \end{aligned}$$

Donc $S = \{-2 - 3i\,;\, -2 + 3i\}$: deux nombres conjugués, comme prévu.

Trouve l'erreur : Quatre copies, une seule juste

Quatre élèves résolvent $z^2 - 6z + 10 = 0$. Tous trouvent $\Delta = -4 = (2i)^2$. Quelle conclusion est juste ?

A. $S = \{-3 - i\,;\, -3 + i\}$

Faux.

Le numérateur commence par $-b$, et ici $-b = 6$. Le signe est faux.

B. $S = \{3 - 2i\,;\, 3 + 2i\}$

Faux.

Seul le 6 a été divisé par 2. La partie imaginaire doit l'être aussi.

C. $S = \{3 - i\,;\, 3 + i\}$

Juste.

$\dfrac{6 \pm 2i}{2} = 3 \pm i$: tout le numérateur est divisé par 2.

D. $S = \{6 - 2i\,;\, 6 + 2i\}$

Faux.

Le dénominateur $2a = 2$ a été oublié.

Correction

$\Delta = 36 - 40 = -4 = (2i)^2$, donc

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{6 - 2i}{2} = 3 - i, \\ z_2 &= \frac{6 + 2i}{2} = 3 + i. \end{aligned}$$

Contrôle avec $3 + i$:

$$\begin{aligned} &(3 + i)^2 - 6(3 + i) + 10 \\ &= 8 + 6i - 18 - 6i + 10 = 0. \end{aligned}$$

Coin examen

Méthode : Coin examen : la rédaction qui rapporte

Résoudre une équation à discriminant négatif est demandé dans 10 des 15 sujets consultés, pour $0{,}75$ point. Le barème constaté donne $0{,}25$ pour Δ et $0{,}25$ par solution.

> On a $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 5 = -16$, donc $\Delta < 0$ et $\Delta = (4i)^2$.
>
> L'équation admet deux solutions conjuguées : $z_1 = \dfrac{2 - 4i}{2} = 1 - 2i$ et $z_2 = \dfrac{2 + 4i}{2} = 1 + 2i$.

Écris Δ avant les solutions : c'est lui qui ouvre le barème.

Le mot du prof. Tu sais maintenant résoudre toute équation du second degré à coefficients réels. C'est souvent la première question de l'exercice. Elle se gagne dès les premières minutes.

Argument et forme trigonométrique

Une distance et une direction

Pour guider un ami vers un point, tu peux donner ses coordonnées. Tu peux aussi dire : « marche 2 km, dans telle direction ». Une distance et un angle suffisent.

Pour un nombre complexe, la distance est le module. L'angle va s'appeler l'**argument**.

Devine : Quelle direction ?

Le point M a pour affixe $1 + i$. Quelle mesure de l'angle orienté $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM}\right)$ proposes-tu ?

A. $\dfrac{\pi}{2}$

Faux.
$\dfrac{\pi}{2}$ pointe vers l'axe imaginaire, comme i. Or M a deux coordonnées égales à 1.

B. $\dfrac{\pi}{4}$

Juste.
$M(1;1)$ est sur la droite d'équation $y = x$: l'angle vaut la moitié d'un angle droit.

C. 1

Faux.
1 est une coordonnée de M, pas un angle.

D. $\dfrac{\pi}{3}$

Faux.
Avec $\dfrac{\pi}{3}$, l'ordonnée dépasserait l'abscisse. Ici, elles sont égales.

Correction

$M(1;1)$ est à égale distance des deux axes : il est sur la droite d'équation $y = x$. L'angle orienté $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM}\right)$ mesure $\frac{\pi}{4}$, à 2π près.

On dira qu'un argument de $1 + i$ est $\frac{\pi}{4}$.

Définition : Argument d'un nombre complexe non nul

Soit z un nombre complexe **non nul** et M son image. On appelle **argument** de z toute mesure, en radians, de l'angle orienté $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM}\right)$. On note $\arg z$ l'un d'eux.

Si θ est un argument de z, les arguments de z sont les réels $\theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; on écrit $\arg z \equiv \theta\ [2\pi]$.

Le nombre 0 n'a **pas** d'argument.

Attention : Zéro n'a pas d'argument

L'image de 0 est le point O lui-même. Il ne donne aucune direction : il n'y a pas d'angle à mesurer. Avant de parler d'argument, vérifie toujours que ton nombre n'est pas nul.

La forme trigonométrique

Propriété : Forme trigonométrique

Tout nombre complexe z non nul s'écrit

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta), \quad \text{avec } r = |z| \text{ et } \arg z \equiv \theta\ [2\pi].$$

C'est une **forme trigonométrique** de z. Si $z = a + ib$, avec a et b réels, alors $a = r\cos\theta$, $b = r\sin\theta$, $\cos\theta = \frac{a}{r}$ et $\sin\theta = \frac{b}{r}$.

Réciproquement, si $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $r > 0$ et θ réel, alors $|z| = r$ et $\arg z \equiv \theta\ [2\pi]$.



OM Courbe 2 Courbe 3 Point plein $M(1+i\sqrt{3})$ $\vec{u}$ Point du graphe

Le point M d'affixe 1 + i√3 est sur le cercle de centre O et de rayon 2 : son module vaut 2. Son abscisse 1 = 2 cos(π/3) et son ordonnée √3 = 2 sin(π/3) : un argument de 1 + i√3 est π/3.

Exemple : La forme trigonométrique de 1 + i√3 (guidé)

1. **Module** : $\left|1+i\sqrt{3}\right| = \sqrt{1+3} = 2$.
2. **Mise en facteur** : $1+i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
3. **Angle** : on cherche θ avec $\cos\theta = \frac{1}{2}$ et $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\theta = \frac{\pi}{3}$ convient.
4. **Conclusion** :

$$1+i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

Petit rappel de 1ère. Les valeurs à connaître :

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Les signes de $\cos\theta$ et de $\sin\theta$ indiquent le quart du plan où se trouve le point.

Méthode : de a + ib à la forme trigonométrique

1. **Module** : calcule $r = \sqrt{a^2+b^2}$.

2. **Facteur** : écris $z = r\left(\frac{a}{r} + i\,\frac{b}{r}\right)$.
3. **Angle** : cherche θ avec $\cos\theta = \frac{a}{r}$ **et** $\sin\theta = \frac{b}{r}$. Une seule condition ne suffit pas : $\frac{\pi}{3}$ et $-\frac{\pi}{3}$ ont le même cosinus.
4. **Conclusion** : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

Un point dans un autre quart

Exemple : Le nombre –2 + 2i (guidé)

1. **Module** : $r = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.
2. **Cosinus et sinus** :

$$\cos\theta = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$\sin\theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

3. **Angle** : le cosinus est négatif et le sinus positif. Comme $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, l'angle $\theta = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ convient.
4. **Conclusion** :

$$\begin{aligned} &-2 + 2i \\ &= 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

À toi : le nombre √3 – i

Écris $z = \sqrt{3} - i$ sous forme trigonométrique.

Indice 1
Commence par le module : $r = \sqrt{3+1}$.

Indice 2
Cherche θ avec $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta = -\frac{1}{2}$.

Indice 3
Le point est sous l'axe réel : tu peux choisir un angle négatif.

Réponse
Module. $r = \sqrt{3+1} = 2$, donc :

$$z = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\,i\right).$$

Angle. Il faut $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta = -\dfrac{1}{2}$, donc $\theta = -\dfrac{\pi}{6}$ convient ($\dfrac{11\pi}{6}$ aussi, à 2π près).

Conclusion.

$$\begin{aligned}&\sqrt{3} - i\\ &= 2\Big(\cos\Big(-\frac{\pi}{6}\Big)\\ &\quad + i\sin\Big(-\frac{\pi}{6}\Big)\Big).\end{aligned}$$

Trouve l'erreur : Un facteur suspect

Quels sont le module et un argument de $w = -3\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$?

A. Module -3, argument $\dfrac{\pi}{4}$.

Faux.

Un module est une distance : il n'est jamais négatif. L'écriture de w n'est pas une forme trigonométrique.

B. Module 3, argument $\dfrac{\pi}{4}$.

Faux.

Le facteur -1 a été oublié : le point est de l'autre côté de O.

C. Module 3, argument $-\dfrac{\pi}{4}$.

Faux.

Changer le signe de l'angle donne le **conjugué**, pas l'opposé.

D. Module 3, argument $\dfrac{5\pi}{4}$.

Juste.

Multiplier par -1 fait un demi-tour : on ajoute π à l'angle.

Correction

Le facteur -3 est négatif : ce n'est pas une forme trigonométrique. On écrit :

$$w = 3\left(-\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Or :

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right) &= -\cos\frac{\pi}{4},\\ \sin\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right) &= -\sin\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Donc :

$$w = 3\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right).$$

Son module est 3 et un argument est $\dfrac{5\pi}{4}$.

Coin examen

Méthode : Coin examen : module, argument, forme

Une forme trigonométrique est demandée dans 10 des 15 sujets consultés, pour $0{,}25$ à $0{,}5$ point. Le module et un argument sont demandés à part dans 7 des 15 sujets consultés, à $0{,}25$ point chacun.

Pour $z = -2 + 2i$, rédige ainsi :

> $|z| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, donc $z = 2\sqrt{2}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, soit $z = 2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$.
>
> Ainsi $|z| = 2\sqrt{2}$ et $\arg z \equiv \dfrac{3\pi}{4}\ [2\pi]$.

Les sujets écrivent toujours $r(\cos\theta + i\sin\theta)$, avec $r > 0$.

Arguments d'un produit, d'un quotient, d'une puissance

Multiplier, c'est tourner

Multiplie 2 par i : tu obtiens $2i$. Le point a tourné d'un quart de tour autour de O. Multiplie encore par i : $2i \times i = -2$. Encore un quart de tour !

Multiplier par i ajoute $\dfrac{\pi}{2}$ à l'argument de tout nombre **non nul**. C'est une règle générale.

Propriété : Argument d'un produit, d'un inverse, d'un quotient, d'une puissance

Pour tous nombres complexes z et z' **non nuls** et tout entier relatif n :

- $\arg(zz') \equiv \arg z + \arg z'\ [2\pi]$;
- $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) \equiv -\arg z\ [2\pi]$ et $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) \equiv \arg z - \arg z'\ [2\pi]$;
- $\arg(z^n) \equiv n\arg z\ [2\pi]$;
- $\arg\overline{z} \equiv -\arg z\ [2\pi]$ et $\arg(-z) \equiv \pi + \arg z\ [2\pi]$.

Exemple : Un produit (guidé)

On sait que $\arg(1+i) \equiv \dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$ et $\arg\left(\sqrt{3} - i\right) \equiv -\dfrac{\pi}{6}\ [2\pi]$. Les deux nombres sont non nuls : d'après l'argument d'un produit,

$$\begin{aligned}&\arg\left((1+i)\left(\sqrt{3}-i\right)\right)\\ &\equiv \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\ [2\pi]\\ &\equiv \frac{\pi}{12}\ [2\pi].\end{aligned}$$

D'après le module d'un produit, le module de ce produit vaut $|1+i| \times \left|\sqrt{3}-i\right| = \sqrt{2} \times 2 = 2\sqrt{2}$.

Réel ou imaginaire pur

Propriété : Nombres réels et imaginaires purs par l'argument

Soit z un nombre complexe **non nul**.

- z est réel si et seulement si $\arg z \equiv 0\ [\pi]$;
- z est imaginaire pur si et seulement si $\arg z \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$.

Vérifie : Réel ou imaginaire pur ?

Soit z un nombre complexe non nul tel que $\arg z \equiv \dfrac{\pi}{6}\ [2\pi]$. Que peut-on dire de z^3 ?

A. z^3 est réel.

Faux.
Un argument de z^3 est $\dfrac{\pi}{2}$, qui n'est pas un multiple de π.

B. z^3 est imaginaire pur.

Juste.
$\arg(z^3) \equiv 3 \times \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

C. On ne peut rien dire sans connaître $|z|$.

Faux.
Le module ne change que la distance à O, pas la direction. La nature dépend seulement de l'argument.

D. z^3 n'est ni réel, ni imaginaire pur.

Faux.
Calcule son argument : $3 \times \dfrac{\pi}{6}$ tombe sur l'axe imaginaire.

Correction

Comme z est non nul, l'argument d'une puissance donne :

$$\arg(z^3) \equiv 3 \arg z \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi].$$

Or $\dfrac{\pi}{2} \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$, donc z^3 est imaginaire pur. Son image est sur l'axe imaginaire.

Une somme, puis un quotient

Attention : Une somme ne se traite pas comme un produit

Prends $z = i$ et $z' = -1$. Ils ont pour arguments $\frac{\pi}{2}$ et π, de somme $\frac{3\pi}{2}$. Or $z + z' = -1 + i$, dont un argument est $\frac{3\pi}{4}$.

Pour un **produit**, les arguments s'additionnent. Pour une somme, cette règle est fausse : on repasse par la forme algébrique.

À toi : Un quotient sans calcul

On sait que $\arg\left(1 + i\sqrt{3}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ et $\arg\left(\sqrt{3} - i\right) \equiv -\frac{\pi}{6}\ [2\pi]$, et ces deux nombres ont pour module 2. Donne le module et un argument de $q = \frac{1 + i\sqrt{3}}{\sqrt{3} - i}$, puis sa forme algébrique.

Indice 1

Les deux nombres sont non nuls : la règle du quotient s'applique.

Indice 2

On divise les modules et on soustrait les arguments.

Réponse

Module. D'après le module d'un quotient, $|q| = \frac{2}{2} = 1$.

Argument. Les deux nombres sont non nuls ; d'après l'argument d'un quotient :

$$\begin{aligned} \arg q &\equiv \frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{6}\right) \\ &= \frac{\pi}{2}\ [2\pi]. \end{aligned}$$

Forme algébrique. $q = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$, sans aucun développement.

Forme exponentielle et puissances

Une écriture plus courte

Écrire $\cos\theta + i\sin\theta$ à chaque ligne est long. On lui donne un nom court : $e^{i\theta}$.

Attention, c'est seulement une **notation**. Tu n'as besoin d'aucune autre connaissance : tout se déduit du cosinus et du sinus.

Définition : Notation exponentielle

Pour tout réel θ, on **note**

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

Tout nombre complexe z non nul s'écrit alors $z = re^{i\theta}$, avec $r = |z|$ et $\arg z \equiv \theta\ [2\pi]$: c'est une **forme exponentielle** de z. Réciproquement, si $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$, alors $|z| = r$ et $\arg z \equiv \theta\ [2\pi]$.

Exemple : Quatre nombres en notation exponentielle

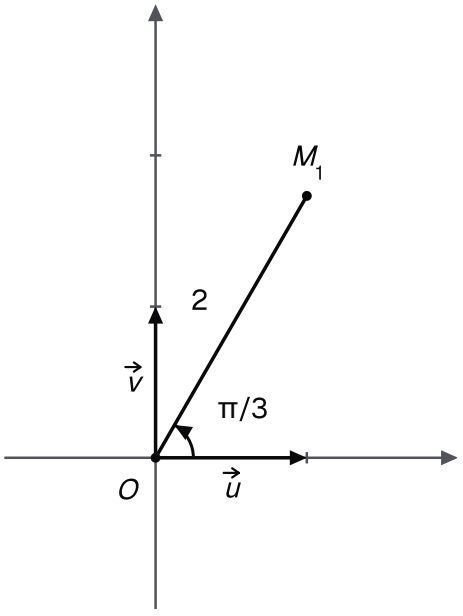
- $i = \cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2} = e^{i\pi/2}$;
- $-1 = \cos\pi + i\sin\pi = e^{i\pi}$;
- $1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\pi/3}$, d'après la forme trigonométrique trouvée plus haut ;
- $-2 + 2i = 2\sqrt{2}\,e^{3i\pi/4}$, pour la même raison.

Propriété : Calculs avec la notation exponentielle

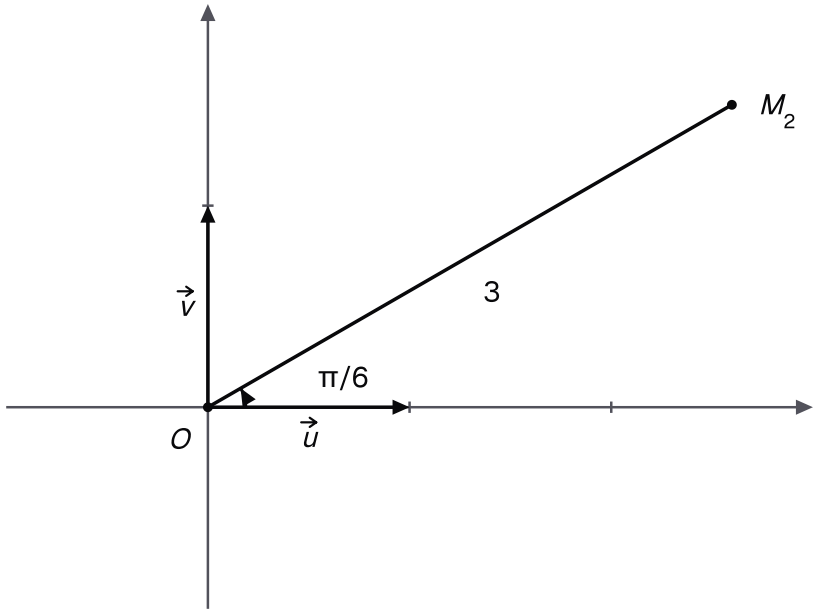
Pour tous réels θ et θ' et tout entier relatif n :

- $|e^{i\theta}| = 1$ et $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$;
- $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$;
- $\dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$ et $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$;
- $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$.

En clair. Quand on multiplie, les angles s'ajoutent. Quand on divise, ils se soustraient. C'est la règle des arguments, écrite plus vite.



Premier facteur, 2e^(iπ/3) : son image M_1 est à distance 2 de O, et l'angle orienté de u vers OM_1 vaut π/3.



Second facteur, 3e^(iπ/6) : son image M_2 est à distance 3 de O, et sa direction ne s'écarte de u que de π/6.

Vérifie : Un produit en un clin d'œil

Que vaut $2e^{i\pi/3} \times 3e^{i\pi/6}$?

A. $5i$

Faux.

Les modules se **multiplient** : $2 \times 3 = 6$, et non $2 + 3$.

B. $6i$

Juste.

$6e^{i(\pi/3+\pi/6)} = 6e^{i\pi/2} = 6i$.

C. $6e^{i\pi/6}$

Faux.

Pour un produit, les angles s'**ajoutent** : $\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$. On les soustrait seulement pour un quotient.

D. 6

Faux.

$e^{i\pi/2}$ ne vaut pas 1 : c'est $\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$.

Correction

Les modules se multiplient et les angles s'ajoutent :

$$\begin{aligned} & 2e^{i\pi/3} \times 3e^{i\pi/6} \\ &= 6\,e^{i(\pi/3+\pi/6)} \\ &= 6\,e^{i\pi/2} \\ &= 6i. \end{aligned}$$

Les puissances

Théorème : Formule de Moivre

Pour tout réel θ et tout entier relatif n :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

En clair. Pour élever à une puissance n, entier relatif, on multiplie l'angle par n. Pour $r > 0$ et θ réel :

$$\left(re^{i\theta}\right)^n = r^n e^{in\theta}.$$

Exemple : La puissance sixième de 1 + i√3 (guidé)

On part de $1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\pi/3}$. D'après la formule de Moivre :

$$\begin{aligned}\left(1+i\sqrt{3}\right)^6 &= 2^6\, e^{6i\pi/3}\\ &= 64\, e^{2i\pi}\\ &= 64.\end{aligned}$$

En effet, $e^{2i\pi} = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1$.

Développer six fois aurait pris bien plus de temps.

Méthode : calculer une puissance

1. **Change de forme** : écris le nombre sous la forme $re^{i\theta}$.
2. **Élève** : le module devient r^n, l'angle devient $n\theta$.
3. **Simplifie** l'angle en retirant des multiples de 2π.
4. **Reviens** à la forme $a + ib$ si l'énoncé la demande.

À toi : une puissance de 1 + i

Calcule $(1+i)^8$.

Indice 1
Passe à la forme exponentielle : $|1+i| = \sqrt{2}$ et un argument est $\dfrac{\pi}{4}$.
Indice 2
$\left(\sqrt{2}\right)^8 = 2^4$.
Indice 3
$8 \times \dfrac{\pi}{4} = 2\pi$.

Réponse
Le module de $1+i$ vaut $\sqrt{2}$ et un argument est $\dfrac{\pi}{4}$: $1 + i = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$. D'après la formule de Moivre :

$$\begin{aligned}(1+i)^8 &= \left(\sqrt{2}\right)^8 e^{8i\pi/4} \\ &= 16\, e^{2i\pi} \\ &= 16.\end{aligned}$$

Le résultat est un réel.

Au bac, une puissance est demandée dans 6 des 15 sujets consultés. Souvent, il faut montrer qu'un nombre z^n est réel. Aucun de ces sujets ne nomme la formule de Moivre : ils passent par la forme trigonométrique.

Distances, angles et ensembles de points

Une distance est un module

Le module $|z|$ mesure la distance de O à $M(z)$. Pour la distance entre deux points A et B, on regarde le vecteur $\overrightarrow{AB}$. Son affixe est $z_B - z_A$.

Propriété : Distance de deux points

Soient A et B deux points d'affixes z_A et z_B. Alors

$$AB = |z_B - z_A|.$$

Exemple : Une distance (guidé)

Soient $A(1+i)$ et $B(4+5i)$. Alors $z_B - z_A = 3 + 4i$. La distance AB est le module de cette différence :

$$AB = |3+4i| = \sqrt{9+16} = 5.$$

Un angle est un argument

Propriété : Angles orientés et arguments

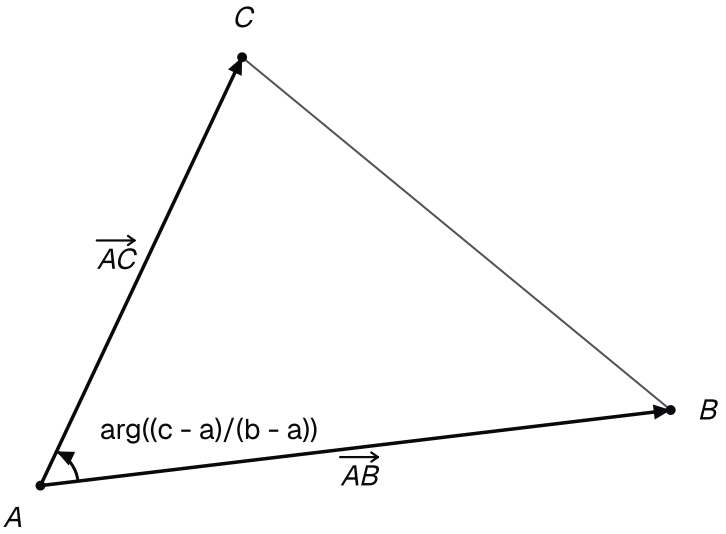
Soient A, B et C des points d'affixes a, b et c.

- Si $A \neq B$: $\left(\vec{u}, \overrightarrow{AB}\right) \equiv \arg(b-a)\ [2\pi]$.
- Si $A \neq B$ et $A \neq C$:

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)\ [2\pi] \quad \text{et} \quad \frac{AC}{AB} = \left|\frac{c-a}{b-a}\right|.$$

En clair. Pour étudier l'angle en A du triangle ABC, calcule un seul nombre : $\dfrac{c-a}{b-a}$.

Son module compare les longueurs AC et AB. Son argument mesure l'angle $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$. Note bien l'ordre : C en haut, B en bas.



Le quotient (c – a)/(b – a) se lit en A : son argument est l'angle orienté de AB vers AC, son module le rapport AC/AB.

Vérifie : Lire un quotient

Pour trois points distincts A, B et C, on trouve $\dfrac{c-a}{b-a} = 2e^{i\pi/3}$. Que peut-on affirmer ?

A. $AC = 2AB$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

Juste.

Le module donne le rapport $\dfrac{AC}{AB} = 2$. L'argument donne l'angle.

B. $AB = 2AC$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

Faux.

Le rapport est $\dfrac{AC}{AB}$: la longueur du haut, AC, est la plus grande.

C. Le triangle ABC est équilatéral.

Faux.

Un angle de $\dfrac{\pi}{3}$ ne suffit pas. Il faudrait aussi $AC = AB$, donc un module égal à 1.

Correction

Le module du quotient donne le rapport des longueurs, et son argument donne l'angle :

$$\frac{AC}{AB} = \left|2e^{i\pi/3}\right| = 2,$$
$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi].$$

Le triangle a un angle de $\dfrac{\pi}{3}$ en A. Mais il n'est pas équilatéral, car $AC \neq AB$.

Cercles et médiatrices

Propriété : Cercle et médiatrice décrits par des modules

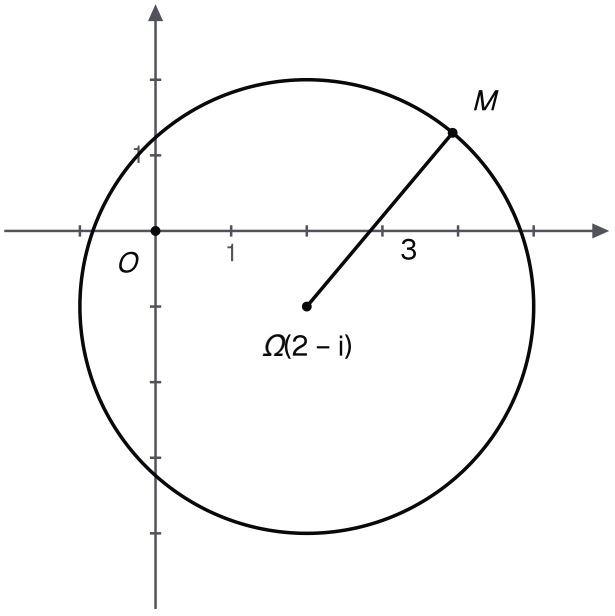
Soient Ω, A et B des points d'affixes ω, a et b, avec $A \neq B$, et r un réel strictement positif.

- L'ensemble des points $M(z)$ tels que $|z - \omega| = r$ est le **cercle** de centre Ω et de rayon r.
- L'ensemble des points $M(z)$ tels que $|z - a| = |z - b|$ est la **médiatrice** du segment $[AB]$.

Exemple : Un cercle (guidé)

Cherchons l'ensemble des points $M(z)$ tels que $|z - 2 + i| = 3$.

1. **Une différence** : $z - 2 + i = z - (2 - i)$. Soit Ω le point d'affixe $2 - i$.
2. **Traduction** : $|z - (2 - i)|$ est la distance ΩM, donc la condition s'écrit $\Omega M = 3$.
3. **Conclusion** : l'ensemble est le cercle de centre $\Omega(2 - i)$ et de rayon 3.



Le cercle de centre Ω(2 – i) et de rayon 3 : chaque point M(z) qui le parcourt vérifie ΩM = 3.

À toi : une médiatrice

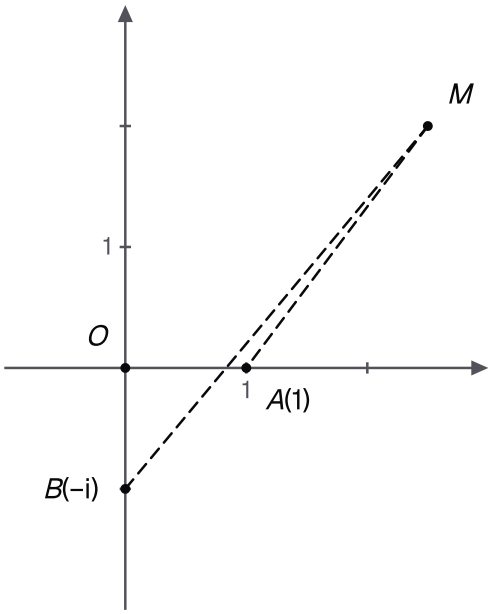
Détermine l'ensemble des points $M(z)$ tels que $|z - 1| = |z + i|$.

Indice 1
Écris $z + i$ comme une différence : $z - (-i)$.
Indice 2
Nomme $A(1)$ et $B(-i)$, puis traduis chaque module en distance.

Réponse

Soient $A(1)$ et $B(-i)$. Un module de différence est une distance : $|z-1| = AM$ et $|z+i| = |z-(-i)| = BM$.

La condition s'écrit $AM = BM$. L'ensemble est donc la **médiatrice** du segment $[AB]$.



Les points A(1) et B(–i), et un point M quelconque relié à chacun : à toi de traduire la condition en distances.

Au bac, un ensemble de points (cercle, médiatrice ou cercle circonscrit) est demandé dans 3 des 15 sujets consultés. Le barème constaté donne $0{,}25$ pour la traduction $\Omega M = r$, et $0{,}25$ pour l'ensemble.

Nature d'un triangle, alignement

Un triangle à reconnaître

Voici trois points : $A(1+i)$, $B(3+2i)$ et $C(3i)$. Le triangle ABC a-t-il une forme particulière ? Fais ta prédiction avant de regarder la figure.

Devine : Quelle forme ?

Selon toi, le triangle ABC est…

A. quelconque.

Faux.

Pas cette fois : calcule AB et AC, tu trouveras deux longueurs égales.

B. équilatéral.

Faux.

$BC = |-3+i| = \sqrt{10}$, alors que $AB = |2+i| = \sqrt{5}$. Les trois côtés ne sont pas égaux.

C. rectangle en B.

Faux.

L'angle droit est ailleurs : le quotient calculé juste après le montre.

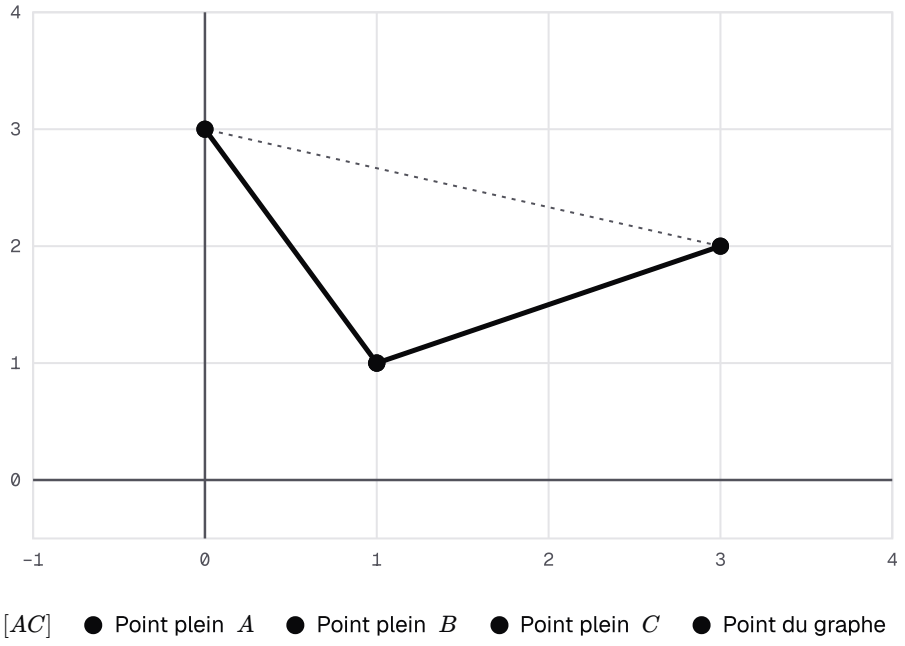
D. rectangle et isocèle en A.

Juste.

L'exemple guidé le prouve : le quotient vaut i.

Correction

Le triangle est rectangle et isocèle en A. La figure le suggère ; l'exemple guidé le démontre avec un seul quotient.



Le triangle de sommets A(1 + i), B(3 + 2i) et C(3i). Le quotient (c – a)/(b – a) vaut i : AC = AB et l'angle en A est droit. C est l'image de B par la rotation de centre A et d'angle π/2.

Exemple : Le triangle ABC (guidé)

1. **Quotient** :

$$\begin{aligned}\frac{c-a}{b-a} &= \frac{-1+2i}{2+i} \\ &= \frac{(-1+2i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} \\ &= \frac{-2+i+4i-2i^2}{5} \\ &= \frac{5i}{5} = i.\end{aligned}$$

2. **Module** : $|i| = 1$, donc $AC = AB$.

3. **Argument** : $\arg i \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$, donc $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.
4. **Conclusion** : ABC est rectangle et isocèle en A.

Méthode : nature d'un triangle

1. **Calcule** $q = \dfrac{c-a}{b-a}$, où A est le sommet étudié.
2. **Lis le module** : $|q| = 1$ signifie $AC = AB$, donc un triangle isocèle en A.
3. **Lis l'argument** : $\pm\dfrac{\pi}{2}$ signifie un angle droit en A. C'est le cas dès que q est imaginaire pur : alors $(AB) \perp (AC)$.
4. **Reconnais** les cas célèbres : $q = i$ ou $q = -i$ pour rectangle isocèle ; $q = e^{i\pi/3}$ ou $q = e^{-i\pi/3}$ pour équilatéral.

À toi

À toi : Un autre triangle

Soient $A(1)$, $B(2+i)$ et $C(-1+2i)$. Calcule $\dfrac{c-a}{b-a}$, puis donne la nature du triangle ABC.

Indice 1
$c - a = -2 + 2i$ et $b - a = 1 + i$.
Indice 2
Multiplie en haut et en bas par $1 - i$.
Indice 3
Regarde séparément le module et l'argument du résultat.

Réponse
On a $c - a = -2 + 2i$ et $b - a = 1 + i$. On multiplie en haut et en bas par $1 - i$:

$$\begin{aligned}&\frac{c-a}{b-a}\\ &= \frac{-2+2i}{1+i}\\ &= \frac{(-2+2i)(1-i)}{2}\\ &= \frac{-2+2i+2i-2i^2}{2}\\ &= 2i.\end{aligned}$$

Angle. Un argument de $2i$ est $\dfrac{\pi}{2}$: le triangle est **rectangle** en A.

Longueurs. Son module vaut 2, donc $AC = 2AB$: il n'est **pas isocèle** en A.

Trois points alignés

Propriété : Alignement et orthogonalité

Soient A, B et C des points d'affixes a, b et c, avec $A \neq B$.

- A, B et C sont **alignés** si et seulement si $\dfrac{c-a}{b-a}$ est réel.
- Si de plus $C \neq A$: les droites (AB) et (AC) sont **perpendiculaires** si et seulement si $\dfrac{c-a}{b-a}$ est imaginaire pur.

Vérifie : Alignés ou pas ?

Soient $A(1+i)$, $B(2+3i)$ et $C(4+7i)$. On calcule $\dfrac{c-a}{b-a} = \dfrac{3+6i}{1+2i}$. Que conclure ?

A. $(AB) \perp (AC)$

Faux.

Il faudrait un quotient imaginaire pur. Or $3+6i = 3(1+2i)$, donc le quotient vaut 3.

B. A, B et C sont alignés.

Juste.

$3+6i = 3(1+2i)$, donc le quotient vaut 3 : c'est un réel.

C. On ne peut rien conclure.

Faux.

Si : le quotient se simplifie, et sa nature décide.

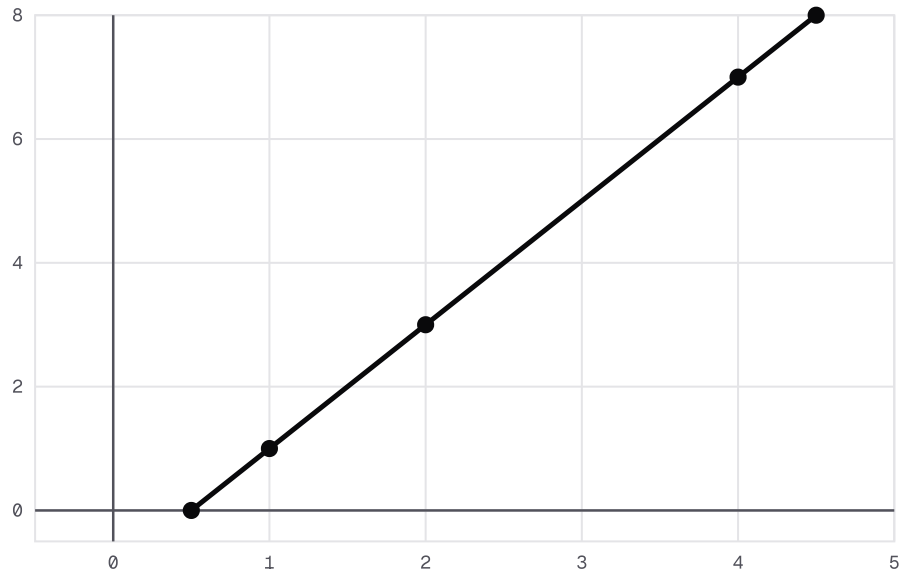
Correction

On factorise le numérateur :

$$\frac{3+6i}{1+2i} = \frac{3(1+2i)}{1+2i} = 3.$$

Ce quotient est réel : d'après la caractérisation de l'alignement par les affixes, les points A, B et C sont alignés.

De plus, son module vaut 3, donc $AC = 3AB$.



Les points A(1 + i), B(2 + 3i) et C(4 + 7i) sont sur une même droite. Le quotient (c – a)/(b – a) vaut 3 : C est trois fois plus loin de A que B, dans la même direction.

Méthode : Coin examen : nature et alignement

Une nature de triangle est demandée dans 9 des 15 sujets consultés. Le barème constaté donne $0{,}25$ par propriété : rectangle, puis isocèle. Un alignement figure dans 7 des 15 sujets consultés, noté « égalité, puis déduction ».

> On a $\dfrac{c-a}{b-a} = i$. Donc $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \arg i \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$: le triangle ABC est rectangle en A.
>
> De plus, $\left|\dfrac{c-a}{b-a}\right| = 1$, soit $AC = AB$: il est isocèle en A.

Nomme toujours le sommet de l'angle droit.

Translation, homothétie, rotation

Glisser : la translation

Une translation fait glisser tout le plan d'un même vecteur. En affixes, on ajoute le même nombre à chaque point. Par exemple, ajouter $2 - i$ déplace chaque point de 2 vers la droite et de 1 vers le bas.

Propriété : Écriture complexe d'une translation

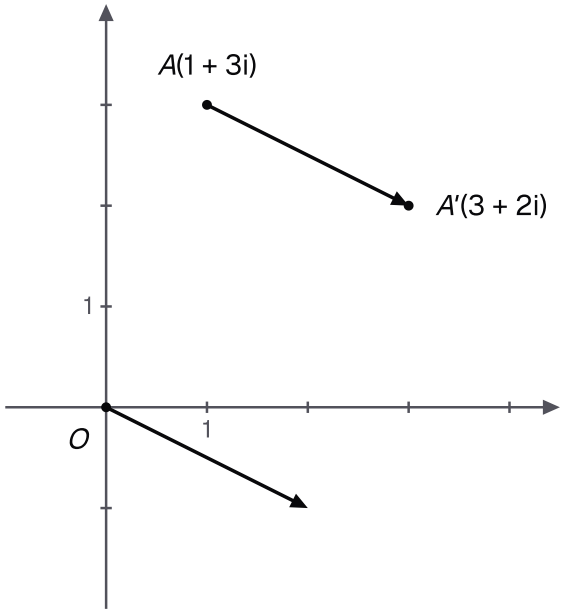
Soit $\vec{w}$ un vecteur d'affixe b. La translation de vecteur $\vec{w}$ transforme le point $M(z)$ en le point $M'(z')$ tel que

$$z' = z + b.$$

Exemple : Une image par translation

La translation de vecteur d'affixe $2 - i$ envoie $A(1 + 3i)$ sur le point d'affixe :

$$(1 + 3i) + (2 - i) = 3 + 2i.$$



Le vecteur d'affixe 2 – i, tracé depuis O puis depuis A(1 + 3i) : la flèche partie de A aboutit en A′(3 + 2i).

Agrandir : l'homothétie

Propriété : Écriture complexe d'une homothétie

Soient Ω un point d'affixe ω et k un réel non nul. L'homothétie de centre Ω et de rapport k transforme le point $M(z)$ en le point $M'(z')$ tel que

$$z' - \omega = k(z - \omega).$$

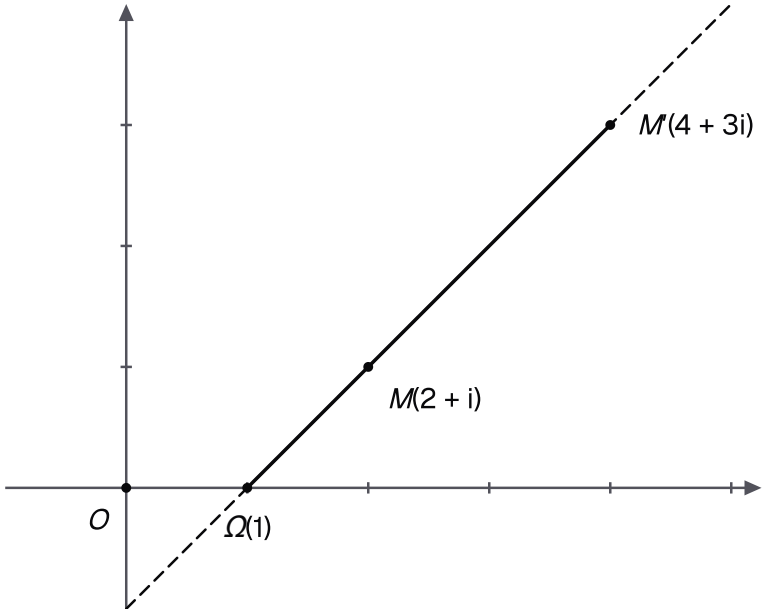
Exemple : Une image par homothétie

Pour l'homothétie de centre $\Omega(1)$ et de rapport 3, l'image de $M(2 + i)$ vérifie :

$$z' - 1 = 3(2 + i - 1).$$

Donc $z' = 1 + 3 + 3i = 4 + 3i$.

L'homothétie n'apparaît que dans un seul des 15 sujets consultés : retiens surtout la forme de l'écriture.



L'homothétie de centre Ω(1) et de rapport 3 : M'(4 + 3i) est sur la demi-droite [ΩM), trois fois plus loin de Ω que M(2 + i).

Tourner : la rotation

Devine : Un tiers de demi-tour

Le point M a pour affixe 2. On le fait tourner autour de O d'un angle $\frac{\pi}{3}$. Quelle est l'affixe de son image ?

A. $2 + \frac{\pi}{3}$

Faux.

On n'ajoute pas un angle à une affixe. Tourner, c'est **multiplier** par $e^{i\pi/3}$.

B. $2i$

Faux.

$2i$ correspond à un quart de tour, d'angle $\frac{\pi}{2}$.

C. $\sqrt{3} + i$

Faux.

$\sqrt{3} + i = 2e^{i\pi/6}$: l'angle serait $\frac{\pi}{6}$.

D. $1 + i\sqrt{3}$

Juste.

$2e^{i\pi/3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + i\sqrt{3}.$

Correction

L'image reste à la distance 2 de O, et son argument devient $\frac{\pi}{3}$. Son affixe est donc $2e^{i\pi/3} = 1 + i\sqrt{3}$.

> Tu connais ce point : c'est celui de la figure du cercle de rayon 2.

Propriété : Écriture complexe d'une rotation

Soient Ω un point d'affixe ω et θ un réel. La rotation de centre Ω et d'angle θ transforme le point $M(z)$ en le point $M'(z')$ tel que

$$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega).$$

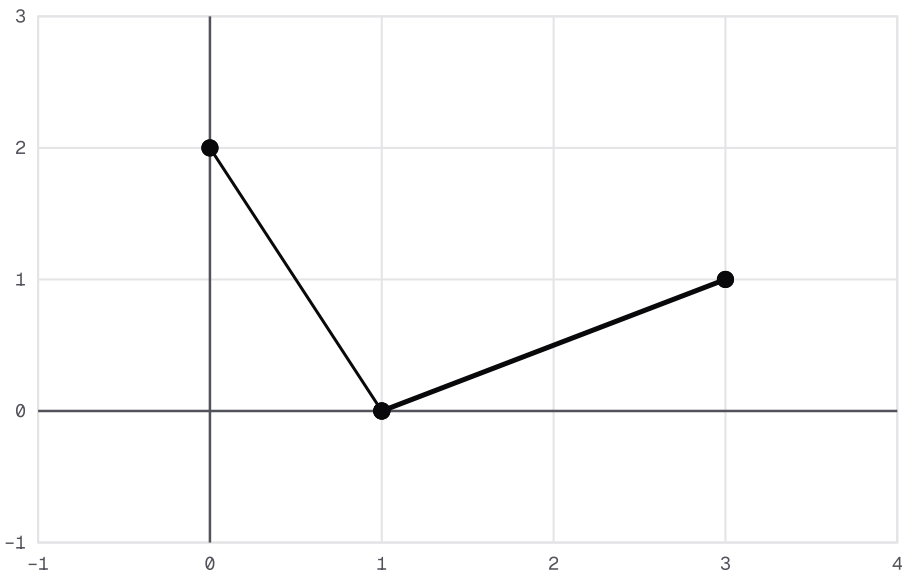
Exemple : Une rotation de centre Ω(1) (guidé)

Soit R la rotation de centre $\Omega(1)$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$. Cherchons l'image A' de $A(3+i)$.

1. **Écriture** : $z' - 1 = e^{i\pi/2}(z-1)$, avec $e^{i\pi/2} = i$.
2. **Calcul** :

$$\begin{aligned} z_{A'} &= 1 + i(3 + i - 1) \\ &= 1 + 2i + i^2 \\ &= 2i. \end{aligned}$$

3. **Contrôle** : $|2i - 1| = \sqrt{5}$ et $|3 + i - 1| = |2 + i| = \sqrt{5}$. Les distances au centre sont égales.



La rotation de centre Ω(1) et d'angle π/2 envoie A(3 + i) sur A'(2i). Les segments [ΩA] et [ΩA'] ont la même longueur √5 et forment un angle droit en Ω.

Attention : Le centre se soustrait des deux côtés

Rotation de centre $\Omega(1+i)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$: l'image de O vérifie $z'-(1+i)=i\,(0-(1+i))=1-i$, donc $z'=2$.

Un élève pressé écrit $z'=iz+(1+i)$ et trouve $1+i$. C'est faux : il n'a pas retiré le centre à z.

Méthode : image d'un point par une rotation

1. **Écris** la relation $z'-\omega=e^{i\theta}(z-\omega)$, avec le centre des deux côtés.
2. **Remplace** $e^{i\theta}$ par sa forme algébrique, par exemple $e^{-i\pi/2}=-i$.
3. **Calcule** $z'=\omega+e^{i\theta}(z-\omega)$.
4. **Contrôle** que l'image et le point sont à la même distance du centre.

À toi

À toi : Une rotation d'angle −π/2

Soit R la rotation de centre $\Omega(1-i)$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$. Calcule l'affixe de l'image de $B(3+i)$.

Indice 1
$e^{-i\pi/2}=\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-i$.
Indice 2
Calcule d'abord $z_B-\omega=(3+i)-(1-i)$.
Indice 3
Multiplie par $-i$, puis ajoute ω.

Réponse
L'écriture complexe de R est $z'-\omega=e^{-i\pi/2}(z-\omega)$, avec $\omega=1-i$ et $e^{-i\pi/2}=-i$. Comme $z_B-\omega=2+2i$:

$$\begin{aligned} z' &= \omega+e^{-i\pi/2}(z_B-\omega)\\ &= (1-i)-i(2+2i)\\ &= 1-i-2i+2\\ &= 3-3i. \end{aligned}$$

Contrôle : $|z'-\omega|=|2-2i|=2\sqrt{2}$ et $|z_B-\omega|=|2+2i|=2\sqrt{2}$.

Reconnaître une transformation

Propriété : Reconnaître une transformation d'écriture z′ = αz + β

Soient α et β des nombres complexes, avec $\alpha\neq 0$, et T la transformation qui associe au point $M(z)$ le point $M'(z')$ tel que $z'=\alpha z+\beta$.

- Si $\alpha = 1$, T est la translation de vecteur d'affixe β.
- Si $\alpha \neq 1$, T a un unique point invariant Ω, d'affixe $\omega = \dfrac{\beta}{1-\alpha}$, et $z' - \omega = \alpha(z - \omega)$. Si de plus α est réel, T est l'homothétie de centre Ω et de rapport α ; si $|\alpha| = 1$, T est la rotation de centre Ω et d'angle $\arg \alpha$.

Vérifie : Quelle transformation ?

Quelle transformation associe à $M(z)$ le point $M'(z')$ tel que $z' = iz + 2$?

A. La rotation de centre $\Omega(2)$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

Faux.
$\beta = 2$ n'est pas le centre. Le centre est le point invariant : son affixe vérifie $\omega = i\omega + 2$.

B. La translation de vecteur d'affixe 2.

Faux.
Une translation demande $\alpha = 1$. Ici $\alpha = i$.

C. La rotation de centre $\Omega(1+i)$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

Juste.
$|i| = 1$, $\arg i \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$, et le point invariant vérifie $\omega = i\omega + 2$, soit $\omega = 1 + i$.

D. L'homothétie de rapport i.

Faux.
Le rapport d'une homothétie est un réel. Or i n'est pas réel.

Correction
L'écriture est $z' = \alpha z + \beta$ avec $\alpha = i$ et $\beta = 2$. Ici $\alpha \neq 1$ et $|\alpha| = 1$: c'est une rotation d'angle $\arg i \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

Son centre est le point invariant : on résout $\omega = i\omega + 2$.

$$\begin{aligned} \omega - i\omega &= 2 \\ \omega(1-i) &= 2 \\ \omega &= \frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)} \\ &= \frac{2(1+i)}{2} = 1 + i. \end{aligned}$$

Vérification : $i(1+i) + 2 = i - 1 + 2 = 1 + i$. Le centre est bien invariant.

Méthode : Coin examen : la rotation

Une rotation figure dans 12 des 15 sujets consultés. L'image d'un point est demandée dans 10 des 15 sujets consultés, pour $0{,}25$ à $0{,}5$ point par image. Deux barèmes notent l'écriture complexe elle-même.

Commence donc toujours par elle :

> R est la rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ, donc $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$.

Bonus : les formules d'Euler

Bonus. Tu peux sauter cette section sans perdre le fil. Les formules d'Euler n'apparaissent dans aucun des 15 sujets consultés. Elles servent à écrire un carré de cosinus sans carré.

Propriété : Formules d'Euler

Pour tout réel θ :

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Exemple : Bonus : écrire cos²θ sans carré

Soit θ un réel. On remplace $\cos\theta$ par sa formule d'Euler :

$$\begin{aligned}\cos^2\theta &= \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{e^{2i\theta} + 2 + e^{-2i\theta}}{4} \\ &= \frac{2\cos(2\theta) + 2}{4} \\ &= \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}.\end{aligned}$$

Le terme 2 vient du double produit, car $e^{i\theta} \times e^{-i\theta} = \cos 0 + i\sin 0 = 1$.

Puis on applique la formule d'Euler à l'angle 2θ.

À toi : Bonus : vérifier avec une valeur

Vérifie la formule $\cos^2\theta = \dfrac{1 + \cos(2\theta)}{2}$ pour $\theta = \dfrac{\pi}{3}$.

Indice 1

$\cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$ et $\cos\dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}$.

Réponse

À gauche. $\cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$, donc $\cos^2\dfrac{\pi}{3} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$.

À droite. $2\theta = \dfrac{2\pi}{3}$ et $\cos\dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}$, donc :

$$\frac{1 + \cos\frac{2\pi}{3}}{2} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}.$$

> Les deux membres sont égaux.

Au bac : les rédactions modèles

Ce qui t'attend

Chacun des 15 sujets consultés contient un exercice sur les nombres complexes. Il y vaut 3 points dans 10 des 15 sujets consultés, et jusqu'à 5 points en 2020. Voici les questions les plus fréquentes :

Question	Sujets consultés (sur 15)	Barème constaté
Équation à discriminant négatif	10	$0{,}75$
Forme trigonométrique	10	$0{,}25$ à $0{,}5$
Image par une rotation	10	$0{,}25$ à $0{,}5$ par image
Nature d'un triangle	9	$0{,}25$ par propriété
Alignement de trois points	7	$0{,}25$ à $0{,}75$

Un exercice type, rédigé

Voici un exercice dans le style des sujets, avec des nombres nouveaux. Les points indiqués forment un barème indicatif BURHAN, tiré des barèmes consultés.

On considère l'équation (E) : $z^2 - 4z + 8 = 0$. On pose $a = 2 + 2i$, et R est la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$. On note $B(b)$ l'image de $A(a)$ par R.

Exemple : Rédaction modèle 1 : l'équation (0,75 point)

> $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 8 = -16$, donc $\Delta < 0$ et $\Delta = (4i)^2$.
>
> (E) admet deux solutions conjuguées : $z_1 = \dfrac{4 - 4i}{2} = 2 - 2i$ et $z_2 = \dfrac{4 + 4i}{2} = 2 + 2i$.

Barème constaté : $0{,}25$ pour Δ, puis $0{,}25$ par solution.

Exemple : Rédaction modèle 2 : la forme trigonométrique (0,5 point)

> $|a| = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2}$, donc $a = 2\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, soit $a = 2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Le module, puis la mise en facteur, puis l'angle : chaque étape se lit.

> **Vérifie : La bonne première ligne**
>
> Quelle première ligne écrire pour calculer b, l'affixe de l'image de A par R ?

A. $b = a + \dfrac{\pi}{2}$

Faux.

Une rotation multiplie par $e^{i\theta}$; elle n'ajoute pas l'angle.

B. $b = \overline{a}$

Faux.

Le conjugué donne le symétrique par rapport à l'axe réel, pas une rotation.

C. $b - 0 = e^{i\pi/2}(a - 0)$, donc $b = ia$.

Juste.

Le centre O a pour affixe 0 : on l'écrit, puis on simplifie.

Correction

On écrit la relation de la rotation de centre O : $b = e^{i\pi/2}\, a = ia$.

Puis $b = i(2 + 2i) = 2i + 2i^2 = -2 + 2i$.

Exemple : Rédaction modèle 3 : l'image par la rotation (0,5 point)

> R a pour écriture complexe $z' - 0 = e^{i\pi/2}(z - 0)$, soit $z' = iz$. Donc $b = ia = i(2 + 2i) = -2 + 2i$.

Exemple : Rédaction modèle 4 : la nature du triangle OAB (0,5 point)

> $\dfrac{b - 0}{a - 0} = \dfrac{b}{a} = i$. Donc $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) \equiv \arg i \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$: le triangle OAB est rectangle en O.
>
> De plus, $\left|\dfrac{b}{a}\right| = 1$, soit $OB = OA$: il est isocèle en O.

Une propriété par phrase : chacune vaut $0{,}25$ point dans les barèmes consultés.

Exemple : Rédaction modèle 5 : un alignement (0,5 point)

Soit $C(-1 - i)$.

> $\dfrac{c - 0}{a - 0} = \dfrac{-1 - i}{2 + 2i} = -\dfrac{1}{2}$. Ce quotient est réel, donc les points O, A et C sont alignés.

Le barème constaté sépare l'égalité et la déduction : écris les deux.

Le mot du prof. Relis ces cinq rédactions : elles couvrent l'essentiel des points observés. Tu n'as rien à inventer le jour de l'examen. Il te suffit de reconnaître la question, puis d'écrire la phrase qui lui correspond.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Nombres complexes » (2bac · sciences-experimentales · mathematiques)