BURHAN

Géométrie dans l'espace : fiche de révision

2ème Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-experimentales/mathematiques/geometrie-dans-l-espace/resume

Chapitre	Semestre
Géométrie dans l'espace	Semestre 2

L'essentiel du chapitre

À retenir : Six réflexes

- **Repère orthonormé d'abord** : les calculs en coordonnées (produit scalaire, norme, distance) l'exigent ; il doit être **direct** dès qu'un produit vectoriel apparaît.
- **Nombre ou vecteur** : $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est un nombre, $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est un vecteur.
- **Plan** : dans $ax + by + cz + \delta = 0$, les coefficients de x, y, z forment un vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$; le terme constant δ se calcule avec un point du plan.
- **Sphère** : complète les carrés, puis regarde le signe du nombre de droite avant de parler de rayon.
- **Sphère et plan** : calcule la distance $d = d(\Omega, (P))$ et compare-la à R.
- **Contrôle** : un point trouvé se vérifie dans l'équation ; un produit vectoriel se vérifie par deux produits scalaires nuls.

Produit scalaire en repère orthonormé

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

Norme d'un vecteur

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Plan de vecteur normal n(a ; b ; c)

$$ax + by + cz + \delta = 0$$

Distance d'un point à un plan

$$d(A, (P)) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + \delta|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Sphère de centre Ω et de rayon R

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

Rayon du cercle d'intersection, quand d < R

$$r = \sqrt{R^2 - d^2}$$

Produit vectoriel, base orthonormée directe

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (yz' - zy')\,\vec{i} + (zx' - xz')\,\vec{j} + (xy' - yx')\,\vec{k}$$

Aire du triangle ABC

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|$$

Distance d'un point à la droite passant par A, dirigée par u

$$d(M, (D)) = \frac{\left\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\right\|}{\|\vec{u}\|}$$

Deux produits, deux natures : ne les mélange jamais.

Question	Produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$	Produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$
Que donne-t-il ?	un nombre réel	un vecteur
Comment le calculer ?	$xx' + yy' + zz'$	trois déterminants 2×2
Quand est-il nul ?	quand $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux	quand $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires
Et si on échange $\vec{u}$ et $\vec{v}$?	rien ne change	le signe change
Quel repère pour ces formules ?	orthonormé	orthonormé direct
À quoi sert-il ?	orthogonalité, normes, distances, équation de plan	vecteur normal à (ABC), aire, distance à une droite

A. Produit scalaire dans l'espace

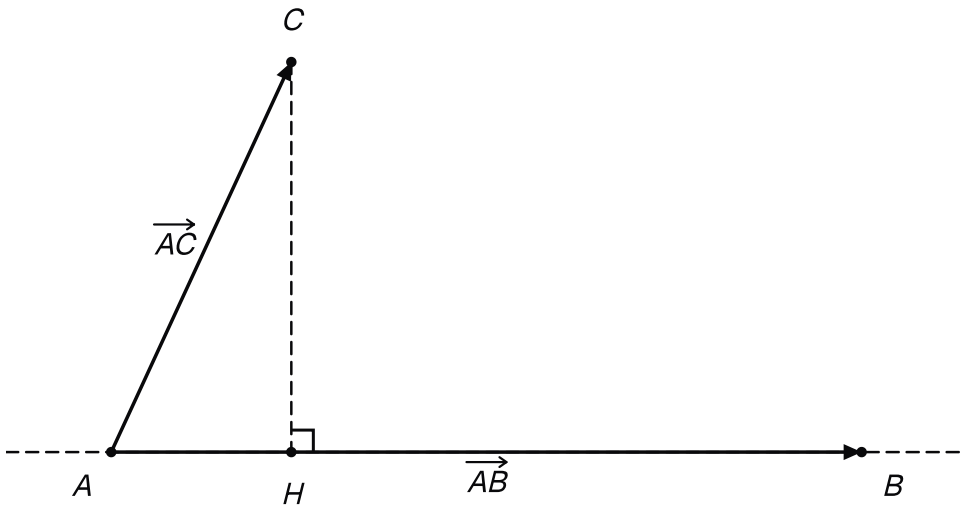
Définition : Produit scalaire de deux vecteurs de l'espace

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace, et A, B, C trois points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Il existe au moins un plan contenant A, B et C. Le **produit scalaire** $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ calculé dans un tel plan ; il ne dépend ni du point A ni du plan choisis.

Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\theta$, où θ est la mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{BAC}$. Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Propriété : Produit scalaire et projection orthogonale

Soient A, B, C trois points de l'espace avec $A \neq B$, et H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB). Alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$. Ainsi $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont le même sens, et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH$ s'ils sont de sens contraires.



H, projeté orthogonal de C sur (AB), remplace C dans le calcul : AB · AC = AB · AH.

Propriété : Symétrie, bilinéarité et carré scalaire

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ de l'espace et tout réel α :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ (symétrie) ;
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ et $(\alpha\vec{u}) \cdot \vec{v} = \alpha\,(\vec{u} \cdot \vec{v})$ (bilinéarité) ;
- $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$: c'est le **carré scalaire** de $\vec{u}$, noté aussi $\vec{u}^{\,2}$.

Définition : Vecteurs orthogonaux, droites orthogonales

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace sont **orthogonaux**, et l'on note $\vec{u} \perp \vec{v}$, lorsque $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur. Deux droites de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonales** lorsque $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$; elles ne sont pas forcément sécantes.

Définition : Base orthonormée, repère orthonormé

Une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace est **orthonormée** lorsque $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$ et que $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{i} \cdot \vec{k} = 0$. Un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est **orthonormé** lorsque sa base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthonormée.

En clair. Trois points de l'espace sont toujours dans un même plan. Le produit scalaire de l'espace se calcule donc comme en première, dans ce plan, et garde ses règles : symétrie, bilinéarité, $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$. Dès qu'un repère orthonormé est donné, tu calculs surtout en coordonnées.

Propriété : Expression analytique du produit scalaire

Dans une base orthonormée, si $\vec{u}$ a pour coordonnées $(x;y;z)$ et $\vec{v}$ a pour coordonnées $(x';y';z')$, alors

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy' + zz'.$$

En particulier, $\vec{u} \perp \vec{v}$ si et seulement si $xx' + yy' + zz' = 0$.

Propriété : Norme d'un vecteur, distance de deux points

Dans un repère orthonormé, si $\vec{u}$ a pour coordonnées $(x;y;z)$, alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Pour deux points $A(x_A;y_A;z_A)$ et $B(x_B;y_B;z_B)$:

$$AB = \sqrt{\begin{matrix}(x_B-x_A)^2 + (y_B-y_A)^2 \\ + (z_B-z_A)^2\end{matrix}}.$$

Méthode : prouver une orthogonalité en coordonnées

1. **Le cadre** : assure-toi que le repère est orthonormé ; sinon, la formule en coordonnées ne s'applique pas.
2. **Les coordonnées** : pour un vecteur $\overrightarrow{AB}$, retranche celles de A à celles de B.
3. **Le calcul** : multiplie les abscisses, les ordonnées, les cotes, puis additionne les trois produits.
4. **La conclusion** : une somme nulle prouve l'orthogonalité ; une somme non nulle la réfute.

Exemple : orthogonalité, norme, distance

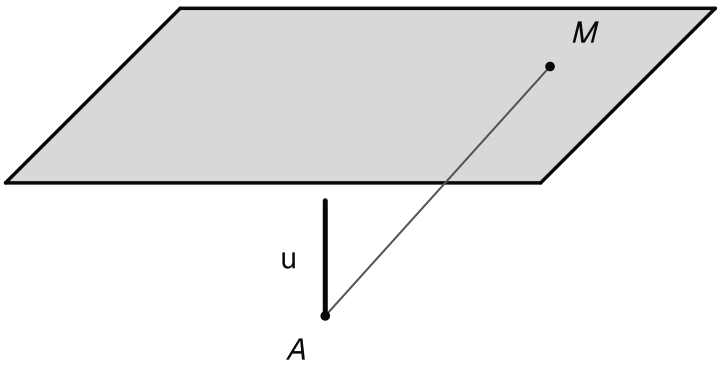
Le repère est orthonormé ; $\vec{u}(2;6;-3)$ et $\vec{v}(3;0;2)$.

- $\vec{u}\cdot\vec{v} = 2\times 3 + 6\times 0 + (-3)\times 2 = 0$: $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.
- Avec $\vec{w}(1;1;1)$: $\vec{u}\cdot\vec{w} = 2+6-3 = 5 \neq 0$, donc $\vec{u}$ et $\vec{w}$ ne sont pas orthogonaux.
- $\|\vec{u}\| = \sqrt{4+36+9} = \sqrt{49} = 7$.
- Pour $A(2;-1;4)$ et $B(4;3;0)$: $\overrightarrow{AB}(2;4;-4)$ et $AB = \sqrt{4+16+16} = 6$.

B1. Applications : plans et distances

Propriété : Ensemble des points M tels que u·AM = k

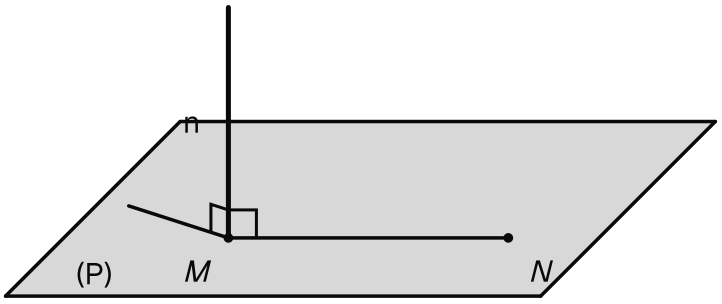
Soient $\vec{u}$ un vecteur non nul, A un point et k un réel. L'ensemble des points M de l'espace tels que $\vec{u}\cdot\overrightarrow{AM} = k$ est un plan, orthogonal à toute droite de vecteur directeur $\vec{u}$. Pour $k=0$, c'est le plan passant par A et orthogonal à $\vec{u}$.



Avec u vertical, la condition u · AM = k fixe la hauteur de M au-dessus de A : les points M forment un plan orthogonal à u.

Définition : Vecteur normal à un plan

Un vecteur $\vec{n}$ **non nul** est **normal** au plan (P) lorsqu'il est orthogonal à tout vecteur $\overrightarrow{MN}$, où M et N sont deux points de (P). On admet qu'il suffit que $\vec{n}$ soit orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de (P).



Un vecteur normal n à (P) : orthogonal à MN et à une seconde direction du plan, il l'est à tout vecteur de (P).

Propriété : Plan défini par un point et un vecteur normal

Dans un repère orthonormé, soient $A(x_A; y_A; z_A)$ un point et $\vec{n}(a; b; c)$ un vecteur non nul. Le plan (P) passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ est l'ensemble des points M tels que $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$. Il admet une équation cartésienne de la forme

$$ax + by + cz + d = 0,$$

avec $d = -(ax_A + by_A + cz_A)$.

Propriété : Lecture d'un vecteur normal sur une équation cartésienne

Dans un repère orthonormé, soient a, b, c, d des réels avec $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$. L'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que $ax + by + cz + d = 0$ est un plan, de vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$.

Méthode : un point et un vecteur normal donnent le plan

1. **Repère les données** : le point $A(x_A; y_A; z_A)$ et le vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$.
2. **Écris** tout de suite $ax + by + cz + \delta = 0$ avec ces trois coefficients.
3. **Trouve le terme constant** δ : remplace x, y, z par les coordonnées de A, puis résous.
4. **Relis** : A doit annuler le premier membre de l'équation finale.

Exemple : un plan, une distance, un projeté

Le plan (P) passe par $A(1; -1; 2)$ et admet $\vec{n}(2; 3; 6)$ pour vecteur normal. Il a une équation $2x + 3y + 6z + \delta = 0$; avec A : $2 - 3 + 12 + \delta = 0$, donc $\delta = -11$ et $(P) : 2x + 3y + 6z - 11 = 0$.

Pour $B(3; 4; 7)$:

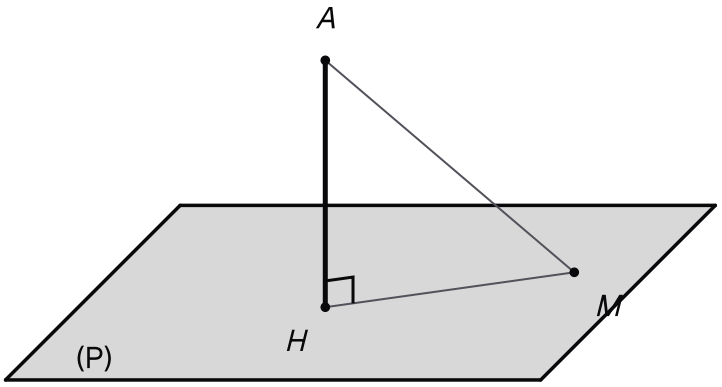
$$\begin{aligned} & d(B, (P)) \\ &= \frac{|6 + 12 + 42 - 11|}{\sqrt{4 + 9 + 36}} \\ &= \frac{49}{7} = 7. \end{aligned}$$

La droite passant par B, dirigée par $\vec{n}$, a pour points $(3 + 2t; 4 + 3t; 7 + 6t)$, avec $t \in \mathbb{R}$. Dans l'équation de (P) : $49 + 49t = 0$, donc $t = -1$, et le projeté orthogonal de B sur (P) est $H(1; 1; 1)$.

Contrôle : $BH = \sqrt{4 + 9 + 36} = 7$.

Définition : Distance d'un point à un plan

Soient (P) un plan, A un point de l'espace et H le projeté orthogonal de A sur (P), c'est-à-dire le point d'intersection de (P) et de la droite passant par A orthogonale à (P). La **distance** de A au plan (P) est $d(A, (P)) = AH$. C'est la plus petite des distances AM, pour M dans (P).



La distance de A au plan (P) est AH, où H est le pied de la perpendiculaire ; tout autre point M du plan est plus loin de A.

Propriété : Formule de la distance d'un point à un plan

Dans un repère orthonormé, soient (P) le plan d'équation $ax+by+cz+d=0$, avec $(a;b;c)\neq(0;0;0)$, et $A(x_A;y_A;z_A)$ un point. Alors

$$d(A,(P)) = \frac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Propriété : Parallélisme et orthogonalité par les vecteurs normaux

Soient (P) et (P') deux plans de vecteurs normaux $\vec{n}$ et $\vec{n}'$, et (D) une droite de vecteur directeur $\vec{u}$.

- (P) et (P') sont parallèles (éventuellement confondus) si et seulement si $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont colinéaires ;
- (P) et (P') sont perpendiculaires si et seulement si $\vec{n}\cdot\vec{n}'=0$;
- (D) est orthogonale à (P) si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires ;
- (D) est parallèle à (P) (éventuellement contenue dans (P)) si et seulement si $\vec{u}\cdot\vec{n}=0$.

Propriété : Droite passant par un point et orthogonale à un plan

Dans un repère orthonormé, soient (P) un plan de vecteur normal $\vec{n}(a;b;c)$ et $A(x_A;y_A;z_A)$ un point. La droite (Δ) passant par A et orthogonale à (P) est la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{n}$; elle admet la représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R}).$$

Elle coupe (P) en un seul point : le projeté orthogonal de A sur (P).

Méthode : le projeté orthogonal d'un point sur un plan

1. **La droite** : écris la droite passant par le point, avec le vecteur normal du plan comme vecteur directeur.
2. **Le report** : remplace x, y, z dans l'équation du plan ; il reste une équation du premier degré en t.
3. **Le point** : cette valeur de t donne le projeté H ; vérifie qu'il est bien dans le plan.
4. **Contrôle possible** : la distance du point à H égale la distance du point au plan.

Exemple : parallèles ou perpendiculaires

On garde $(P) : 2x + 3y + 6z - 11 = 0$, de vecteur normal $\vec{n}(2; 3; 6)$.

- $(P') : 4x + 6y + 12z + 5 = 0$ a pour vecteur normal $\vec{n}'(4; 6; 12)$, et $\vec{n}' = 2\vec{n}$: (P') est parallèle à (P).
- $(Q) : 3x - z + 1 = 0$ a pour vecteur normal $\vec{m}(3; 0; -1)$, et $\vec{n} \cdot \vec{m} = 6 + 0 - 6 = 0$: (Q) est perpendiculaire à (P).

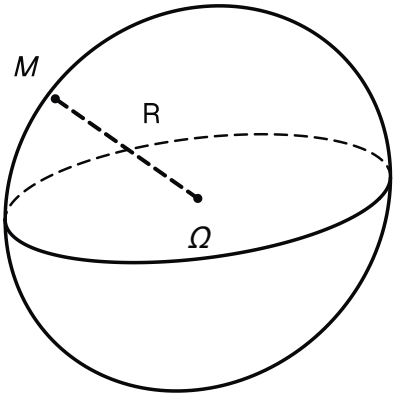
Trois distances, trois formules : choisis-la d'après les deux objets.

Distance	Formule	Ce qu'il te faut
de deux points A et B	$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$	les coordonnées des deux points
d'un point A à un plan (P)	$d(A, (P)) = \dfrac{\lvert ax_A + by_A + cz_A + \delta \rvert}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$	une équation cartésienne de (P)
d'un point M à une droite (D)	$d(M, (D)) = \dfrac{\lVert \overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} \rVert}{\lVert \vec{u} \rVert}$	un point A et un vecteur directeur $\vec{u}$ de (D)

B2. Applications : la sphère

Définition : Sphère

Soient Ω un point de l'espace et R un réel strictement positif. La **sphère** de centre Ω et de rayon R est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\Omega M = R$.



Une sphère de centre Ω et de rayon R : le point M en fait partie car ΩM = R.

Propriété : Équation cartésienne d'une sphère

Dans un repère orthonormé, la sphère (S) de centre $\Omega(x_0; y_0; z_0)$ et de rayon $R > 0$ est l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2.$$

C'est une **équation cartésienne** de (S).

Méthode : de l'équation développée au centre et au rayon

1. **Regroupe** les termes lettre par lettre : ceux en x, ceux en y, ceux en z.
2. **Complète** chaque carré, par exemple $x^2 - 6x = (x - 3)^2 - 9$: le centre a pour abscisse la moitié du coefficient, changée de signe.
3. **Isole** les trois carrés à gauche et un nombre k à droite.
4. **Décide** avec le signe de k : une sphère de rayon $\sqrt{k}$ si $k > 0$, un seul point si $k = 0$, aucun point si $k < 0$.

Exemple : centre et rayon, dans les deux sens

Soit (S) : $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 2z - 11 = 0$. On complète les carrés :

$$x^2 - 6x = (x - 3)^2 - 9$$
$$y^2 + 4y = (y + 2)^2 - 4$$
$$z^2 - 2z = (z - 1)^2 - 1$$

L'équation devient :

$$(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2 = 9+4+1+11=25.$$

Comme $25>0$, (S) est la sphère de centre $\Omega(3;-2;1)$ et de rayon $R=\sqrt{25}=5$.

Dans l'autre sens, la sphère de centre $(0;-1;2)$ et de rayon 3 a pour équation $x^2+(y+1)^2+(z-2)^2=9$, soit, développée, $x^2+y^2+z^2+2y-4z-4=0$.

Propriété : Représentation paramétrique d'une sphère

Dans un repère orthonormé, soit (S) la sphère de centre $\Omega(x_0;y_0;z_0)$ et de rayon $R>0$. Un point $M(x;y;z)$ appartient à (S) si et seulement s'il existe deux réels θ et φ tels que

$$\begin{cases} x = x_0 + R\cos\theta\sin\varphi \\ y = y_0 + R\sin\theta\sin\varphi \\ z = z_0 + R\cos\varphi \end{cases}$$

Ce système, avec $(\theta;\varphi)\in\mathbb{R}^2$, est une **représentation paramétrique** de (S).

Remarque : Bonus : la représentation paramétrique

La représentation paramétrique d'une sphère n'est demandée dans aucun des 15 sujets consultés. Retiens seulement l'idée : chaque point de (S) s'obtient en partant de Ω et en avançant de R dans une direction repérée par deux angles θ et φ. Pour $\varphi=0$, on trouve le point $(x_0;y_0;z_0+R)$, le « pôle nord » de la sphère.

Propriété : Ensemble des points tels que x² + y² + z² + ax + by + cz + d = 0

Dans un repère orthonormé, soient a, b, c, d des réels, (E) l'ensemble des points $M(x;y;z)$ tels que $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$, $\Omega\left(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2};-\frac{c}{2}\right)$ et $k=\frac{a^2+b^2+c^2-4d}{4}$.

- Si $k>0$, (E) est la sphère de centre Ω et de rayon $\sqrt{k}$;
- si $k=0$, (E) est réduit au point Ω ;
- si $k<0$, (E) est l'ensemble vide.

Propriété : Ensemble des points M tels que MA·MB = 0

Soient A et B deux points distincts de l'espace. L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ est la sphère de diamètre $[AB]$: son centre est le milieu I de $[AB]$ et son rayon est $\frac{AB}{2}$.

Exemple : la sphère de diamètre [AB]

Pour $A(0;1;3)$ et $B(2;5;-1)$: $\overrightarrow{AB}(2;4;-4)$ et $AB = 6$. L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est donc la sphère de centre $I(1;3;1)$, milieu de $[AB]$, et de rayon $\dfrac{AB}{2} = 3$.

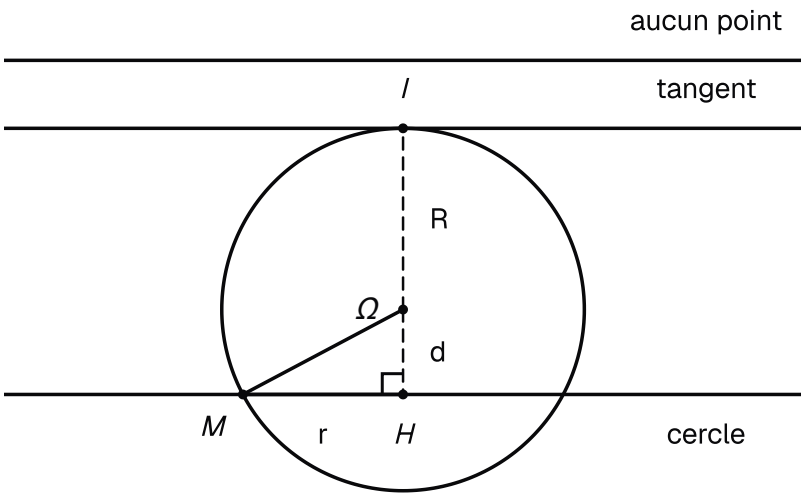
Une relation de ce type, lue de façon incertaine sur un scan, apparaît dans 1 des 13 sujets qui ont un exercice d'espace.

B3. Applications : positions relatives

Propriété : Position relative d'une sphère et d'un plan

Soient (S) la sphère de centre Ω et de rayon R, (P) un plan, H le projeté orthogonal de Ω sur (P) et $d = d(\Omega, (P)) = \Omega H$.

- Si $d > R$, (P) et (S) n'ont aucun point commun ;
- si $d = R$, (P) et (S) ont un seul point commun, H : on dit que (P) est **tangent** à (S) en H ;
- si $d < R$, (P) coupe (S) selon le cercle de (P) de centre H et de rayon $r = \sqrt{R^2 - d^2}$.



Coupe passant par Ω : à la distance d < R, le plan coupe la sphère selon un cercle de rayon r ; à d = R, il la touche ; au-delà, il l'évite.

Tout se joue sur la comparaison de $d = d(\Omega, (P))$ et du rayon R.

Comparaison	Points communs à (S) et (P)	Ce que tu donnes ensuite
$d > R$	aucun	rien de plus

Comparaison	Points communs à (S) et (P)	Ce que tu donnes ensuite
$d = R$	un seul, H : (P) est tangent à (S)	le point de contact H, projeté orthogonal de Ω sur (P)
$d < R$	un cercle (Γ)	son centre H et son rayon $r = \sqrt{R^2 - d^2}$
$d = 0$	cas particulier de $d < R$: grand cercle de centre Ω et de rayon R	rien de plus : $H = \Omega$ et $r = R$

Méthode : sphère et plan, dans l'ordre du barème

1. **Centre et rayon** de (S), écrits séparément.
2. **Distance** : la formule avec les nombres d'abord, la valeur ensuite.
3. **Comparaison** de d et de R, dans une phrase qui conclut sur la position.
4. **Élément demandé** : le point de contact ou le centre H du cercle, par la droite passant par Ω et orthogonale à (P) ; le rayon du cercle par $\sqrt{R^2 - d^2}$.

Exemple : un plan qui coupe la sphère

(S) a pour centre $\Omega(3; -2; 1)$ et pour rayon $R = 5$. Soit $(Q) : 2x - 2y + z - 20 = 0$.

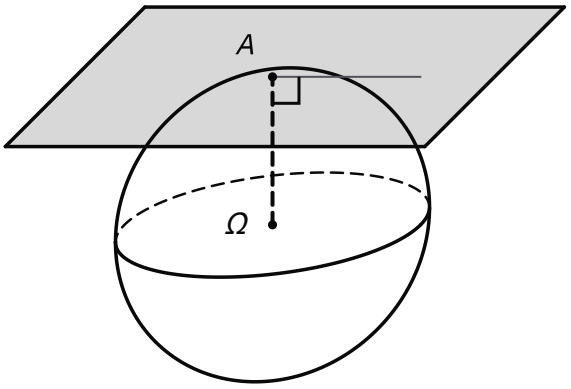
$$\begin{aligned} & d(\Omega, (Q)) \\ &= \frac{|6 + 4 + 1 - 20|}{\sqrt{4 + 4 + 1}} \\ &= \frac{9}{3} = 3. \end{aligned}$$

Comme $3 < 5$, (Q) coupe (S) selon un cercle (Γ) de rayon $r = \sqrt{25 - 9} = 4$.

Son centre est sur la droite de points $(3 + 2t; -2 - 2t; 1 + t)$, avec $t \in \mathbb{R}$; dans l'équation de (Q) : $9t - 9 = 0$, donc $t = 1$, et le centre de (Γ) est $H(5; -4; 2)$.

Définition : Plan tangent à une sphère en un point

Soient (S) une sphère de centre Ω et A un point de (S). Le **plan tangent** à (S) en A est le plan passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{\Omega A}$. C'est le seul plan passant par A qui n'a que le point A en commun avec (S).



Le plan tangent en A est orthogonal au rayon [ΩA] : il ne partage que le point A avec la sphère.

Exemple : le plan tangent en un point

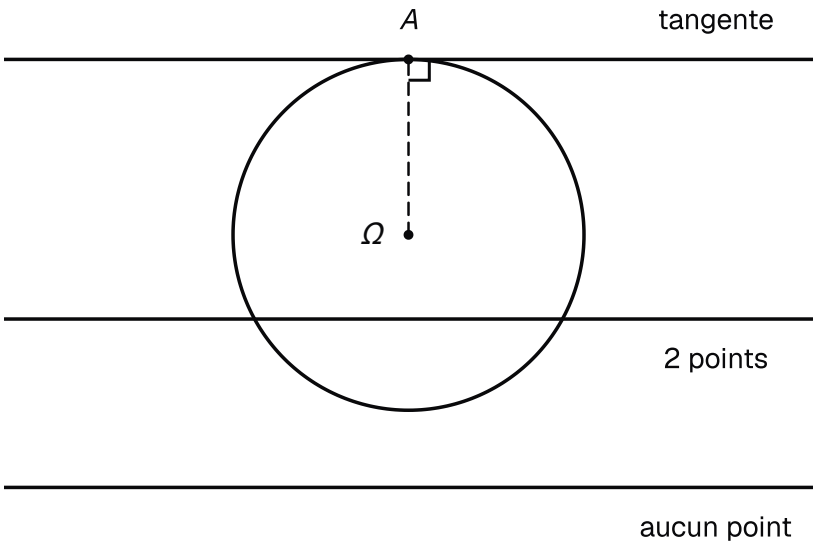
Le point $A(3;1;5)$ est sur (S), car $(3-3)^2+(1+2)^2+(5-1)^2=0+9+16=25$.

Le plan tangent à (S) en A a pour vecteur normal $\overrightarrow{\Omega A}(0;3;4)$. Il a donc une équation $3y+4z+\delta=0$; avec A : $3+20+\delta=0$, d'où (T) : $3y+4z-23=0$. Contrôle :

$$\begin{aligned} &d(\Omega,(T)) \\ &= \frac{|-6+4-23|}{\sqrt{0+9+16}} \\ &= \frac{25}{5}=5=R. \end{aligned}$$

Définition : Points communs d'une sphère et d'une droite

Dans un repère orthonormé, soient (S) une sphère et (D) une droite donnée par une représentation paramétrique de paramètre t. Les points communs à (D) et (S) sont les points de (D) dont le paramètre t est solution de l'équation obtenue en reportant la représentation paramétrique dans une équation cartésienne de (S). Cette équation est du second degré : (D) et (S) ont donc zéro, un ou deux points communs. S'il y en a exactement un, A, on dit que (D) est **tangente** à (S) en A.



Droite et sphère, vues dans un plan qui contient le centre : deux points communs, un seul (droite tangente en A) ou aucun.

Exemple : une droite et la sphère

On garde $(S) : (x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 25$ et

$$(D) : \begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = -2 + 4t \\ z = 6 - 5t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

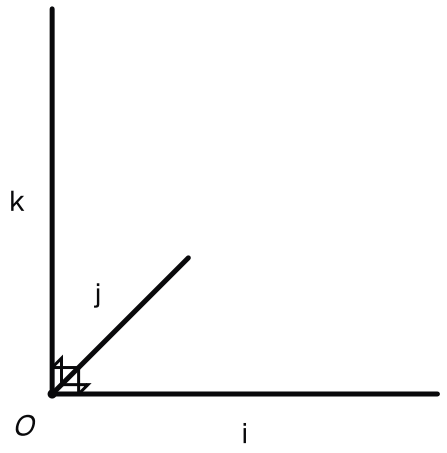
En reportant : $9t^2 + 16t^2 + (5-5t)^2 = 25$, soit $50t^2 - 50t = 0$. Donc $t = 0$ ou $t = 1$: (D) coupe (S) en deux points, $(3; -2; 6)$ et $(6; 2; 1)$.

Avec (D') de points $(3+t; 1; 5)$, on obtient $t^2 + 9 + 16 = 25$, soit $t^2 = 0$: une seule solution, (D') est tangente à (S) en $A(3; 1; 5)$.

C. Produit vectoriel

Définition : Orientation de l'espace : base orthonormée directe

Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormée et O un point. On place un observateur, le **bonhomme d'Ampère**, debout sur l'axe $(O, \vec{k})$, les pieds en O et la tête du côté de $\vec{k}$, regardant dans la direction de $\vec{i}$. La base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est **directe** lorsque $\vec{j}$ est à sa gauche ; sinon, elle est **indirecte**. Un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est **orthonormé direct** lorsque sa base est orthonormée et directe. De même, un triplet $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ de vecteurs non nuls deux à deux orthogonaux est direct lorsque le bonhomme d'Ampère, debout selon $\vec{w}$ et regardant vers $\vec{u}$, a $\vec{v}$ à sa gauche.



Une base orthonormée directe (i, j, k) : debout selon k et tourné vers i, le bonhomme d'Ampère a j sur sa gauche.

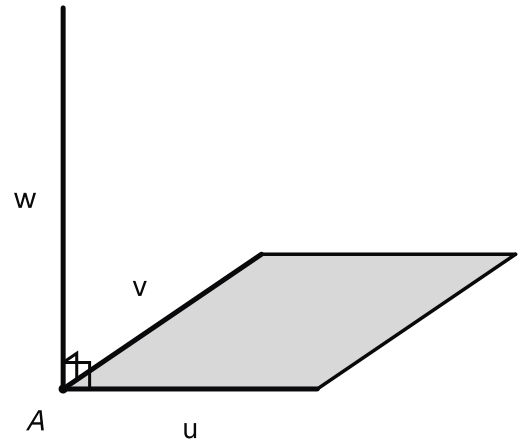
Remarque : Bonus : l'orientation

L'orientation de l'espace et le bonhomme d'Ampère ne sont demandés dans aucun des 15 sujets consultés. Ils donnent un sens au mot « direct ». Dans 11 des 13 sujets qui ont un exercice d'espace, l'énoncé fixe d'emblée un repère orthonormé direct : c'est ce qui t'autorise à calculer le produit vectoriel en coordonnées.

Définition : Produit vectoriel de deux vecteurs

L'espace est orienté. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. Le **produit vectoriel** de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ est le vecteur noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ défini ainsi :

- si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$;
- sinon, $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est l'unique vecteur $\vec{w}$ orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$, tel que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ soit direct et $\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin\theta$, où θ est la mesure en radians de l'angle géométrique formé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.



Le produit vectoriel w = u ∧ v : orthogonal à u et à v, il complète (u, v) en un triplet direct.

Propriété : Produit vectoriel nul et colinéarité

L'espace est orienté. Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$: $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. En particulier, trois points A, B, C sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{0}$.

Propriété : Antisymétrie et bilinéarité

L'espace est orienté. Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et tout réel α :

- $\vec{v} \wedge \vec{u} = -(\vec{u} \wedge \vec{v})$ (antisymétrie) ;
- $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$, $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w}$ et $(\alpha\vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge (\alpha\vec{v}) = \alpha\,(\vec{u} \wedge \vec{v})$ (bilinéarité).

Propriété : Coordonnées du produit vectoriel

Dans une base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, si $\vec{u}$ a pour coordonnées $(x; y; z)$ et $\vec{v}$ a pour coordonnées $(x'; y'; z')$, alors

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \vec{k},$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \vec{u} \wedge \vec{v} = {} & (yz' - zy')\,\vec{i} \\ & + (zx' - xz')\,\vec{j} \\ & + (xy' - yx')\,\vec{k}. \end{aligned}$$

Méthode : un produit vectoriel sans erreur de signe

1. **Pose** les coordonnées en deux colonnes : $\vec{u}$ à gauche, $\vec{v}$ à droite, dans cet ordre.
2. **Sur** $\vec{i}$: masque la première ligne ; calcule le déterminant formé par les lignes des y et des z.
3. **Sur** $\vec{j}$: masque la deuxième ligne ; calcule le déterminant des lignes des x et des z, puis **change son signe**.
4. **Sur** $\vec{k}$: masque la troisième ligne ; calcule le déterminant restant.
5. **Vérifie** : le vecteur trouvé a un produit scalaire nul avec $\vec{u}$ et avec $\vec{v}$.

Exemple : trois points, un plan, une aire

Le repère est orthonormé direct ; $A(1;0;2)$, $B(2;1;2)$ et $C(1;1;4)$. Alors $\overrightarrow{AB}(1;1;0)$ et $\overrightarrow{AC}(0;1;2)$, et

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC} &= \begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix}\vec{j}\\ &\quad + \begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}\vec{k}\\ &= 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}.\end{aligned}$$

Contrôle : $2-2+0=0$ et $0-2+2=0$.

Ce vecteur est non nul : A, B, C ne sont pas alignés, et (ABC) a une équation $2x-2y+z+\delta=0$; avec A, $\delta=-4$. Enfin $\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{4+4+1} = 3$, donc $\mathcal{A}_{ABC} = \dfrac{3}{2}$.

Exemple : trois points alignés

On garde $A(1;0;2)$ et $B(2;1;2)$, et l'on prend $E(3;2;2)$. Alors $\overrightarrow{AE}(2;2;0)$ et

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AE} &= (1\times 0 - 0\times 2)\,\vec{i}\\ &\quad + (0\times 2 - 1\times 0)\,\vec{j}\\ &\quad + (1\times 2 - 1\times 2)\,\vec{k}\\ &= \vec{0}.\end{aligned}$$

Les points A, B, E sont donc alignés : en effet, $\overrightarrow{AE} = 2\,\overrightarrow{AB}$.

Propriété : Aire d'un parallélogramme et d'un triangle

L'espace est orienté. Soient A, B, C trois points non alignés et D le point tel que $ABDC$ soit un parallélogramme. L'aire de $ABDC$ est $\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|$, et l'aire du triangle ABC est

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|.$$

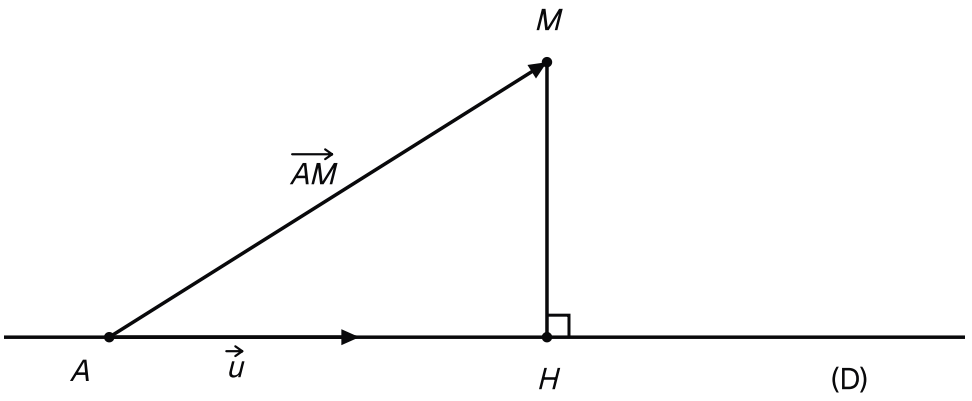
Propriété : Vecteur normal au plan défini par trois points

L'espace est orienté. Si A, B, C sont trois points non alignés, le vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est non nul et normal au plan (ABC).

Propriété : Distance d'un point à une droite

L'espace est orienté. Soient (D) la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ non nul, et M un point de l'espace. La distance de M à (D), c'est-à-dire MH où H est le projeté orthogonal de M sur (D), est

$$d(M,(D)) = \frac{\left\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\right\|}{\|\vec{u}\|}.$$



La distance de M à la droite (D) est MH, H étant le projeté orthogonal de M sur (D), qui passe par A et suit u.

Exemple : distance d'un point à une droite

On reprend A, B, C. La droite (AB) est dirigée par $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, de coordonnées $(1;1;0)$ et de norme $\sqrt{2}$. Par antisymétrie,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} \wedge \vec{u} &= -\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right)\\ &= -2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k},\end{aligned}$$

de norme 3. Donc $d(C,(AB)) = \dfrac{3}{\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

Contrôle par l'aire : $\dfrac{1}{2} \times AB \times d(C,(AB)) = \dfrac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \dfrac{3}{\sqrt{2}} = \dfrac{3}{2}$, la valeur déjà trouvée.

Erreurs fréquentes

Attention : Un produit scalaire n'est pas un vecteur

Avec $\vec{u}(1;1;0)$ et $\vec{v}(0;1;2)$: $\vec{u}\cdot\vec{v}=0+1+0=1$, un **nombre**. Écrire « $\vec{u}\cdot\vec{v}=(0;1;0)$ » n'a aucun sens. Le vecteur associé à $\vec{u}$ et $\vec{v}$, c'est $\vec{u}\wedge\vec{v}$: dans une base orthonormée directe, il vaut ici $2\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$.

Attention : Le vecteur normal n'est pas un vecteur du plan

Pour $(P):2x+3y+6z-11=0$, le vecteur $\vec{n}(2;3;6)$ est **orthogonal** à (P). Un vecteur **du** plan vérifie au contraire $\vec{n}\cdot\vec{w}=0$: c'est le cas de $\vec{w}(3;0;-1)$, car $6+0-6=0$. Pour la droite orthogonale à (P), c'est bien $\vec{n}$ qui sert de vecteur directeur.

Attention : Distance à un plan : valeur absolue et racine carrée

Distance de l'origine O à $(P):2x+3y+6z-11=0$: le numérateur est $|-11|=11$ et le dénominateur $\sqrt{4+9+36}=7$, donc $d(O,(P))=\dfrac{11}{7}$.

Sans la valeur absolue, on écrirait $-\dfrac{11}{7}$, une distance négative ; sans la racine, on écrirait $\dfrac{11}{49}$. Les deux sont faux.

Attention : Pas de sphère sans nombre positif à droite

L'équation $x^2+y^2+z^2+2x-4z+8=0$ devient $(x+1)^2+y^2+(z-2)^2=1+4-8=-3$.

Une somme de carrés n'est jamais négative : aucun point ne convient. Et quand le nombre de droite vaut 25, le rayon est 5, pas 25.

Attention : Rayon du cercle : Pythagore, pas une soustraction

Pour $R=5$ et $d=3$, le rayon du cercle d'intersection n'est pas $5-3=2$. Le centre Ω, le centre H du cercle et un point M du cercle forment un triangle rectangle en H, d'hypoténuse $\Omega M=R$. Pythagore donne $r=\sqrt{25-9}=4$.

Attention : Produit vectoriel : le signe du milieu et l'ordre

Dans une base orthonormée directe, pour $\vec{u}(1;1;0)$ et $\vec{v}(0;1;2)$, oublier le changement de signe sur $\vec{j}$ donne $2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$.

Le contrôle le démasque : son produit scalaire avec $\vec{u}$ vaut $2+2+0=4\neq 0$. Et l'ordre compte : $\vec{v}\wedge\vec{u}=-2\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$.

Attention : Plan tangent : le vecteur normal part du centre

Pour le plan tangent en $A(3;1;5)$ à la sphère de centre $\Omega(3;-2;1)$, le vecteur normal est $\overrightarrow{\Omega A}(0;3;4)$, et non $\overrightarrow{OA}(3;1;5)$. Le point de contact est A lui-même, jamais le centre Ω.

Au bac

Constats sur **15 sujets nationaux** 2BAC SE (option française, 2016 à 2020 et 2023 à 2025) : **13** contiennent un exercice de géométrie dans l'espace, et **11** barèmes de cet exercice ont été lus. Ces fréquences décrivent ces sujets-là, pas le prochain examen.

Question du cœur de l'exercice	Sujets, sur 13	Points
produit vectoriel de deux vecteurs, résultat à vérifier	10	0,25 à 0,75
plan par trois points : équation déduite du produit vectoriel	7	0,25 à 0,5
équation d'un plan connaissant un point et un vecteur normal	3	0,25 à 0,5
centre et rayon d'une sphère à partir de l'équation développée	7	0,5
équation d'une sphère à partir du centre et du rayon	3	0,25 à 0,5
distance d'un point à un plan	11	0,25 à 0,5
plan sécant : existence du cercle	9	compris dans 0,5 à 0,75
centre et/ou rayon du cercle d'intersection	8	0,25 par élément
plan tangent et point de contact	5	0,5 à 0,75 au total
droite orthogonale à un plan	7	0,25 à 0,5

Questions plus rares, souvent en fin d'exercice :

Question	Sujets, sur 13	Points
intersection d'une droite et d'un plan (projeté orthogonal)	3	0,5
intersection d'une droite et d'une sphère	2	0,5 à 0,75
distance d'un point à une droite	3	0,25
aire d'un triangle par le produit vectoriel	2	0,25
produit scalaire nul, orthogonalité de droites ou de plans	3	0,25 à 0,5
plans parallèles, famille de plans à paramètre	3	0,25 à 0,5

Remarque : La forme de l'exercice

Dans les 13 sujets, l'exercice d'espace est indépendant et vaut 3 points : c'est l'exercice 1 dans 9 sujets et l'exercice 2 dans 4. Il compte 5 à 8 questions, de 0,25 à 1 point chacune. La plupart sont des « Montrer que » ou des « Vérifier que » : le résultat est donné, et tu peux continuer même après une erreur.

Absents des 15 sujets consultés, ce qui ne veut pas dire « jamais demandé » : la représentation paramétrique d'une sphère, l'orientation et le bonhomme d'Ampère, le produit mixte, la distance de deux droites, l'intersection de deux sphères.

Remarque : L'enchaînement typique de l'exercice de 3 points

Dans 12 des 13 sujets qui ont un exercice d'espace, les questions suivent cet ordre, au moins en partie :

1. un repère orthonormé direct et trois points, ou un point et un vecteur normal ;
2. un produit vectoriel à vérifier (partie C) ;
3. l'équation cartésienne du plan, à en déduire ou à vérifier (B1) ;
4. le centre et le rayon de la sphère, ou son équation à partir d'eux (B2) ;
5. la distance du centre au plan (B1) ;
6. la position : plan tangent et point de contact, ou plan sécant et cercle (B3) ;
7. la droite passant par le centre et orthogonale au plan, qui mène au point de contact ou au centre du cercle (B1, B3).

Méthode : Rédiger comme les barèmes l'attendent

- **Distance** : écris la formule avec les nombres, puis la valeur ; les barèmes lus donnent souvent 0,25 pour la formule et 0,25 pour la valeur.
- **Position** : conclus par la comparaison de d et de R, dans une phrase à part ; les barèmes la notent à part du centre ou du rayon du cercle.
- **Sphère** : donne le centre, puis le rayon ; 0,25 pour chacun dans les barèmes qui détaillent cette question.
- **« Vérifier que » pour** (ABC) : établis d'abord que A, B, C ne sont pas alignés, par $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$, puis reporte les coordonnées des trois points dans l'équation proposée.
- **Résultats** : le plus souvent entiers ; une fraction reste possible pour un point de contact ou un projeté, une racine pour une distance ou un rayon.

Checklist avant le devoir

> **À retenir : Je sais…**
>
> - calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$, une norme, une distance en repère orthonormé ;

- prouver une orthogonalité par un produit scalaire nul ;
- écrire l'équation d'un plan à partir d'un point et d'un vecteur normal, et lire un vecteur normal sur une équation ;
- calculer $d(A,(P))$ sans oublier la valeur absolue ni la racine ;
- trouver le projeté orthogonal d'un point sur un plan ;
- passer d'une équation développée au centre et au rayon d'une sphère, et inversement ;
- comparer d et R, puis donner le point de contact, ou le centre et le rayon du cercle ;
- calculer $\vec{u} \wedge \vec{v}$ et le contrôler par deux produits scalaires nuls ;
- en déduire une équation de (ABC), l'aire du triangle ABC et une distance à une droite.