BURHAN

Géométrie dans l'espace : exercices, niveau examen

2ème Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-experimentales/mathematiques/geometrie-dans-l-espace/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Géométrie dans l'espace	Niveau examen	5

Exercice 1 3 pts

Un plan par trois points, tangent à une sphère

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points $A(1;-1;0)$, $B(1;1;2)$ et $C(3;-1;1)$, ainsi que la sphère (S) d'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6y + 2z + 1 = 0.$$

1. 0,5 pts

Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - 4\vec{k}$, et en déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.

INDICE

Calcule d'abord les coordonnées des deux vecteurs, écris-les en colonnes, puis calcule les trois déterminants 2×2 ; attention au signe moins devant la composante sur $\vec{j}$.

2. 0,5 pts

En déduire que $x + 2y - 2z + 1 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).

INDICE

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est normal à (ABC) ; il est colinéaire à $(1;2;-2)$.

3. 0,5 pts

Montrer que (S) est la sphère de centre $\Omega(0;3;-1)$ et de rayon 3.

INDICE

Complète les carrés en y et en z.

4. 0,75 pts

Calculer $d(\Omega, (ABC))$ et en déduire que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S).

INDICE

Écris d'abord la formule de la distance, puis compare le résultat au rayon.

5. 0,25 pts

Vérifier que le système

$$\begin{cases} x = t \\ y = 3 + 2t \\ z = -1 - 2t \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

est une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par Ω et orthogonale au plan (ABC).

INDICE

Pour $t = 0$, retrouves-tu Ω ? Le vecteur directeur est-il normal à (ABC) ?

6. 0,5 pts

Vérifier que le point de contact de (ABC) et de (S) est $H(-1;1;1)$.

INDICE

Le point de contact est l'intersection de (Δ) et de (ABC).

Exercice 2 3 pts

Un plan qui coupe une sphère selon un cercle

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points $A(2;0;1)$, $B(3;0;-1)$ et $C(2;1;-1)$, et l'ensemble (S) des points $M(x;y;z)$ tels que

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 6y - 4z - 3 = 0.$$

1. 0,5 pts

Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$.

INDICE

Coordonnées des deux vecteurs d'abord, puis trois déterminants 2×2, celui du milieu précédé d'un signe moins.

2. 0,25 pts

En déduire que les points A, B et C définissent un plan (P), et que $2x + 2y + z - 5 = 0$ est une équation cartésienne de (P).

INDICE

Un produit vectoriel non nul : que dit-il des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$? Il est de plus normal au plan.

3. 0,5 pts

Montrer que (S) est la sphère de centre $\Omega(3;3;2)$ et de rayon 5.

INDICE

Complète les trois carrés.

4. 0,75 pts

Calculer $d(\Omega, (P))$, puis montrer que le plan (P) coupe la sphère (S) selon un cercle (Γ).

INDICE

Formule de la distance, puis comparaison avec $R = 5$.

5. 0,25 pts

Montrer que le rayon de (Γ) est égal à 4.

INDICE

Le rayon r vérifie $r^2 + d^2 = R^2$.

6. 0,25 pts

Vérifier que le système

$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 3 + 2t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 2 + t \end{cases}$$

est une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par Ω et orthogonale à (P).

INDICE

Point de paramètre 0, puis vecteur directeur.

7. 0,5 pts

Montrer que le centre du cercle (Γ) est le point $H(1;1;1)$.

INDICE

Le centre de (Γ) est le point d'intersection de (Δ) et de (P).

Exercice 3 3 pts

Plan, sphère et cercle, sans produit vectoriel

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère le plan (P) passant par le point $A(3;0;1)$ et de vecteur normal $\vec{n}(2;-2;-1)$, et la sphère (S) de centre $\Omega(1;3;0)$ et de rayon $3\sqrt{3}$.

1. 0,25 pts

Montrer que $2x-2y-z-5=0$ est une équation cartésienne du plan (P).

INDICE

$M \in (P)$ équivaut à $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$.

2. 0,25 pts

Vérifier que $x^2+y^2+z^2-2x-6y-17=0$ est une équation cartésienne de la sphère (S).

INDICE

Pars de $(x-1)^2+(y-3)^2+z^2=\left(3\sqrt{3}\right)^2$ et développe.

3. 0,5 pts

Montrer que $d(\Omega,(P))=3$.

INDICE

Écris la formule, remplace par les coordonnées de Ω, n'oublie pas la valeur absolue.

4. 0,5 pts

En déduire que le plan (P) coupe la sphère (S) selon un cercle (Γ) de rayon $3\sqrt{2}$.

INDICE

Pour comparer 3 et $3\sqrt{3}$, compare leurs carrés 9 et 27 ; le rayon du cercle vient de Pythagore.

5. 0,5 pts

Donner une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par Ω et orthogonale au plan (P).

INDICE

(Δ) est dirigée par le vecteur normal $\vec{n}$.

6. 0,5 pts

Montrer que le centre du cercle (Γ) est le point $H(3;1;-1)$.

INDICE

Cherche le paramètre du point de (Δ) qui vérifie l'équation de (P).

7. 0,5 pts

Vérifier que le point $E(6;4;-1)$ appartient au cercle (Γ), puis montrer que $\overrightarrow{\Omega H} \cdot \overrightarrow{HE} = 0$.

INDICE

Un point de (Γ) est à la fois dans (P) et sur (S).

Exercice 4 3 pts

Un plan, une sphère de diamètre [DE] et une aire

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère les points $A(0;1;-1)$, $B(1;4;3)$, $C(1;-2;-1)$, $D(1;0;-3)$ et $E(3;4;1)$, et l'ensemble (S) des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{ME}=0$.

1. 0,5 pts

Montrer que $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=12\vec{i}+4\vec{j}-6\vec{k}$, et en déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.

INDICE

Commence par les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AC}$, puis applique la règle des trois déterminants 2×2 ; un produit vectoriel non nul exclut la colinéarité.

2. 0,25 pts

En déduire que $6x+2y-3z-5=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).

INDICE

Le produit vectoriel est normal à (ABC) ; divise-le par 2, puis utilise un des trois points.

3. 0,75 pts

Montrer que (S) est la sphère de centre $I(2;2;-1)$ et de rayon 3.

INDICE

Écris les coordonnées de $\overrightarrow{MD}$ et de $\overrightarrow{ME}$ pour $M(x;y;z)$, développe le produit scalaire, puis complète les carrés.

4. 0,5 pts

Calculer $d(I,(ABC))$.

INDICE

Écris la formule de la distance d'un point à un plan, puis remplace ; ici $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ tombe juste.

5. 0,5 pts

En déduire que le plan (ABC) coupe la sphère (S) selon un cercle (Γ), et montrer que le rayon de (Γ) est égal à $\sqrt{5}$.

INDICE

Compare la distance au rayon 3 ; pour le rayon du cercle, pense au triangle rectangle formé par I, le centre du cercle et un point du cercle.

6. 0,5 pts

Calculer $\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|$, puis en déduire que l'aire du triangle ABC est égale à 7.

INDICE

L'aire du triangle est la moitié de la norme du produit vectoriel.

Exercice 5 3 pts

Une droite qui traverse une sphère, et la corde qu'elle découpe

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère la sphère (S) d'équation

$$x^2+y^2+z^2+2x-4y-6z+5=0,$$

et la droite (D) passant par le point $A(-3;-2;1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1;2;0)$, de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x=-3+t \\ y=-2+2t \\ z=1 \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R}).$$

1. 0,5 pts

Montrer que (S) est la sphère de centre $\Omega(-1;2;3)$ et de rayon 3.

INDICE

Complète les trois carrés, puis regarde le nombre obtenu à droite.

2. 0,5 pts

Montrer que $\overrightarrow{A\Omega}\wedge\vec{u}=-4\vec{i}+2\vec{j}$, et en déduire que le point Ω n'appartient pas à la droite (D).

INDICE

Calcule les coordonnées de $\overrightarrow{A\Omega}$, puis les trois déterminants 2×2 ; un produit vectoriel non nul signifie que les deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

3. 0,25 pts

En déduire que $d(\Omega,(D))=2$.

INDICE

Utilise la formule de la distance d'un point à une droite passant par A et dirigée par $\vec{u}$.

4. 0,75 pts

Déterminer les coordonnées des points communs à la droite (D) et à la sphère (S) ; on notera E celui de plus petite abscisse et F l'autre.

INDICE

Reporte la représentation paramétrique de (D) dans l'équation $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9$: tu obtiens une équation du second degré en t.

5. 0,5 pts

Vérifier que le plan (P) d'équation $2x-y+4=0$ contient la droite (D) et le point Ω, puis en déduire que (P) coupe la sphère (S) selon un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

INDICE

Un vecteur normal de (P) est-il orthogonal à $\vec{u}$? Le point A est-il dans (P) ? Que vaut la distance de Ω à un plan qui le contient ?

6. 0,5 pts

Montrer que le milieu K du segment $[EF]$ vérifie $\overrightarrow{\Omega K} \cdot \vec{u} = 0$ et $\Omega K = d(\Omega, (D))$, puis calculer EF et vérifier que $\left(\frac{EF}{2}\right)^2 + \Omega K^2 = R^2$.

INDICE

Calcule d'abord les coordonnées de K, puis celles de $\overrightarrow{\Omega K}$; compare ΩK au résultat de la question 3.