BURHAN

Géométrie dans l'espace : exercices, entraînement

2ème Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-experimentales/mathematiques/geometrie-dans-l-espace/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Géométrie dans l'espace	Entraînement	6

Exercice 1

Du plan au symétrique d'un point

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On note (P) le plan qui passe par $A(3;1;0)$ et dont $\vec{n}(2;-1;-2)$ est un vecteur normal. Soit $B(0;2;1)$.

1.

Montre que $2x - y - 2z - 5 = 0$ est une équation cartésienne de (P).

INDICE

Traduis $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$ en coordonnées, puis développe.

CORRIGÉ

Soit $M(x;y;z)$ un point de l'espace ; on a $\overrightarrow{AM}(x-3;y-1;z)$. Le point M appartient à (P) si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ est orthogonal au vecteur normal $\vec{n}$:

$$\begin{aligned} & M \in (P) \\ \iff & \vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \\ \iff & 2(x-3) - (y-1) \\ & \quad - 2z = 0 \\ \iff & 2x - y - 2z - 5 = 0. \end{aligned}$$

Conclusion. $2x - y - 2z - 5 = 0$ est une équation cartésienne de (P).

2.

Calcule $d(B, (P))$.

INDICE

$\|\vec{n}\| = \sqrt{4+1+4}$: la racine tombe juste.

CORRIGÉ

Le vecteur normal $\vec{n}(2;-1;-2)$ a pour norme $\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3$. D'après la formule de la distance d'un point à un plan :

$$\begin{aligned} & d(B, (P)) \\ & = \frac{|2 \times 0 - 2 - 2 \times 1 - 5|}{3} \\ & = \frac{|-9|}{3} = 3. \end{aligned}$$

Conclusion. $d(B, (P)) = 3$.

3.

Écris une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par B et orthogonale à (P).

INDICE

Le vecteur normal de (P) dirige (Δ).

CORRIGÉ

La droite (Δ) est orthogonale à (P) : elle est dirigée par le vecteur normal $\vec{n}(2;-1;-2)$. Elle passe par $B(0;2;1)$.

Conclusion. Une représentation paramétrique de (Δ) est :

$$(\Delta) : \begin{cases} x = 2t \\ y = 2 - t \\ z = 1 - 2t \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

4.

Détermine les coordonnées du projeté orthogonal H de B sur (P), et vérifie que $BH = d(B,(P))$.

INDICE

Reporte la représentation de (Δ) dans l'équation de (P).

CORRIGÉ

Paramètre de H. Le point H est le point d'intersection de (Δ) et de (P). Pour le point de (Δ) de paramètre t, le premier membre de l'équation de (P) vaut :

$$\begin{aligned} &2(2t) - (2 - t) \\ &\quad - 2(1 - 2t) - 5 \\ &= 4t - 2 + t - 2 + 4t - 5 \\ &= 9t - 9. \end{aligned}$$

Ce point est dans (P) si et seulement si $9t - 9 = 0$, c'est-à-dire $t = 1$.

Coordonnées de H. Pour $t = 1$, on obtient $H(2;1;-1)$. **Contrôle** : $4 - 1 + 2 - 5 = 0$.

Longueur BH. On a $\overrightarrow{BH}(2;-1;-2)$, donc :

$$BH = \sqrt{4 + 1 + 4} = 3.$$

Conclusion. $H(2;1;-1)$ et $BH = 3 = d(B,(P))$.

5.

Détermine les coordonnées du point B' tel que H soit le milieu du segment $[BB']$; ce point B' est appelé le symétrique de B par rapport au plan (P).

INDICE

H est le milieu de $[BB']$: $x_{B'} = 2x_H - x_B$, et de même pour y et z.

CORRIGÉ

Relation vectorielle. H est le milieu de $[BB']$, donc $\overrightarrow{OH} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB'}\right)$, c'est-à-dire $\overrightarrow{OB'} = 2\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OB}$.

Coordonnées. Avec $H(2;1;-1)$ et $B(0;2;1)$:

$$B'(4-0;2-2;-2-1).$$

Contrôle. $B'(4;0;-3)$ est le point de (Δ) de paramètre $t=2$, et :

$$\begin{aligned} &d(B',(P)) \\ &= \frac{|8-0+6-5|}{3} = 3. \end{aligned}$$

Conclusion. Le symétrique de B par rapport au plan (P) est $B'(4;0;-3)$.

6.

Détermine une équation du plan (Q) parallèle à (P) et passant par B, puis montre que tous les points de (Q) sont à la distance 3 de (P).

INDICE

Deux plans parallèles ont le même vecteur normal ; seul le terme constant change. Pour la distance, prends un point $M(x;y;z)$ quelconque de (Q) et utilise son équation dans la formule.

CORRIGÉ

Équation de (Q). Deux plans parallèles ont des vecteurs normaux colinéaires : $\vec{n}$ est normal à (Q), qui a donc une équation de la forme $2x - y - 2z + \delta = 0$, où δ est un réel. Comme $B \in (Q)$: $0 - 2 - 2 + \delta = 0$, donc $\delta = 4$ et :

$$(Q) : 2x - y - 2z + 4 = 0.$$

Distance à (P). Soit $M(x;y;z)$ un point de (Q). Son équation donne $2x - y - 2z = -4$, donc :

$$\begin{aligned} &d(M,(P)) \\ &= \frac{|2x-y-2z-5|}{3} \\ &= \frac{|-4-5|}{3} = \frac{9}{3} = 3. \end{aligned}$$

Conclusion. $(Q) : 2x - y - 2z + 4 = 0$, et tous les points de (Q) sont à la distance 3 de (P), comme B à la question 2.

Exercice 2

Une sphère coupée, une sphère touchée

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit (S) l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 4y - 2z - 16 = 0,$$

et soient les plans $(P) : 2x + y - 2z - 9 = 0$ et $(Q) : 3y + 4z + 27 = 0$.

1.

Montre que (S) est la sphère de centre $\Omega(2; -2; 1)$ et de rayon 5.

INDICE

Complète les carrés en x, en y et en z séparément.

CORRIGÉ

Complétion des carrés.

$$\begin{aligned} x^2 - 4x &= (x-2)^2 - 4, \\ y^2 + 4y &= (y+2)^2 - 4, \\ z^2 - 2z &= (z-1)^2 - 1. \end{aligned}$$

Équation réduite. L'équation de (S) équivaut donc à :

$$\begin{aligned} &(x-2)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 \\ &= 4 + 4 + 1 + 16 = 25. \end{aligned}$$

Conclusion. Comme $25 > 0$, (S) est la sphère de centre $\Omega(2; -2; 1)$ et de rayon $\sqrt{25} = 5$.

2.

Calcule $d(\Omega, (P))$ et justifie que (P) coupe (S) selon un cercle (Γ).

INDICE

Calcule la distance et compare-la au rayon.

CORRIGÉ

Le vecteur $(2; 1; -2)$, normal à (P), a pour norme $\sqrt{4 + 1 + 4} = 3$. Donc :

$$\begin{aligned} d(\Omega, (P)) &= \frac{|4 - 2 - 2 - 9|}{3} \\ &= \frac{|-9|}{3} = 3. \end{aligned}$$

Conclusion. $d(\Omega, (P)) = 3 < 5 = R$: la distance du centre au plan est strictement inférieure au rayon, donc le plan (P) coupe (S) selon un cercle (Γ).

3.

Calcule le rayon r de (Γ).

INDICE

Pythagore dans le triangle formé par Ω, le centre du cercle et un point du cercle.

CORRIGÉ

Soit H le centre de (Γ) et M un point de (Γ). Le triangle $\Omega H M$ est rectangle en H, avec $\Omega H = d(\Omega, (P)) = 3$ et $\Omega M = R = 5$. D'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{R^2 - \Omega H^2} \\ &= \sqrt{25 - 9} = 4. \end{aligned}$$

Conclusion. Le rayon de (Γ) est $r = 4$.

4.

Détermine le centre H de (Γ).

INDICE

Le centre de (Γ) est le projeté orthogonal de Ω sur (P).

CORRIGÉ

Droite utile. Le centre H de (Γ) est le projeté orthogonal de Ω sur (P). La droite passant par Ω et dirigée par $\vec{n}(2;1;-2)$, normal à (P), a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -2 + t \\ z = 1 - 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

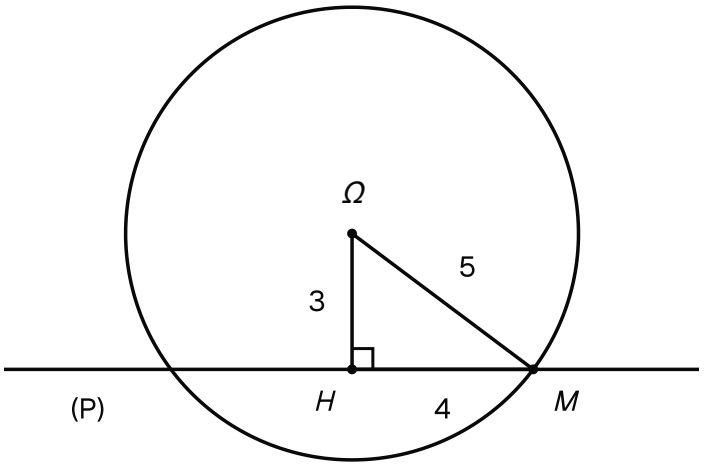
Paramètre de H. Pour le point de paramètre t, le premier membre de l'équation de (P) vaut :

$$\begin{aligned} &2(2+2t) + (-2+t) \\ &\quad - 2(1-2t) - 9 \\ &= 9t - 9. \end{aligned}$$

L'équation $9t - 9 = 0$ donne $t = 1$.

Contrôle. Pour $t = 1$, on obtient $(4;-1;-1)$, et $8 - 1 + 2 - 9 = 0$.

Conclusion. Le centre de (Γ) est $H(4;-1;-1)$.



Coupe par un plan contenant Ω et orthogonal à (P) : ΩH = 3, HM = 4 et ΩM = 5, le triangle ΩHM est rectangle en H.

5.

Montre que le plan (Q) est tangent à (S).

INDICE

Le vecteur $\vec{n}'(0;3;4)$ a une norme entière.

CORRIGÉ

Le vecteur $\vec{n}'(0;3;4)$, normal à (Q), a pour norme $\sqrt{0+9+16}=5$. Donc :

$$\begin{aligned} &d(\Omega,(Q)) \\ &= \frac{|3\times(-2)+4\times 1+27|}{5} \\ &= \frac{25}{5} = 5 = R. \end{aligned}$$

Conclusion. La distance du centre au plan est égale au rayon : le plan (Q) est tangent à (S).

6.

Détermine les coordonnées du point de contact T de (Q) et de (S).

INDICE

T est le projeté orthogonal de Ω sur (Q) : utilise la droite issue de Ω dirigée par $\vec{n}'$.

CORRIGÉ

Droite utile. Le point T est le projeté orthogonal de Ω sur (Q). La droite passant par Ω et dirigée par $\vec{n}'$ est formée des points $(2;-2+3t;1+4t)$, où $t\in\mathbb{R}$.

Paramètre de T. Un tel point appartient à (Q) si et seulement si :

$$\begin{aligned} &3(-2+3t)+4(1+4t) \\ &\quad +27=0, \end{aligned}$$

c'est-à-dire $25t+25=0$, soit $t=-1$.

Contrôle. Pour $t=-1$, on obtient $(2;-5;-3)$; alors $-15-12+27=0$ et $\Omega T^2=0+9+16=25=R^2$.

Conclusion. Le point de contact de (Q) et de (S) est $T(2;-5;-3)$.

Exercice 3

Trois points, un plan et un tétraèdre

Le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthonormé direct. On considère les points $A(2;-1;1)$, $B(3;1;1)$, $C(2;0;5)$ et $D(-1;0;2)$.

1.

Calcule $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ et contrôle le résultat par deux produits scalaires.

INDICE

Commence par $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Le résultat doit être orthogonal à chacun d'eux.

CORRIGÉ

Coordonnées. $\overrightarrow{AB}(1;2;0)$ et $\overrightarrow{AC}(0;1;4)$.

Produit vectoriel. La base est orthonormée directe :

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\\ &= (2\times 4 - 0\times 1)\vec{i}\\ &\quad - (1\times 4 - 0\times 0)\vec{j}\\ &\quad + (1\times 1 - 2\times 0)\vec{k}\\ &= 8\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}.\end{aligned}$$

Contrôle. Notons $\vec{w}(8;-4;1)$ ce vecteur. Alors $\vec{w}\cdot\overrightarrow{AB} = 8 - 8 + 0 = 0$ et $\vec{w}\cdot\overrightarrow{AC} = 0 - 4 + 4 = 0$: $\vec{w}$ est bien orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AC}$.

Conclusion. $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 8\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$.

2.

Justifie que A, B, C définissent un plan, et montre que $8x - 4y + z - 21 = 0$ en est une équation.

INDICE

Le produit vectoriel est non nul ; il est normal au plan (ABC).

CORRIGÉ

Un plan. $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$, donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires : A, B, C ne sont pas alignés et définissent un plan. Le vecteur $\vec{w}(8;-4;1)$ de la question 1 est normal à ce plan.

Équation. Le plan (ABC) a une équation de la forme $8x - 4y + z + \delta = 0$, où δ est un réel. Avec $A(2;-1;1)$: $16 + 4 + 1 + \delta = 0$, d'où $\delta = -21$.

Contrôle. B donne $24 - 4 + 1 - 21 = 0$ et C donne $16 - 0 + 5 - 21 = 0$.

Conclusion. Les points A, B, C définissent un plan, dont $8x - 4y + z - 21 = 0$ est une équation.

3.

Calcule l'aire du triangle ABC.

INDICE

Moitié de la norme du produit vectoriel.

CORRIGÉ

L'aire du triangle ABC est la moitié de la norme de $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$. Or :

$$\begin{aligned} &\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\| \\ &= \sqrt{64 + 16 + 1} = \sqrt{81} = 9. \end{aligned}$$

Conclusion. L'aire du triangle ABC vaut $\mathcal{A}_{ABC} = \dfrac{9}{2}$ unités d'aire.

4.

Calcule la distance du point C à la droite (AB).

INDICE

Divise la norme du produit vectoriel par la norme du vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$.

CORRIGÉ

La droite (AB) passe par A et est dirigée par $\overrightarrow{AB}$, de norme $AB = \sqrt{1 + 4 + 0} = \sqrt{5}$. De plus $\left\|\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AB}\right\| = \left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\| = 9$. D'après la formule de la distance d'un point à une droite :

$$\begin{aligned} d(C, (AB)) &= \frac{9}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{9\sqrt{5}}{5}. \end{aligned}$$

Conclusion. La distance du point C à la droite (AB) vaut $\dfrac{9\sqrt{5}}{5}$.

5.

Calcule $d(D,(ABC))$. On admet que le volume d'un tétraèdre vaut le tiers du produit de l'aire d'une base par la hauteur correspondante : calcule le volume du tétraèdre $ABCD$.

INDICE

La hauteur issue de D est la distance de D au plan (ABC).

CORRIGÉ

Hauteur. La hauteur du tétraèdre issue de D est la distance de D au plan (ABC) :

$$\begin{aligned} &d(D,(ABC)) \\ &= \frac{|8\times(-1)-0+2-21|}{\sqrt{64+16+1}} \\ &= \frac{|-27|}{9} = 3. \end{aligned}$$

Volume. On prend pour base le triangle ABC, d'aire $\dfrac{9}{2}$; la hauteur correspondante vaut 3 :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3}\times\frac{9}{2}\times 3 = \frac{9}{2}.$$

Conclusion. $d(D,(ABC)) = 3$, et le volume du tétraèdre $ABCD$ vaut $\dfrac{9}{2}$ unités de volume.

Exercice 4

Une droite sécante et une droite tangente

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Soit (S) la sphère d'équation $x^2+y^2+z^2-2x-4z-4=0$ et soient les droites :

$$(D):\begin{cases}x=5-2s\\y=7-5s\\z=4-s\end{cases}\quad(s\in\mathbb{R}),$$

$$(D'):\begin{cases}x=4+\lambda\\y=2\\z=1-2\lambda\end{cases}\quad(\lambda\in\mathbb{R}).$$

1.

Détermine le centre Ω et le rayon de (S).

INDICE

Complète les carrés en x et en z ; y^2 est déjà un carré.

CORRIGÉ

Complétion des carrés. $x^2-2x=(x-1)^2-1$ et $z^2-4z=(z-2)^2-4$; le terme y^2 est déjà un carré. L'équation de (S) équivaut donc à :

$$\begin{aligned}&(x-1)^2+y^2+(z-2)^2\\&=1+4+4=9.\end{aligned}$$

Conclusion. Comme $9>0$, (S) est la sphère de centre $\Omega(1;0;2)$ et de rayon $\sqrt{9}=3$.

2.

Montre que les points de (D) qui sont sur (S) correspondent aux solutions de $s^2 - 3s + 2 = 0$, puis donne leurs coordonnées.

INDICE

Utilise la forme $(x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 9$: elle allège le développement.

CORRIGÉ

Report. Le point de (D) de paramètre s vérifie $x - 1 = 4 - 2s$, $y = 7 - 5s$ et $z - 2 = 2 - s$. On utilise la forme $(x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 9$; le premier membre vaut :

$$\begin{aligned}&(4-2s)^2 + (7-5s)^2\\ &\quad + (2-s)^2\\ &= 30s^2 - 90s + 69.\end{aligned}$$

L'équation $30s^2 - 90s + 69 = 9$ équivaut à $30s^2 - 90s + 60 = 0$, puis, en divisant par 30, à :

$$s^2 - 3s + 2 = 0.$$

Résolution. Le discriminant vaut $9 - 8 = 1 > 0$: deux solutions, $s = \dfrac{3-1}{2} = 1$ et $s = \dfrac{3+1}{2} = 2$.

Points communs. Pour $s = 1$, on obtient $M_1(3;2;3)$; pour $s = 2$, on obtient $M_2(1;-3;2)$.

Conclusion. Les points de (D) situés sur (S) correspondent aux solutions de $s^2 - 3s + 2 = 0$: la droite (D) coupe (S) en deux points, $M_1(3;2;3)$ et $M_2(1;-3;2)$.

3.

Donne une équation du plan (T) tangent à (S) en M_1.

INDICE

Le vecteur $\overrightarrow{\Omega M_1}$ est normal au plan tangent en M_1.

CORRIGÉ

Le plan (T) passe par $M_1(3;2;3)$ et admet $\overrightarrow{\Omega M_1}(2;2;1)$ pour vecteur normal. Un point $M(x;y;z)$ appartient à (T) si et seulement si $\overrightarrow{\Omega M_1} \cdot \overrightarrow{M_1 M} = 0$. Or :

$$\begin{aligned}&2(x-3) + 2(y-2) + (z-3)\\ &= 2x + 2y + z - 13.\end{aligned}$$

Contrôle. $d(\Omega,(T)) = \dfrac{|2+0+2-13|}{3} = 3$, le rayon de (S).

Conclusion. Le plan tangent à (S) en M_1 a pour équation $2x + 2y + z - 13 = 0$.

4.

Montre que (D') est tangente à (S) au point M_1.

INDICE

Reporte, simplifie, puis reconnais une identité remarquable.

CORRIGÉ

Report. Le point de (D') de paramètre λ vérifie $x-1=3+\lambda$, $y=2$ et $z-2=-1-2\lambda$. Dans la forme $(x-1)^2+y^2+(z-2)^2=9$, le premier membre vaut :

$$\begin{aligned}&(3+\lambda)^2+2^2\\&\quad+(-1-2\lambda)^2\\&=5\lambda^2+10\lambda+14.\end{aligned}$$

Résolution. L'équation $5\lambda^2+10\lambda+14=9$ équivaut à $5\lambda^2+10\lambda+5=0$, c'est-à-dire $5(\lambda^2+2\lambda+1)=0$, ou encore :

$$(\lambda+1)^2=0.$$

Elle a une seule solution, $\lambda=-1$ (discriminant nul), qui donne le point $(3;2;3)$, c'est-à-dire M_1.

Conclusion. La droite (D') et la sphère (S) ont un seul point commun, M_1 : la droite (D') est tangente à (S) en M_1.

5.

Vérifie que (D') est contenue dans le plan (T).

INDICE

Il suffit qu'un point de (D') soit dans (T) et qu'un vecteur directeur de (D') soit orthogonal au vecteur normal de (T).

CORRIGÉ

Une droite est contenue dans un plan dès qu'un de ses points appartient au plan et qu'un de ses vecteurs directeurs est orthogonal à un vecteur normal du plan.

- **Un point.** Le point $(4;2;1)$ de (D'), de paramètre 0, vérifie $8+4+1-13=0$: il appartient à (T).
- **La direction.** Le vecteur $\vec{w}(1;0;-2)$ dirige (D'), et $\vec{w}\cdot\overrightarrow{\Omega M_1}=2+0-2=0$.

Conclusion. La droite (D') est contenue dans le plan tangent (T).

Exercice 5

Sphère de diamètre [AB], angle droit et paramétrage

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On donne $A(-1;2;5)$ et $B(3;0;1)$, et l'on note (S) l'ensemble des points $M(x;y;z)$ tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$.

1.

Montre que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=x^2+y^2+z^2-2x-2y-6z+2$.

INDICE

Écris $\overrightarrow{MA}(-1-x;2-y;5-z)$ et $\overrightarrow{MB}$, puis regroupe deux par deux.

CORRIGÉ

Soit $M(x;y;z)$; on a $\overrightarrow{MA}(-1-x;2-y;5-z)$ et $\overrightarrow{MB}(3-x;-y;1-z)$. Le repère est orthonormé. Un produit de deux facteurs ne change pas si l'on change le signe de chacun d'eux, donc :

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}\\&=(x+1)(x-3)+(y-2)y\\&\quad+(z-5)(z-1)\\&=x^2-2x-3+y^2-2y\\&\quad+z^2-6z+5.\end{aligned}$$

Conclusion. En regroupant les termes, pour tout point $M(x;y;z)$: $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=x^2+y^2+z^2-2x-2y-6z+2$.

2.

Déduis-en que (S) est une sphère dont tu préciseras le centre I et le rayon. Vérifie que I est le milieu de $[AB]$ et que le rayon vaut $\dfrac{AB}{2}$.

INDICE

Complète les carrés dans l'équation $x^2+y^2+z^2-2x-2y-6z+2=0$.

CORRIGÉ

Complétion des carrés. D'après la question 1, $M(x;y;z)$ appartient à (S) si et seulement si $x^2+y^2+z^2-2x-2y-6z+2=0$. Avec $x^2-2x=(x-1)^2-1$, $y^2-2y=(y-1)^2-1$ et $z^2-6z=(z-3)^2-9$, cette équation s'écrit :

$$\begin{aligned}&(x-1)^2+(y-1)^2+(z-3)^2\\&=1+1+9-2=9.\end{aligned}$$

Conclusion. (S) a pour équation $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=9$: c'est la sphère de centre $I(1;1;3)$ et de rayon 3.

Contrôle. Le milieu de $[AB]$ est $\left(\dfrac{-1+3}{2};\dfrac{2+0}{2};\dfrac{5+1}{2}\right)$, c'est-à-dire I. De plus $AB=\sqrt{16+4+16}=6$, donc $\dfrac{AB}{2}=3$ est bien le rayon.

3.

Vérifie que $C(3;3;2)$ appartient à (S). Que peux-tu en déduire pour le triangle ABC ?

INDICE

Si $C \in (S)$, alors $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$.

CORRIGÉ

Appartenance. $(3-1)^2 + (3-1)^2 + (2-3)^2 = 4 + 4 + 1 = 9$, donc $C \in (S)$, c'est-à-dire $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$.

Vérification directe. $\overrightarrow{CA}(-4;-1;3)$ et $\overrightarrow{CB}(0;-3;-1)$, donc $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 + 3 - 3 = 0$.

Conclusion. Le point C appartient à (S). Les vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$, non nuls, sont orthogonaux : le triangle ABC est **rectangle en** C.

4.

Donne une équation du plan tangent à (S) en C.

INDICE

Vecteur normal : $\overrightarrow{IC}$.

CORRIGÉ

Le plan tangent à (S) en C passe par $C(3;3;2)$ et admet $\overrightarrow{IC}(2;2;-1)$ pour vecteur normal. Un point $M(x;y;z)$ lui appartient si et seulement si $\overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{CM} = 0$. Or :

$$\begin{aligned} &2(x-3) + 2(y-3) - (z-2) \\ &= 2x + 2y - z - 10. \end{aligned}$$

Contrôle. La distance de I à ce plan vaut $\dfrac{|2+2-3-10|}{\sqrt{4+4+1}} = \dfrac{9}{3} = 3$, le rayon.

Conclusion. Le plan tangent à (S) en C a pour équation $2x + 2y - z - 10 = 0$.

5.

Écris une représentation paramétrique de (S). Quels points obtient-on pour $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, puis pour $\varphi = \pi$ (quel que soit θ) ?

INDICE

Centre $I(1;1;3)$, rayon 3 ; rappelle-toi $\cos\pi = -1$ et $\sin\pi = 0$.

CORRIGÉ

Représentation paramétrique. La sphère (S) a pour centre $I(1;1;3)$ et pour rayon 3 :

$$(S) : \begin{cases} x = 1 + 3\cos\theta\sin\varphi \\ y = 1 + 3\sin\theta\sin\varphi \\ z = 3 + 3\cos\varphi \end{cases}$$

où θ et φ décrivent $\mathbb{R}$.

Premier point. Pour $\theta = \varphi = \dfrac{\pi}{2}$: $\cos\theta = \cos\varphi = 0$ et $\sin\theta = \sin\varphi = 1$, d'où le point $(1;4;3)$.

Second point. Pour $\varphi = \pi$: $\sin\varphi = 0$ et $\cos\varphi = -1$, d'où le point $(1;1;0)$, le même pour tout réel θ.

Contrôle. $0 + 9 + 0 = 9$ pour $(1;4;3)$ et $0 + 0 + 9 = 9$ pour $(1;1;0)$: les deux points sont sur (S).

Conclusion. On obtient le point $(1;4;3)$, puis, pour $\varphi = \pi$, le point $(1;1;0)$ quel que soit θ.

Exercice 6

Plans parallèles, plans perpendiculaires, famille de plans

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit (P) le plan d'équation $2x - 3y + 6z - 7 = 0$, de vecteur normal $\vec{n}(2; -3; 6)$.

1.

Montre que le plan $(Q) : -4x + 6y - 12z + 5 = 0$ est parallèle à (P) et distinct de (P).

INDICE

Compare les vecteurs normaux, puis teste un point de (P) dans l'équation de (Q).

CORRIGÉ

Parallélisme. Un vecteur normal de (Q) est $\vec{n}_Q(-4; 6; -12)$, et $\vec{n}_Q = -2\,\vec{n}$. Les vecteurs normaux sont colinéaires, donc (Q) est parallèle à (P).

Plans distincts. Le point $E(2; -1; 0)$ appartient à (P), car $4 + 3 + 0 - 7 = 0$, mais pas à (Q), car $-8 - 6 - 0 + 5 = -9 \neq 0$.

Conclusion. Le plan (Q) est parallèle à (P) et distinct de (P).

2.

Montre que tous les points de (Q) sont à la distance $\dfrac{9}{14}$ de (P).

INDICE

Prends un point $M(x; y; z)$ de (Q) : son équation donne la valeur de $2x - 3y + 6z$, à reporter dans la formule de $d(M, (P))$.

CORRIGÉ

Une relation sur les points de (Q). Soit $M(x; y; z)$ un point de $(Q) : -4x + 6y - 12z + 5 = 0$. En divisant par -2, on obtient $2x - 3y + 6z = \dfrac{5}{2}$.

Distance. On a $\|\vec{n}\| = \sqrt{4 + 9 + 36} = 7$, donc :

$$\begin{aligned} & d(M, (P)) \\ &= \frac{|2x - 3y + 6z - 7|}{7} \\ &= \frac{\left|\dfrac{5}{2} - 7\right|}{7} \\ &= \frac{9}{2} \times \frac{1}{7} = \frac{9}{14}. \end{aligned}$$

Contrôle. Avec $E \in (P)$: $\|\vec{n}_Q\| = \sqrt{16 + 36 + 144} = 14$ et $d(E, (Q)) = \dfrac{|-8 - 6 - 0 + 5|}{14} = \dfrac{9}{14}$.

Conclusion. Tous les points de (Q) sont à la distance $\dfrac{9}{14}$ de (P).

3.

Détermine le projeté orthogonal H de l'origine O sur (P), puis vérifie que $OH = d(O,(P))$.

INDICE

La droite passant par O et dirigée par $\vec{n}$ est formée des points $(2t;-3t;6t)$.

CORRIGÉ

Paramètre de H. La droite passant par O et dirigée par $\vec{n}$ est formée des points $(2t;-3t;6t)$, où $t \in \mathbb{R}$. Un tel point appartient à (P) si et seulement si :

$$\begin{aligned} 2(2t) - 3(-3t) + 6(6t) \\ - 7 = 0, \end{aligned}$$

c'est-à-dire $49t = 7$, soit $t = \dfrac{1}{7}$.

Coordonnées et distance. On obtient $H\left(\dfrac{2}{7};-\dfrac{3}{7};\dfrac{6}{7}\right)$. Comme $\overrightarrow{OH} = \dfrac{1}{7}\,\vec{n}$ et $\|\vec{n}\| = 7$:

$$OH = \frac{1}{7} \times 7 = 1.$$

Contrôle. $d(O,(P)) = \dfrac{|-7|}{7} = 1$.

Conclusion. Le projeté orthogonal de O sur (P) est $H\left(\dfrac{2}{7};-\dfrac{3}{7};\dfrac{6}{7}\right)$, et $OH = d(O,(P)) = 1$.

4.

Soit (D) la droite de représentation paramétrique $x = 3t$, $y = 1$, $z = 2 - t$ ($t \in \mathbb{R}$). Montre que (D) est parallèle à (P) sans être contenue dans (P).

INDICE

Une droite est parallèle à un plan quand son vecteur directeur est orthogonal au vecteur normal.

CORRIGÉ

Direction. Un vecteur directeur de (D) est $\vec{u}(3;0;-1)$, et $\vec{u}\cdot\vec{n} = 6 + 0 - 6 = 0$: $\vec{u}$ est orthogonal au vecteur normal de (P), donc (D) est parallèle à (P).

Un point. Le point $(0;1;2)$ de (D), de paramètre 0, donne $0 - 3 + 12 - 7 = 2 \neq 0$: il n'appartient pas à (P).

Conclusion. La droite (D) est parallèle à (P) sans être contenue dans (P).

5.

Montre que le plan $(R) : 2y + z - 1 = 0$ est perpendiculaire à (P).

INDICE

Calcule le produit scalaire des deux vecteurs normaux.

CORRIGÉ

Un vecteur normal de (R) est $\vec{n}_R(0;2;1)$, et $\vec{n}\cdot\vec{n}_R = 0 - 6 + 6 = 0$. Deux plans dont les vecteurs normaux sont orthogonaux sont perpendiculaires.

Conclusion. Les plans (P) et (R) sont perpendiculaires.

6.

Pour tout réel m, on note (P_m) le plan d'équation $2x - 3y + 6z + m = 0$. Détermine les valeurs de m pour lesquelles la distance du point $K(1;1;1)$ à (P_m) vaut 2.

INDICE

Écris la distance en fonction de m ; une équation $|X| = a$, avec $a > 0$, a deux solutions : $X = a$ ou $X = -a$.

CORRIGÉ

Distance en fonction de m. Soit m un réel. Le plan (P_m) admet $\vec{n}$ pour vecteur normal, de norme 7, donc :

$$\begin{aligned} d(K,(P_m)) &= \frac{|2 - 3 + 6 + m|}{7} \\ &= \frac{|5 + m|}{7}. \end{aligned}$$

Équation. $d(K,(P_m)) = 2$ équivaut à $|5 + m| = 14$, c'est-à-dire $5 + m = 14$ ou $5 + m = -14$.

Conclusion. La distance de K à (P_m) vaut 2 pour $m = 9$ ou $m = -19$: deux plans de la famille conviennent.