BURHAN

Géométrie dans l'espace : exercices, niveau examen

2ème Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-experimentales/mathematiques/geometrie-dans-l-espace/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Géométrie dans l'espace	Niveau examen	5

Exercice 1 3 pts

Un plan par trois points, tangent à une sphère

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère les points $A(1;-1;0)$, $B(1;1;2)$ et $C(3;-1;1)$, ainsi que la sphère (S) d'équation

$$x^2+y^2+z^2-6y+2z+1=0.$$

1. 0,5 pts

Montrer que $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=2\vec{i}+4\vec{j}-4\vec{k}$, et en déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.

INDICE

Calcule d'abord les coordonnées des deux vecteurs, écris-les en colonnes, puis calcule les trois déterminants 2×2 ; attention au signe moins devant la composante sur $\vec{j}$.

CORRIGÉ

Coordonnées. $\overrightarrow{AB}(0;2;2)$ et $\overrightarrow{AC}(2;0;1)$.

Produit vectoriel. Le repère est orthonormé direct. On écrit les deux vecteurs en colonnes :

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\\&=\begin{vmatrix}2&0\\2&1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}0&2\\2&1\end{vmatrix}\vec{j}\\&\quad+\begin{vmatrix}0&2\\2&0\end{vmatrix}\vec{k}\\&=2\vec{i}-(0-4)\vec{j}+(0-4)\vec{k}\\&=2\vec{i}+4\vec{j}-4\vec{k}.\end{aligned}$$

Conclusion. $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=2\vec{i}+4\vec{j}-4\vec{k}$. Ce vecteur est non nul, donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires : les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. 0,5 pts

En déduire que $x+2y-2z+1=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).

INDICE

$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est normal à (ABC) ; il est colinéaire à $(1;2;-2)$.

CORRIGÉ

Vecteur normal. Le vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=2(\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k})$ est normal au plan (ABC) ; le vecteur $\vec{n}(1;2;-2)$, qui lui est colinéaire, l'est donc aussi.

Équation. Le plan (ABC) a une équation de la forme $x+2y-2z+\delta=0$, où δ est un réel. Comme $A\in(ABC)$: $1-2-0+\delta=0$, d'où $\delta=1$.

Contrôle. Pour B : $1+2-4+1=0$; pour C : $3-2-2+1=0$.

Conclusion. Une équation cartésienne du plan (ABC) est $x+2y-2z+1=0$.

3. 0,5 pts

Montrer que (S) est la sphère de centre $\Omega(0;3;-1)$ et de rayon 3.

INDICE

Complète les carrés en y et en z.

CORRIGÉ

Complétion des carrés. $y^2-6y=(y-3)^2-9$ et $z^2+2z=(z+1)^2-1$. L'équation de (S) équivaut donc à :

$$\begin{aligned} &x^2+(y-3)^2+(z+1)^2 \\ &=9+1-1=9. \end{aligned}$$

Conclusion. Comme $9>0$, (S) est la sphère de centre $\Omega(0;3;-1)$ et de rayon $R=\sqrt{9}=3$.

4. 0,75 pts

Calculer $d(\Omega,(ABC))$ et en déduire que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S).

INDICE

Écris d'abord la formule de la distance, puis compare le résultat au rayon.

CORRIGÉ

Distance. D'après la formule de la distance d'un point à un plan :

$$\begin{aligned} &d(\Omega,(ABC)) \\ &=\frac{|x_\Omega+2y_\Omega-2z_\Omega+1|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}} \\ &=\frac{|0+6+2+1|}{3}=\frac{9}{3}=3. \end{aligned}$$

Conclusion. $d(\Omega,(ABC))=3=R$: la distance du centre au plan est égale au rayon, donc le plan (ABC) est tangent à la sphère (S).

5. 0,25 pts

Vérifier que le système

$$\begin{cases} x = t \\ y = 3 + 2t \qquad (t \in \mathbb{R}) \\ z = -1 - 2t \end{cases}$$

est une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par Ω et orthogonale au plan (ABC).

INDICE

Pour $t = 0$, retrouves-tu Ω ? Le vecteur directeur est-il normal à (ABC) ?

CORRIGÉ

- **Un point.** Pour $t = 0$, on obtient le point $(0; 3; -1)$, c'est-à-dire Ω : la droite passe par Ω.
- **La direction.** Un vecteur directeur de cette droite est $(1; 2; -2)$, c'est-à-dire $\vec{n}$, normal à (ABC) : la droite est orthogonale au plan (ABC).

Conclusion. Le système proposé est une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par Ω et orthogonale au plan (ABC).

6. 0,5 pts

Vérifier que le point de contact de (ABC) et de (S) est $H(-1; 1; 1)$.

INDICE

Le point de contact est l'intersection de (Δ) et de (ABC).

CORRIGÉ

Paramètre. Le point de contact est le projeté orthogonal de Ω sur (ABC), c'est-à-dire le point d'intersection de (Δ) et de (ABC). Pour le point de (Δ) de paramètre t, le premier membre de l'équation de (ABC) vaut :

$$\begin{aligned} & t + 2(3 + 2t) \\ & \quad - 2(-1 - 2t) + 1 \\ & = 9t + 9. \end{aligned}$$

L'équation $9t + 9 = 0$ donne $t = -1$, et l'on obtient le point $(-1; 1; 1)$, c'est-à-dire H.

Contrôle. $-1 + 2 - 2 + 1 = 0$, et $\Omega H^2 = 1 + 4 + 4 = 9 = R^2$.

Conclusion. Le point de contact de (ABC) et de (S) est $H(-1; 1; 1)$.

Exercice 2 3 pts

Un plan qui coupe une sphère selon un cercle

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère les points $A(2;0;1)$, $B(3;0;-1)$ et $C(2;1;-1)$, et l'ensemble (S) des points $M(x;y;z)$ tels que

$$x^2+y^2+z^2-6x-6y-4z-3=0.$$

1. 0,5 pts

Montrer que $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$.

INDICE

Coordonnées des deux vecteurs d'abord, puis trois déterminants 2×2, celui du milieu précédé d'un signe moins.

CORRIGÉ

Coordonnées. $\overrightarrow{AB}(1;0;-2)$ et $\overrightarrow{AC}(0;1;-2)$.

Produit vectoriel. Le repère est orthonormé direct :

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\\&=\big(0\times(-2)-(-2)\times 1\big)\vec{i}\\&\quad-\big(1\times(-2)-(-2)\times 0\big)\vec{j}\\&\quad+(1\times 1-0\times 0)\vec{k}\\&=2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}.\end{aligned}$$

Conclusion. $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$.

2. 0,25 pts

En déduire que les points A, B et C définissent un plan (P), et que $2x+2y+z-5=0$ est une équation cartésienne de (P).

INDICE

Un produit vectoriel non nul : que dit-il des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$? Il est de plus normal au plan.

CORRIGÉ

Le plan (P). $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$, donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires : A, B, C ne sont pas alignés et définissent un plan (P), qui admet $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$, de coordonnées $(2;2;1)$, pour vecteur normal.

Équation. (P) a une équation de la forme $2x+2y+z+\delta=0$, où δ est un réel. Comme $A\in(P)$: $4+0+1+\delta=0$, soit $\delta=-5$.

Contrôle. $6+0-1-5=0$ pour B et $4+2-1-5=0$ pour C.

Conclusion. Les points A, B et C définissent un plan (P), dont $2x+2y+z-5=0$ est une équation cartésienne.

3. 0,5 pts

Montrer que (S) est la sphère de centre $\Omega(3;3;2)$ et de rayon 5.

INDICE

Complète les trois carrés.

CORRIGÉ

Complétion des carrés. $x^2-6x=(x-3)^2-9$, $y^2-6y=(y-3)^2-9$ et $z^2-4z=(z-2)^2-4$. L'équation de (S) équivaut donc à :

$$\begin{aligned}&(x-3)^2+(y-3)^2+(z-2)^2\\&=9+9+4+3=25.\end{aligned}$$

Conclusion. (S) a pour équation $(x-3)^2+(y-3)^2+(z-2)^2=25$, avec $25>0$: c'est la sphère de centre $\Omega(3;3;2)$ et de rayon $R=5$.

4. 0,75 pts

Calculer $d(\Omega,(P))$, puis montrer que le plan (P) coupe la sphère (S) selon un cercle (Γ).

INDICE

Formule de la distance, puis comparaison avec $R=5$.

CORRIGÉ

Distance. D'après la formule de la distance d'un point à un plan :

$$\begin{aligned}&d(\Omega,(P))\\&=\frac{|2\times3+2\times3+2-5|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}\\&=\frac{9}{3}=3.\end{aligned}$$

Conclusion. $d(\Omega,(P))=3<5=R$: la distance du centre au plan est strictement inférieure au rayon, donc le plan (P) coupe la sphère (S) selon un cercle (Γ).

5. 0,25 pts

Montrer que le rayon de (Γ) est égal à 4.

INDICE

Le rayon r vérifie $r^2+d^2=R^2$.

CORRIGÉ

Le centre de (Γ) est le projeté orthogonal de Ω sur (P) : il est à la distance $d(\Omega,(P))=3$ de Ω, et tout point de (Γ) est à la distance $R=5$ de Ω. D'après le théorème de Pythagore, le rayon r de (Γ) vérifie $r^2=R^2-d(\Omega,(P))^2$, donc :

$$r=\sqrt{25-9}=\sqrt{16}=4.$$

Conclusion. Le rayon du cercle (Γ) est égal à 4.

6. 0,25 pts

Vérifier que le système

$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 3 + 2t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 2 + t \end{cases}$$

est une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par Ω et orthogonale à (P).

INDICE

Point de paramètre 0, puis vecteur directeur.

CORRIGÉ

- **Un point.** Pour $t = 0$, on obtient le point $(3; 3; 2)$, c'est-à-dire Ω.
- **La direction.** Un vecteur directeur de la droite est $(2; 2; 1)$, normal à (P) : la droite est orthogonale à (P).

Conclusion. Le système proposé est une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par Ω et orthogonale à (P).

7. 0,5 pts

Montrer que le centre du cercle (Γ) est le point $H(1; 1; 1)$.

INDICE

Le centre de (Γ) est le point d'intersection de (Δ) et de (P).

CORRIGÉ

Paramètre. Le centre de (Γ) est le projeté orthogonal de Ω sur (P), c'est-à-dire le point d'intersection de (Δ) et de (P). Le point de (Δ) de paramètre t appartient à (P) si et seulement si :

$$\begin{aligned} &2(3 + 2t) + 2(3 + 2t) \\ &\quad + (2 + t) - 5 = 0, \end{aligned}$$

c'est-à-dire $9t + 9 = 0$, soit $t = -1$.

Point obtenu. Pour $t = -1$, on obtient le point $(1; 1; 1)$. **Contrôle** : $2 + 2 + 1 - 5 = 0$.

Conclusion. Le centre du cercle (Γ) est le point $H(1; 1; 1)$.

Exercice 3 — 3 pts

Plan, sphère et cercle, sans produit vectoriel

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère le plan (P) passant par le point $A(3;0;1)$ et de vecteur normal $\vec{n}(2;-2;-1)$, et la sphère (S) de centre $\Omega(1;3;0)$ et de rayon $3\sqrt{3}$.

1. — 0,25 pts

Montrer que $2x-2y-z-5=0$ est une équation cartésienne du plan (P).

INDICE

$M \in (P)$ équivaut à $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AM}=0$.

CORRIGÉ

Soit $M(x;y;z)$ un point de l'espace ; on a $\overrightarrow{AM}(x-3;y;z-1)$. Le point M appartient à (P) si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ est orthogonal à $\vec{n}$:

$$\begin{aligned} & M \in (P) \\ \iff & \vec{n}\cdot\overrightarrow{AM}=0 \\ \iff & 2(x-3)-2y \\ & \quad -(z-1)=0 \\ \iff & 2x-2y-z-5=0. \end{aligned}$$

Conclusion. $2x-2y-z-5=0$ est une équation cartésienne du plan (P).

2. — 0,25 pts

Vérifier que $x^2+y^2+z^2-2x-6y-17=0$ est une équation cartésienne de la sphère (S).

INDICE

Pars de $(x-1)^2+(y-3)^2+z^2=\left(3\sqrt{3}\right)^2$ et développe.

CORRIGÉ

Équation réduite. Soit $M(x;y;z)$. Une distance est positive, donc :

$$\begin{aligned} & M \in (S) \\ \iff & \Omega M^2=\left(3\sqrt{3}\right)^2=27 \\ \iff & (x-1)^2+(y-3)^2 \\ & \quad +z^2=27. \end{aligned}$$

Développement. On obtient $x^2-2x+1+y^2-6y+9+z^2=27$; on regroupe les constantes, $1+9-27=-17$.

Conclusion. Une équation cartésienne de la sphère (S) est $x^2+y^2+z^2-2x-6y-17=0$.

3. 0,5 pts

Montrer que $d(\Omega, (P)) = 3$.

INDICE

Écris la formule, remplace par les coordonnées de Ω, n'oublie pas la valeur absolue.

CORRIGÉ

D'après la formule de la distance d'un point à un plan :

$$\begin{aligned} & d(\Omega, (P)) \\ &= \frac{|2 \times 1 - 2 \times 3 - 0 - 5|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} \\ &= \frac{|-9|}{\sqrt{9}} = \frac{9}{3} = 3. \end{aligned}$$

Conclusion. $d(\Omega, (P)) = 3$.

4. 0,5 pts

En déduire que le plan (P) coupe la sphère (S) selon un cercle (Γ) de rayon $3\sqrt{2}$.

INDICE

Pour comparer 3 et $3\sqrt{3}$, compare leurs carrés 9 et 27 ; le rayon du cercle vient de Pythagore.

CORRIGÉ

Position. Les nombres 3 et $3\sqrt{3}$ sont positifs ; on compare leurs carrés : $d(\Omega, (P))^2 = 9 < 27 = R^2$, donc $d(\Omega, (P)) < 3\sqrt{3}$. La distance du centre au plan est strictement inférieure au rayon : le plan (P) coupe (S) selon un cercle (Γ).

Rayon. D'après le théorème de Pythagore, dans le triangle formé par Ω, le centre de (Γ) et un point de (Γ) :

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{R^2 - d(\Omega, (P))^2} \\ &= \sqrt{27 - 9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Conclusion. Le plan (P) coupe la sphère (S) selon un cercle (Γ) de rayon $3\sqrt{2}$. Ce rayon n'est ni $R - d(\Omega, (P))$, ni la distance 3.

5. 0,5 pts

Donner une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par Ω et orthogonale au plan (P).

INDICE

(Δ) est dirigée par le vecteur normal $\vec{n}$.

CORRIGÉ

La droite (Δ) est orthogonale à (P) : elle est dirigée par le vecteur normal $\vec{n}(2;-2;-1)$. Elle passe par $\Omega(1;3;0)$.

Conclusion. Une représentation paramétrique de (Δ) est :

$$(\Delta):\begin{cases}x=1+2t\\y=3-2t\\z=-t\end{cases}\quad(t\in\mathbb{R}).$$

6. 0,5 pts

Montrer que le centre du cercle (Γ) est le point $H(3;1;-1)$.

INDICE

Cherche le paramètre du point de (Δ) qui vérifie l'équation de (P).

CORRIGÉ

Paramètre. Le centre de (Γ) est le projeté orthogonal de Ω sur (P), c'est-à-dire le point d'intersection de (Δ) et de (P). Le point de (Δ) de paramètre t appartient à (P) si et seulement si :

$$\begin{aligned}&2(1+2t)-2(3-2t)\\&-(-t)-5=0,\end{aligned}$$

c'est-à-dire $9t-9=0$, soit $t=1$.

Point obtenu. Pour $t=1$, on obtient le point $(3;1;-1)$. **Contrôle** : $6-2+1-5=0$.

Conclusion. Le centre du cercle (Γ) est le point $H(3;1;-1)$.

7. 0,5 pts

Vérifier que le point $E(6;4;-1)$ appartient au cercle (Γ), puis montrer que $\overrightarrow{\Omega H}\cdot\overrightarrow{HE}=0$.

INDICE

Un point de (Γ) est à la fois dans (P) et sur (S).

CORRIGÉ

Appartenance à (Γ). Le cercle (Γ) est l'intersection du plan (P) et de la sphère (S).

- $E\in(P)$: $12-8+1-5=0$.
- $E\in(S)$: $(6-1)^2+(4-3)^2+(-1)^2=25+1+1=27$.

Donc E appartient à $(\Gamma)=(P)\cap(S)$.

Produit scalaire. $\overrightarrow{\Omega H}(2;-2;-1)$ et $\overrightarrow{HE}(3;3;0)$; le repère est orthonormé, donc $\overrightarrow{\Omega H}\cdot\overrightarrow{HE}=6-6+0=0$.

Contrôle. $HE^2=9+9+0=18=r^2$: E est bien sur le cercle de centre H et de rayon $3\sqrt{2}$.

Conclusion. Le point E appartient au cercle (Γ), et $\overrightarrow{\Omega H}\cdot\overrightarrow{HE}=0$.

Exercice 4 3 pts

Un plan, une sphère de diamètre [DE] et une aire

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère les points $A(0;1;-1)$, $B(1;4;3)$, $C(1;-2;-1)$, $D(1;0;-3)$ et $E(3;4;1)$, et l'ensemble (S) des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{ME}=0$.

1. 0,5 pts

Montrer que $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=12\vec{i}+4\vec{j}-6\vec{k}$, et en déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.

INDICE

Commence par les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AC}$, puis applique la règle des trois déterminants 2×2 ; un produit vectoriel non nul exclut la colinéarité.

CORRIGÉ

Coordonnées. $\overrightarrow{AB}(1;3;4)$ et $\overrightarrow{AC}(1;-3;0)$.

Produit vectoriel. Le repère est orthonormé direct :

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\\&=\big(3\times 0-4\times(-3)\big)\vec{i}\\&\quad-\big(1\times 0-4\times 1\big)\vec{j}\\&\quad+\big(1\times(-3)-3\times 1\big)\vec{k}\\&=12\vec{i}+4\vec{j}-6\vec{k}.\end{aligned}$$

Conclusion. $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=12\vec{i}+4\vec{j}-6\vec{k}$. Ce vecteur n'est pas nul : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, donc les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. 0,25 pts

En déduire que $6x+2y-3z-5=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).

INDICE

Le produit vectoriel est normal à (ABC) ; divise-le par 2, puis utilise un des trois points.

CORRIGÉ

Vecteur normal. $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=2(6\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k})$ est normal au plan (ABC) ; le vecteur $\vec{n}(6;2;-3)$, qui lui est colinéaire, l'est donc aussi.

Équation. Le plan (ABC) a une équation de la forme $6x+2y-3z+\delta=0$, où δ est un réel. Avec A : $0+2+3+\delta=0$, donc $\delta=-5$.

Contrôle. $6+8-9-5=0$ pour B et $6-4+3-5=0$ pour C.

Conclusion. Une équation cartésienne du plan (ABC) est $6x+2y-3z-5=0$.

3. 0,75 pts

Montrer que (S) est la sphère de centre $I(2;2;-1)$ et de rayon 3.

INDICE

Écris les coordonnées de $\overrightarrow{MD}$ et de $\overrightarrow{ME}$ pour $M(x;y;z)$, développe le produit scalaire, puis complète les carrés.

CORRIGÉ

Produit scalaire. Soit $M(x;y;z)$; on a $\overrightarrow{MD}(1-x;-y;-3-z)$ et $\overrightarrow{ME}(3-x;4-y;1-z)$. Le repère est orthonormé, donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{ME}&=(x-1)(x-3)+y(y-4)\\&\quad+(z+3)(z-1)\\&=x^2+y^2+z^2\\&\quad-4x-4y+2z.\end{aligned}$$

Complétion des carrés. Avec $x^2-4x=(x-2)^2-4$, $y^2-4y=(y-2)^2-4$ et $z^2+2z=(z+1)^2-1$, la condition $\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{ME}=0$ s'écrit $(x-2)^2-4+(y-2)^2-4+(z+1)^2-1=0$, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}&(x-2)^2+(y-2)^2\\&\quad+(z+1)^2\\&=4+4+1=9.\end{aligned}$$

Conclusion. (S) a pour équation $(x-2)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$: c'est la sphère de centre $I(2;2;-1)$ et de rayon 3.

Contrôle. I est le milieu de $[DE]$ et $DE=\sqrt{4+16+16}=6$, donc le rayon vaut bien $\dfrac{DE}{2}=3$.

4. 0,5 pts

Calculer $d(I,(ABC))$.

INDICE

Écris la formule de la distance d'un point à un plan, puis remplace ; ici $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ tombe juste.

CORRIGÉ

D'après la formule de la distance d'un point à un plan, le numérateur est la valeur absolue de :

$$\begin{aligned}&6\times2+2\times2\\&\quad-3\times(-1)-5\\&=12+4+3-5=14,\end{aligned}$$

et le dénominateur vaut $\sqrt{6^2+2^2+(-3)^2}=\sqrt{49}=7$. Donc :

$$\begin{aligned}&d(I,(ABC))\\&=\frac{|14|}{7}=\frac{14}{7}=2.\end{aligned}$$

Conclusion. $d(I,(ABC))=2$.

5. 0,5 pts

En déduire que le plan (ABC) coupe la sphère (S) selon un cercle (Γ), et montrer que le rayon de (Γ) est égal à $\sqrt{5}$.

INDICE

Compare la distance au rayon 3 ; pour le rayon du cercle, pense au triangle rectangle formé par I, le centre du cercle et un point du cercle.

CORRIGÉ

Position. $d(I,(ABC)) = 2 < 3 = R$: la distance du centre au plan est strictement inférieure au rayon, donc le plan (ABC) coupe (S) selon un cercle (Γ).

Rayon. D'après le théorème de Pythagore, dans le triangle formé par I, le centre de (Γ) et un point de (Γ) :

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{R^2 - d(I,(ABC))^2} \\ &= \sqrt{9-4} = \sqrt{5}. \end{aligned}$$

Conclusion. Le plan (ABC) coupe la sphère (S) selon un cercle (Γ) de rayon $\sqrt{5}$.

6. 0,5 pts

Calculer $\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|$, puis en déduire que l'aire du triangle ABC est égale à 7.

INDICE

L'aire du triangle est la moitié de la norme du produit vectoriel.

CORRIGÉ

Norme.

$$\begin{aligned} &\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\| \\ &= \sqrt{12^2 + 4^2 + (-6)^2} \\ &= \sqrt{144 + 16 + 36} \\ &= \sqrt{196} = 14. \end{aligned}$$

Aire. L'aire du triangle ABC est la moitié de cette norme :

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{14}{2} = 7.$$

Conclusion. $\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\| = 14$, et l'aire du triangle ABC est égale à 7.

Exercice 5 — 3 pts

Une droite qui traverse une sphère, et la corde qu'elle découpe

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère la sphère (S) d'équation

$$x^2+y^2+z^2+2x-4y-6z+5=0,$$

et la droite (D) passant par le point $A(-3;-2;1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1;2;0)$, de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x=-3+t \\ y=-2+2t \\ z=1 \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R}).$$

1. — 0,5 pts

Montrer que (S) est la sphère de centre $\Omega(-1;2;3)$ et de rayon 3.

INDICE

Complète les trois carrés, puis regarde le nombre obtenu à droite.

CORRIGÉ

Complétion des carrés. $x^2+2x=(x+1)^2-1$, $y^2-4y=(y-2)^2-4$ et $z^2-6z=(z-3)^2-9$. L'équation de (S) équivaut donc à :

$$\begin{aligned}&(x+1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2\\&=1+4+9-5=9.\end{aligned}$$

Conclusion. Comme $9>0$, (S) est la sphère de centre $\Omega(-1;2;3)$ et de rayon $R=\sqrt{9}=3$.

2. 0,5 pts

Montrer que $\overrightarrow{A\Omega} \wedge \vec{u} = -4\vec{i} + 2\vec{j}$, et en déduire que le point Ω n'appartient pas à la droite (D).

INDICE

Calcule les coordonnées de $\overrightarrow{A\Omega}$, puis les trois déterminants 2×2 ; un produit vectoriel non nul signifie que les deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

CORRIGÉ

Coordonnées. $\overrightarrow{A\Omega}(2;4;2)$ et $\vec{u}(1;2;0)$.

Produit vectoriel. Le repère est orthonormé direct :

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{A\Omega} \wedge \vec{u} \\
&= \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \vec{j} \\
&\quad + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \vec{k} \\
&= (0-4)\vec{i} - (0-2)\vec{j} \\
&\quad + (4-4)\vec{k} \\
&= -4\vec{i} + 2\vec{j}.
\end{aligned}$$

Conclusion. $\overrightarrow{A\Omega} \wedge \vec{u} = -4\vec{i} + 2\vec{j}$. Ce vecteur n'est pas nul : $\overrightarrow{A\Omega}$ et $\vec{u}$ ne sont pas colinéaires, donc le point Ω n'appartient pas à la droite (D), qui passe par A et est dirigée par $\vec{u}$.

3. 0,25 pts

En déduire que $d(\Omega, (D)) = 2$.

INDICE

Utilise la formule de la distance d'un point à une droite passant par A et dirigée par $\vec{u}$.

CORRIGÉ

D'après la formule de la distance d'un point à une droite passant par A et dirigée par $\vec{u}$:

$$\begin{aligned}
&d(\Omega, (D)) \\
&= \frac{\left\| \overrightarrow{A\Omega} \wedge \vec{u} \right\|}{\|\vec{u}\|} \\
&= \frac{\sqrt{(-4)^2 + 2^2 + 0^2}}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 0^2}} \\
&= \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}} = \sqrt{4} = 2.
\end{aligned}$$

Conclusion. $d(\Omega, (D)) = 2$.

4. 0,75 pts

Déterminer les coordonnées des points communs à la droite (D) et à la sphère (S) ; on notera E celui de plus petite abscisse et F l'autre.

INDICE

Reporte la représentation paramétrique de (D) dans l'équation $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9$: tu obtiens une équation du second degré en t.

CORRIGÉ

Report. Le point de (D) de paramètre t vérifie $x+1=-2+t$, $y-2=-4+2t$ et $z-3=-2$. Il appartient à (S) si et seulement si :

$$(-2+t)^2+(-4+2t)^2 + (-2)^2=9.$$

En développant, $t^2-4t+4+4t^2-16t+16+4=9$, soit $5t^2-20t+15=0$, puis, en divisant par 5 :

$$t^2-4t+3=0.$$

Résolution. Le discriminant vaut $16-12=4>0$, d'où deux solutions : $t=\dfrac{4-2}{2}=1$ et $t=\dfrac{4+2}{2}=3$.

Points communs.

- Pour $t=1$: $E(-2;0;1)$;
- pour $t=3$: $F(0;4;1)$.

Contrôle. $(-1)^2+(-2)^2+(-2)^2=9$ pour E et $1^2+2^2+(-2)^2=9$ pour F.

Conclusion. La droite (D) coupe (S) en deux points : $E(-2;0;1)$, de plus petite abscisse, et $F(0;4;1)$.

5. 0,5 pts

Vérifier que le plan (P) d'équation $2x - y + 4 = 0$ contient la droite (D) et le point Ω, puis en déduire que (P) coupe la sphère (S) selon un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

INDICE

Un vecteur normal de (P) est-il orthogonal à $\vec{u}$? Le point A est-il dans (P) ? Que vaut la distance de Ω à un plan qui le contient ?

CORRIGÉ

La droite (D) est dans (P). Le vecteur $\vec{n}(2;-1;0)$ est normal à (P) et $\vec{n}\cdot\vec{u} = 2 - 2 + 0 = 0$: la droite (D) est parallèle à (P). De plus $A \in (P)$, car $-6 + 2 + 4 = 0$. Donc (D) est contenue dans (P).

Le point Ω est dans (P). En effet, $-2 - 2 + 4 = 0$.

Section de la sphère. Comme $\Omega \in (P)$, $d(\Omega,(P)) = 0 < 3 = R$: le plan (P) coupe (S) selon un cercle. Son centre est le projeté orthogonal de Ω sur (P), c'est-à-dire Ω lui-même, et son rayon vaut :

$$\begin{aligned}&\sqrt{R^2 - d(\Omega,(P))^2}\\ &= \sqrt{9 - 0} = 3.\end{aligned}$$

Remarque. $\overrightarrow{A\Omega} \wedge \vec{u} = -2\vec{n}$: (P) est le plan passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{A\Omega} \wedge \vec{u}$. Les points E et F, qui sont dans (P) et sur (S), appartiennent à ce cercle.

Conclusion. Le plan (P) contient la droite (D) et le point Ω ; il coupe la sphère (S) selon le cercle de centre $\Omega(-1;2;3)$ et de rayon 3.

6. 0,5 pts

Montrer que le milieu K du segment $[EF]$ vérifie $\overrightarrow{\Omega K}\cdot\vec{u}=0$ et $\Omega K=d(\Omega,(D))$, puis calculer EF et vérifier que $\left(\dfrac{EF}{2}\right)^2+\Omega K^2=R^2$.

INDICE

Calcule d'abord les coordonnées de K, puis celles de $\overrightarrow{\Omega K}$; compare ΩK au résultat de la question 3.

CORRIGÉ

Le point K. $K\left(\dfrac{-2+0}{2};\dfrac{0+4}{2};\dfrac{1+1}{2}\right)$, soit $K(-1;2;1)$, et $\overrightarrow{\Omega K}(0;0;-2)$.

Orthogonalité. $\overrightarrow{\Omega K}\cdot\vec{u}=0\times1+0\times2+(-2)\times0=0$. Le point K, milieu de deux points de (D), appartient à (D) : la droite (ΩK) est perpendiculaire à (D) en K.

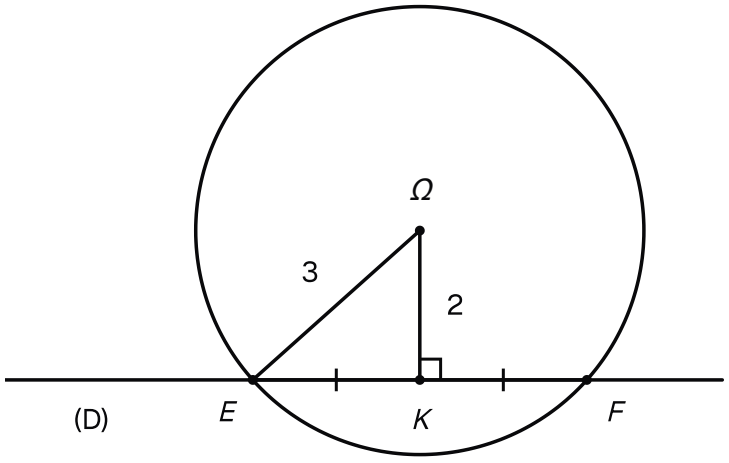
Distance. $\Omega K=\sqrt{0+0+4}=2=d(\Omega,(D))$.

Longueur EF. $\overrightarrow{EF}(2;4;0)$, donc $EF=\sqrt{4+16+0}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$.

Égalité de Pythagore.

$$\begin{aligned}&\left(\frac{EF}{2}\right)^2+\Omega K^2\\&=\left(\sqrt{5}\right)^2+2^2\\&=5+4=9=R^2.\end{aligned}$$

Conclusion. $\overrightarrow{\Omega K}\cdot\vec{u}=0$, $\Omega K=d(\Omega,(D))$, $EF=2\sqrt{5}$ et $\left(\dfrac{EF}{2}\right)^2+\Omega K^2=R^2$. Le triangle ΩKE est rectangle en K : la demi-corde $\dfrac{EF}{2}$, la distance du centre à la droite et le rayon vérifient l'égalité de Pythagore.



Dans le plan (P), le cercle de centre Ω et de rayon 3, la corde [EF] portée par (D) et son milieu K : ΩK = 2, ΩE = 3, rectangle en K.