BURHAN

Géométrie dans l'espace : exercices, entraînement

2ème Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-experimentales/mathematiques/geometrie-dans-l-espace/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Géométrie dans l'espace	Entraînement	6

Exercice 1

Du plan au symétrique d'un point

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On note (P) le plan qui passe par $A(3;1;0)$ et dont $\vec{n}(2;-1;-2)$ est un vecteur normal. Soit $B(0;2;1)$.

1.

Montre que $2x - y - 2z - 5 = 0$ est une équation cartésienne de (P).

INDICE

Traduis $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$ en coordonnées, puis développe.

2.

Calcule $d(B, (P))$.

INDICE

$\|\vec{n}\| = \sqrt{4+1+4}$: la racine tombe juste.

3.

Écris une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par B et orthogonale à (P).

INDICE

Le vecteur normal de (P) dirige (Δ).

4.

Détermine les coordonnées du projeté orthogonal H de B sur (P), et vérifie que $BH = d(B, (P))$.

INDICE

Reporte la représentation de (Δ) dans l'équation de (P).

5.

Détermine les coordonnées du point B' tel que H soit le milieu du segment $[BB']$; ce point B' est appelé le symétrique de B par rapport au plan (P).

INDICE

H est le milieu de $[BB']$: $x_{B'} = 2x_H - x_B$, et de même pour y et z.

6.

Détermine une équation du plan (Q) parallèle à (P) et passant par B, puis montre que tous les points de (Q) sont à la distance 3 de (P).

INDICE

Deux plans parallèles ont le même vecteur normal ; seul le terme constant change. Pour la distance, prends un point $M(x;y;z)$ quelconque de (Q) et utilise son équation dans la formule.

Exercice 2

Une sphère coupée, une sphère touchée

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit (S) l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 4y - 2z - 16 = 0,$$

et soient les plans $(P) : 2x + y - 2z - 9 = 0$ et $(Q) : 3y + 4z + 27 = 0$.

1.

Montre que (S) est la sphère de centre $\Omega(2; -2; 1)$ et de rayon 5.

INDICE

Complète les carrés en x, en y et en z séparément.

2.

Calcule $d(\Omega, (P))$ et justifie que (P) coupe (S) selon un cercle (Γ).

INDICE

Calcule la distance et compare-la au rayon.

3.

Calcule le rayon r de (Γ).

INDICE

Pythagore dans le triangle formé par Ω, le centre du cercle et un point du cercle.

4.

Détermine le centre H de (Γ).

INDICE

Le centre de (Γ) est le projeté orthogonal de Ω sur (P).

5.

Montre que le plan (Q) est tangent à (S).

INDICE

Le vecteur $\vec{n}'(0; 3; 4)$ a une norme entière.

6.

Détermine les coordonnées du point de contact T de (Q) et de (S).

INDICE

T est le projeté orthogonal de Ω sur (Q) : utilise la droite issue de Ω dirigée par $\vec{n}'$.

Exercice 3

Trois points, un plan et un tétraèdre

Le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthonormé direct. On considère les points $A(2;-1;1)$, $B(3;1;1)$, $C(2;0;5)$ et $D(-1;0;2)$.

1.

Calcule $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ et contrôle le résultat par deux produits scalaires.

INDICE

Commence par $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Le résultat doit être orthogonal à chacun d'eux.

2.

Justifie que A, B, C définissent un plan, et montre que $8x - 4y + z - 21 = 0$ en est une équation.

INDICE

Le produit vectoriel est non nul ; il est normal au plan (ABC).

3.

Calcule l'aire du triangle ABC.

INDICE

Moitié de la norme du produit vectoriel.

4.

Calcule la distance du point C à la droite (AB).

INDICE

Divise la norme du produit vectoriel par la norme du vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$.

5.

Calcule $d(D, (ABC))$. On admet que le volume d'un tétraèdre vaut le tiers du produit de l'aire d'une base par la hauteur correspondante : calcule le volume du tétraèdre $ABCD$.

INDICE

La hauteur issue de D est la distance de D au plan (ABC).

Exercice 4

Une droite sécante et une droite tangente

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit (S) la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4z - 4 = 0$ et soient les droites :

$$(D) : \begin{cases} x = 5 - 2s \\ y = 7 - 5s \\ z = 4 - s \end{cases} \quad (s \in \mathbb{R}),$$

$$(D') : \begin{cases} x = 4 + \lambda \\ y = 2 \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

1.

Détermine le centre Ω et le rayon de (S).

INDICE

Complète les carrés en x et en z ; y^2 est déjà un carré.

2.

Montre que les points de (D) qui sont sur (S) correspondent aux solutions de $s^2 - 3s + 2 = 0$, puis donne leurs coordonnées.

INDICE

Utilise la forme $(x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 9$: elle allège le développement.

3.

Donne une équation du plan (T) tangent à (S) en M_1.

INDICE

Le vecteur $\overrightarrow{\Omega M_1}$ est normal au plan tangent en M_1.

4.

Montre que (D') est tangente à (S) au point M_1.

INDICE

Reporte, simplifie, puis reconnais une identité remarquable.

5.

Vérifie que (D') est contenue dans le plan (T).

INDICE

Il suffit qu'un point de (D') soit dans (T) et qu'un vecteur directeur de (D') soit orthogonal au vecteur normal de (T).

Exercice 5

Sphère de diamètre [AB], angle droit et paramétrage

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On donne $A(-1;2;5)$ et $B(3;0;1)$, et l'on note (S) l'ensemble des points $M(x;y;z)$ tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$.

1.

Montre que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=x^2+y^2+z^2-2x-2y-6z+2$.

INDICE

Écris $\overrightarrow{MA}(-1-x;2-y;5-z)$ et $\overrightarrow{MB}$, puis regroupe deux par deux.

2.

Déduis-en que (S) est une sphère dont tu préciseras le centre I et le rayon. Vérifie que I est le milieu de $[AB]$ et que le rayon vaut $\dfrac{AB}{2}$.

INDICE

Complète les carrés dans l'équation $x^2+y^2+z^2-2x-2y-6z+2=0$.

3.

Vérifie que $C(3;3;2)$ appartient à (S). Que peux-tu en déduire pour le triangle ABC ?

INDICE

Si $C\in(S)$, alors $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=0$.

4.

Donne une équation du plan tangent à (S) en C.

INDICE

Vecteur normal : $\overrightarrow{IC}$.

5.

Écris une représentation paramétrique de (S). Quels points obtient-on pour $\theta=\dfrac{\pi}{2}$, $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$, puis pour $\varphi=\pi$ (quel que soit θ) ?

INDICE

Centre $I(1;1;3)$, rayon 3 ; rappelle-toi $\cos\pi=-1$ et $\sin\pi=0$.

Exercice 6

Plans parallèles, plans perpendiculaires, famille de plans

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit (P) le plan d'équation $2x - 3y + 6z - 7 = 0$, de vecteur normal $\vec{n}(2; -3; 6)$.

1.

Montre que le plan $(Q) : -4x + 6y - 12z + 5 = 0$ est parallèle à (P) et distinct de (P).

INDICE

Compare les vecteurs normaux, puis teste un point de (P) dans l'équation de (Q).

2.

Montre que tous les points de (Q) sont à la distance $\dfrac{9}{14}$ de (P).

INDICE

Prends un point $M(x; y; z)$ de (Q) : son équation donne la valeur de $2x - 3y + 6z$, à reporter dans la formule de $d(M, (P))$.

3.

Détermine le projeté orthogonal H de l'origine O sur (P), puis vérifie que $OH = d(O, (P))$.

INDICE

La droite passant par O et dirigée par $\vec{n}$ est formée des points $(2t; -3t; 6t)$.

4.

Soit (D) la droite de représentation paramétrique $x = 3t$, $y = 1$, $z = 2 - t$ ($t \in \mathbb{R}$). Montre que (D) est parallèle à (P) sans être contenue dans (P).

INDICE

Une droite est parallèle à un plan quand son vecteur directeur est orthogonal au vecteur normal.

5.

Montre que le plan $(R) : 2y + z - 1 = 0$ est perpendiculaire à (P).

INDICE

Calcule le produit scalaire des deux vecteurs normaux.

6.

Pour tout réel m, on note (P_m) le plan d'équation $2x - 3y + 6z + m = 0$. Détermine les valeurs de m pour lesquelles la distance du point $K(1; 1; 1)$ à (P_m) vaut 2.

INDICE

Écris la distance en fonction de m ; une équation $|X| = a$, avec $a > 0$, a deux solutions : $X = a$ ou $X = -a$.