BURHAN

Géométrie dans l'espace : exercices, application

2ème Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-experimentales/mathematiques/geometrie-dans-l-espace/exercices/application

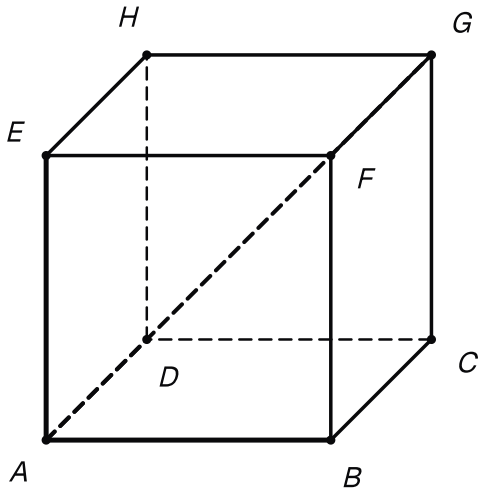
Chapitre	Palier	Exercices
Géométrie dans l'espace	Application	9

Exercice 1

Produit scalaire sans coordonnées : normes, angle et cube

Les questions 1 et 2 portent sur deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace tels que $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 4$, l'angle géométrique formé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ mesurant $\frac{\pi}{3}$. Les questions 3 à 5 portent sur un cube $ABCDEFGH$ d'arête 2, posé sur une table. Pour situer ses huit sommets :

- **étage du bas** : la face $ABCD$, un carré parcouru dans cet ordre, donc A et C sont opposés, ainsi que B et D ;
- **étage du haut** : la face $EFGH$, avec E juste au-dessus de A, F au-dessus de B, G au-dessus de C et H au-dessus de D ;
- les quatre arêtes verticales $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$ et $[DH]$ sont perpendiculaires aux deux faces, et $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{DH}$.



Le cube ABCDEFGH d'arête 2 des questions 3 à 5 : face ABCD sur la table, E au-dessus de A, et la grande diagonale [AG].

1.

Calcule $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

INDICE

Tu connais les deux normes et l'angle : quelle formule de 1BAC les relie au produit scalaire ?

2.

Calcule $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2$ puis $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2$. Donne $\|\vec{u} + \vec{v}\|$.

INDICE

Écris $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v})$, puis développe comme une identité remarquable.

3.

Calcule $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG}$.

INDICE

Projette le point G orthogonalement sur la droite (AB) : où tombe-t-il ?

4.

En écrivant $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG}$, calcule $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BG}$.

INDICE

Remplace $\overrightarrow{BC}$ par $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{CG}$ par $\overrightarrow{AE}$, puis distribue.

5.

Les droites (AB) et (EH) sont-elles orthogonales ? Sont-elles sécantes ?

INDICE

Compare $\overrightarrow{EH}$ à un vecteur de la face $ABCD$, puis regarde si les deux droites sont dans un même plan.

Exercice 2

Un triangle rectangle repéré par ses coordonnées

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne les points $K(1; 3; -2)$, $L(3; 1; -1)$ et $M(4; 7; 0)$.

1.

Calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{KL}$ et $\overrightarrow{KM}$.

INDICE

Coordonnées de l'extrémité moins coordonnées de l'origine, composante par composante.

2.

Calcule $\overrightarrow{KL} \cdot \overrightarrow{KM}$. Que peux-tu dire du triangle KLM ?

INDICE

Le repère est orthonormé : multiplie les composantes deux à deux et additionne. Le résultat est un nombre.

3.

Calcule les longueurs KL, KM et LM, puis vérifie l'égalité de Pythagore.

INDICE

$KL = \|\overrightarrow{KL}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; pour LM, calcule d'abord $\overrightarrow{LM}$.

4.

Soit a un réel et $\vec{w}(a; 1; -4)$. Détermine a pour que $\vec{w}$ soit orthogonal à $\overrightarrow{KL}$.

INDICE

Écris la condition $\vec{w} \cdot \overrightarrow{KL} = 0$: c'est une équation du premier degré en a.

Exercice 3

Vecteur normal et équation cartésienne d'un plan

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1.

Détermine une équation cartésienne du plan (P) qui passe par $E(3; 0; -2)$ et admet $\vec{n}(1; -3; 2)$ pour vecteur normal.

INDICE

Prends $M(x; y; z)$ et traduis « $\overrightarrow{EM}$ est orthogonal à $\vec{n}$ » par un produit scalaire nul.

2.

On considère le plan $(Q) : 4x - y + 2z - 5 = 0$. Donne un vecteur normal à (Q). Les points $F(1; 1; 1)$ et $G(2; 0; 1)$ appartiennent-ils à (Q) ?

INDICE

Les coefficients de x, y, z forment un vecteur normal. Pour un point, remplace et regarde si tu trouves 0.

3.

Soient $J(1; 1; 0)$ et $\vec{u}(1; 1; -1)$. Détermine l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que $\vec{u} \cdot \overrightarrow{JM} = 3$.

INDICE

Calcule $\vec{u} \cdot \overrightarrow{JM}$ en fonction de x, y, z : tu obtiens une équation du premier degré.

4.

Le vecteur $\vec{w}(1; 1; 1)$ est-il normal au plan (P) de la question 1 ? Est-il un vecteur de (P) ?

INDICE

Compare $\vec{w}$ à $\vec{n}(1; -3; 2)$: sont-ils colinéaires ? Calcule aussi $\vec{n} \cdot \vec{w}$.

Exercice 4

Distance à un plan, de deux façons

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit (P) le plan d'équation $2x + y - 2z + 3 = 0$.

1.

Calcule la distance de l'origine O au plan (P).

INDICE

Formule : $\dfrac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$. Ici $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ se simplifie bien.

2.

Calcule $d(N, (P))$ pour $N(0; -1; 2)$.

INDICE

Le numérateur est négatif avant la valeur absolue : une distance, elle, ne l'est jamais.

3.

Calcule $d(M, (P))$ pour $M(5; 3; -1)$.

INDICE

Même formule ; vérifie le signe du terme $-2z$ avec $z = -1$.

4.

Donne une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par M et orthogonale à (P).

INDICE

Une droite orthogonale à (P) a pour vecteur directeur un vecteur normal de (P).

5.

Détermine les coordonnées du projeté orthogonal H de M sur (P), puis calcule la longueur MH. Compare avec la question 3.

INDICE

Reporte x, y, z de (Δ) dans l'équation de (P) : tu obtiens une équation du premier degré en t.

Exercice 5

Reconnaître et écrire une sphère

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Les questions sont indépendantes, sauf la dernière qui reprend la sphère de la question 1.

1.

Écris une équation cartésienne de la sphère (S) de centre $\Omega(2; -1; 0)$ et de rayon 3, puis développe-la.

INDICE

$M \in (S)$ équivaut à $\Omega M^2 = 9$. Écris ΩM^2 avec les coordonnées.

2.

Montre que l'ensemble (S') des points $M(x; y; z)$ tels que $x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 2y - 4z - 11 = 0$ est une sphère dont tu donneras le centre et le rayon.

INDICE

Regroupe $x^2 + 6x$, puis $y^2 - 2y$, puis $z^2 - 4z$, et complète chaque carré.

3.

Quel est l'ensemble (E) des points $M(x; y; z)$ tels que $x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 8z + 20 = 0$?

INDICE

Complète les carrés, puis regarde le signe du nombre obtenu à droite.

4.

Soient $A(1; 4; -2)$ et $B(3; 0; 2)$. Reconnais l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$, et précise son centre et son rayon.

INDICE

Pour $M(x; y; z)$, écris les coordonnées de $\overrightarrow{MA}$ et de $\overrightarrow{MB}$, développe $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ en coordonnées, puis complète les carrés comme à la question 2.

5.

Écris une représentation paramétrique de la sphère (S) de la question 1. Quel point obtient-on pour $\theta = 0$ et $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$? Vérifie qu'il est sur (S).

INDICE

Le modèle est $x = x_0 + R\cos\theta\sin\varphi$, $y = y_0 + R\sin\theta\sin\varphi$, $z = z_0 + R\cos\varphi$, avec ici $R = 3$.

Exercice 6

Une sphère et trois plans

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit (S) la sphère de centre $\Omega(-1; 2; 1)$ et de rayon $R = 5$. On considère les plans :

- $(P_1) : 2x + y + 2z + 7 = 0$;
- $(P_2) : 3x + 4z - 26 = 0$;
- $(P_3) : 2x + 2y - z + 16 = 0$.

1.

Calcule $d(\Omega, (P_1))$ et déduis-en la position de (P_1) par rapport à (S).

INDICE

Calcule la distance, puis compare-la à $R = 5$.

2.

Calcule le rayon r de ce cercle.

INDICE

Le centre de la sphère, le centre du cercle et un point du cercle forment un triangle rectangle.

3.

Détermine les coordonnées du centre H_1 de ce cercle.

INDICE

H_1 est le projeté orthogonal de Ω sur (P_1) : passe par la droite issue de Ω dirigée par $\vec{n}_1(2; 1; 2)$.

4.

Montre que (P_2) est tangent à (S) et détermine le point de contact T.

INDICE

Ici $\vec{n}_2(3; 0; 4)$ a pour norme 5. Le point de contact est le projeté orthogonal de Ω sur (P_2).

5.

Le plan (P_3) a-t-il des points communs avec (S) ?

INDICE

Compare $d(\Omega, (P_3))$ et 5 ; pour comparer une fraction à 5, écris $5 = \dfrac{15}{3}$.

6.

Vérifie que $V(3; 5; 1)$ appartient à (S), puis donne une équation du plan tangent à (S) en V.

INDICE

Le plan tangent en V passe par V et admet $\overrightarrow{\Omega V}$ pour vecteur normal.

Exercice 7

Une sphère et trois droites

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit (S) la sphère d'équation $(x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 9$, de centre $\Omega(1; -1; 0)$ et de rayon 3. On considère les droites suivantes, où t décrit $\mathbb{R}$:

$$(D_1) : \begin{cases} x = 3 - 3t \\ y = 1 \\ z = 1 + t \end{cases}$$

$$(D_2) : \begin{cases} x = 4 + t \\ y = 0 \\ z = 1 - t \end{cases}$$

$$(D_3) : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 - t \\ z = 4 \end{cases}$$

1.

Détermine les points communs à (D_1) et à (S).

INDICE

Remplace x, y, z par leurs expressions en t dans l'équation de (S), développe, puis résous.

2.

Montre que (D_2) est tangente à (S) et précise le point de contact.

INDICE

Après report, calcule le discriminant Δ de l'équation du second degré obtenue. Rappel : si $\Delta > 0$, deux solutions, donc deux points communs ; si $\Delta = 0$, une seule solution, donc un point de contact (droite tangente) ; si $\Delta < 0$, aucune solution, donc aucun point commun.

3.

La droite (D_3) coupe-t-elle (S) ?

INDICE

Même méthode ; le signe du discriminant répond à la question : $\Delta > 0$, deux points ; $\Delta = 0$, un point ; $\Delta < 0$, aucun point.

Exercice 8

Orientation et premiers produits vectoriels

Le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthonormé direct. On donne $\vec{u}(2; 1; -1)$ et $\vec{v}(1; 3; 2)$.

1.

Les bases $(\vec{k}, \vec{j}, \vec{i})$ et $(-\vec{i}, -\vec{j}, \vec{k})$ sont-elles directes ?

INDICE

Place le bonhomme d'Ampère debout selon le troisième vecteur, regardant vers le premier : le deuxième est-il à sa gauche ?

2.

Calcule les coordonnées de $\vec{u} \wedge \vec{v}$, puis contrôle ton résultat.

INDICE

Écris les deux vecteurs en colonnes. Cache la ligne des x pour la première composante, celle des y pour la deuxième (sans oublier le signe moins), celle des z pour la troisième.

3.

Sans nouveau calcul de déterminant, donne $\vec{v} \wedge \vec{u}$ et $(2\vec{u}) \wedge \vec{v}$.

INDICE

Échanger les deux facteurs change le signe ; un facteur réel sort du produit vectoriel.

4.

Soient $\vec{a}(2; -4; 6)$ et $\vec{b}(-3; 6; -9)$. Calcule $\vec{a} \wedge \vec{b}$. Que peux-tu en conclure ?

INDICE

Si tu trouves le vecteur nul, pense à la propriété qui relie produit vectoriel nul et colinéarité.

Exercice 9

Aire, plan et distance à une droite par le produit vectoriel

Le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthonormé direct. On donne les points $A(0;1;3)$, $B(1;1;5)$ et $C(2;-1;3)$.

1.

Calcule $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ puis $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$. Les points A, B, C sont-ils alignés ?

INDICE

Trois points sont alignés exactement quand $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{0}$.

2.

Calcule l'aire du triangle ABC.

INDICE

L'aire du triangle est la moitié de la norme de $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

3.

Déduis-en une équation cartésienne du plan (ABC).

INDICE

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est normal au plan ; tu peux le diviser par 2 pour simplifier.

4.

Calcule la distance du point C à la droite (AB), puis retrouve l'aire de la question 2.

INDICE

$d(C,(AB)) = \dfrac{\left\|\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AB}\right\|}{AB}$, et l'aire d'un triangle vaut base fois hauteur sur 2.