BURHAN

Géométrie dans l'espace : exercices, application

2ème Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-experimentales/mathematiques/geometrie-dans-l-espace/exercices/application

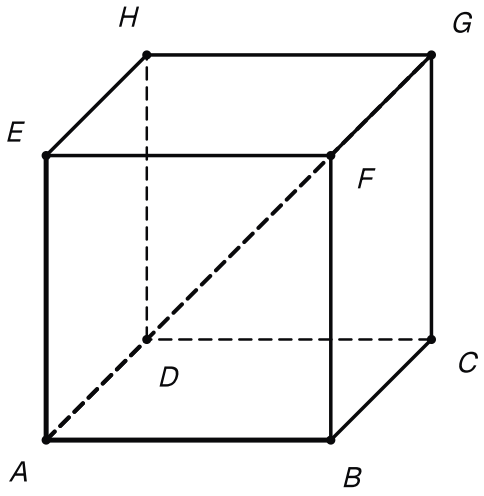
Chapitre	Palier	Exercices
Géométrie dans l'espace	Application	9

Exercice 1

Produit scalaire sans coordonnées : normes, angle et cube

Les questions 1 et 2 portent sur deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace tels que $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 4$, l'angle géométrique formé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ mesurant $\frac{\pi}{3}$. Les questions 3 à 5 portent sur un cube $ABCDEFGH$ d'arête 2, posé sur une table. Pour situer ses huit sommets :

- **étage du bas** : la face $ABCD$, un carré parcouru dans cet ordre, donc A et C sont opposés, ainsi que B et D ;
- **étage du haut** : la face $EFGH$, avec E juste au-dessus de A, F au-dessus de B, G au-dessus de C et H au-dessus de D ;
- les quatre arêtes verticales $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$ et $[DH]$ sont perpendiculaires aux deux faces, et $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{DH}$.



Le cube ABCDEFGH d'arête 2 des questions 3 à 5 : face ABCD sur la table, E au-dessus de A, et la grande diagonale [AG].

1.

Calcule $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

INDICE

Tu connais les deux normes et l'angle : quelle formule de 1BAC les relie au produit scalaire ?

CORRIGÉ

On connaît les normes des deux vecteurs et une mesure de leur angle. D'après l'expression du produit scalaire à l'aide du cosinus :

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\frac{\pi}{3} \\ &= 3 \times 4 \times \frac{1}{2} = 6.\end{aligned}$$

Conclusion. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 6$.

2.

Calcule $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2$ puis $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2$. Donne $\|\vec{u} + \vec{v}\|$.

INDICE

Écris $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v})$, puis développe comme une identité remarquable.

CORRIGÉ

Développement. Le carré scalaire d'un vecteur est le carré de sa norme. Par bilinéarité et symétrie du produit scalaire :

$$\begin{aligned}&\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 \\ &= \|\vec{u}\|^2 + 2\,\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \\ &= 9 + 12 + 16 = 37.\end{aligned}$$

Différence. De la même façon :

$$\begin{aligned}&\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 \\ &= \|\vec{u}\|^2 - 2\,\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \\ &= 9 - 12 + 16 = 13.\end{aligned}$$

Norme. Une norme est un nombre positif, donc $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \sqrt{37}$.

Conclusion. $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = 37$, $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 13$ et $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \sqrt{37}$.

3.

Calcule $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG}$.

INDICE

Projette le point G orthogonalement sur la droite (AB) : où tombe-t-il ?

CORRIGÉ

Le vecteur $\overrightarrow{BG}$. On a $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG}$. Le vecteur $\overrightarrow{BC}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$, car $ABCD$ est un carré ; le vecteur $\overrightarrow{CG}$ l'est aussi, car l'arête $[CG]$ est perpendiculaire à la face $ABCD$. Donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BG} = 0$.

Calcul. D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG}$. Par bilinéarité :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG} &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + 0 \\ &= AB^2 = 2^2 = 4.\end{aligned}$$

Autrement dit, le projeté orthogonal de G sur la droite (AB) est le point B.

Conclusion. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG} = 4$.

4.

En écrivant $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG}$, calcule $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BG}$.

INDICE

Remplace $\overrightarrow{BC}$ par $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{CG}$ par $\overrightarrow{AE}$, puis distribue.

CORRIGÉ

Réécriture de $\overrightarrow{BG}$. Dans le cube, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AE}$, donc $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$.

Un produit nul. L'arête $[AE]$ est perpendiculaire à la face $ABCD$, qui contient $[AD]$: $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$.

Calcul. Par bilinéarité :

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BG} \\ &= \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AE} \\ &= 0 + AE^2 = 4.\end{aligned}$$

Conclusion. $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BG} = 4$.

5.

Les droites (AB) et (EH) sont-elles orthogonales ? Sont-elles sécantes ?

INDICE

Compare $\overrightarrow{EH}$ à un vecteur de la face $ABCD$, puis regarde si les deux droites sont dans un même plan.

CORRIGÉ

Orthogonalité. On a $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AD}$, donc :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0.$$

Les droites (AB) et (EH) sont donc **orthogonales**.

Position relative. La droite (AB) est dans le plan de la face du bas, la droite (EH) dans celui de la face du haut. Ces deux plans sont parallèles et distincts : les deux droites n'ont aucun point commun, elles ne se coupent pas.

Conclusion. Les droites (AB) et (EH) sont orthogonales, mais elles ne sont pas sécantes. Dans l'espace, deux droites orthogonales ne sont pas forcément sécantes.

Exercice 2

Un triangle rectangle repéré par ses coordonnées

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne les points $K(1;3;-2)$, $L(3;1;-1)$ et $M(4;7;0)$.

1.

Calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{KL}$ et $\overrightarrow{KM}$.

INDICE

Coordonnées de l'extrémité moins coordonnées de l'origine, composante par composante.

CORRIGÉ

Les coordonnées d'un vecteur s'obtiennent en retranchant les coordonnées de son origine à celles de son extrémité :

$$\overrightarrow{KL}(3-1;1-3;-1+2),$$
$$\overrightarrow{KM}(4-1;7-3;0+2).$$

Conclusion. $\overrightarrow{KL}(2;-2;1)$ et $\overrightarrow{KM}(3;4;2)$.

2.

Calcule $\overrightarrow{KL}\cdot\overrightarrow{KM}$. Que peux-tu dire du triangle KLM ?

INDICE

Le repère est orthonormé : multiplie les composantes deux à deux et additionne. Le résultat est un nombre.

CORRIGÉ

Produit scalaire. Le repère est orthonormé, donc on multiplie les coordonnées deux à deux et on additionne :

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{KL}\cdot\overrightarrow{KM}\\&=2\times 3+(-2)\times 4+1\times 2\\&=6-8+2=0.\end{aligned}$$

Triangle. Aucun des vecteurs $\overrightarrow{KL}$ et $\overrightarrow{KM}$ n'est nul, et leur produit scalaire est nul. Les points K, L, M forment donc un triangle, et les droites (KL) et (KM) sont perpendiculaires en K.

Conclusion. $\overrightarrow{KL}\cdot\overrightarrow{KM}=0$: le triangle KLM est **rectangle en** K.

3.

Calcule les longueurs KL, KM et LM, puis vérifie l'égalité de Pythagore.

INDICE

$KL = \|\overrightarrow{KL}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$; pour LM, calcule d'abord $\overrightarrow{LM}$.

CORRIGÉ

Longueurs KL et KM. Ce sont les normes des vecteurs de la question 1 :

$$KL = \sqrt{4+4+1} = 3,$$
$$KM = \sqrt{9+16+4} = \sqrt{29}.$$

Longueur LM. On a $\overrightarrow{LM}(1;6;1)$, donc :

$$LM = \sqrt{1+36+1} = \sqrt{38}.$$

Égalité de Pythagore. $KL^2 + KM^2 = 9 + 29 = 38$, et $LM^2 = 38$.

Conclusion. $KL = 3$, $KM = \sqrt{29}$, $LM = \sqrt{38}$ et $KL^2 + KM^2 = LM^2$: c'est l'égalité de Pythagore du triangle KLM, rectangle en K et d'hypoténuse $[LM]$.

4.

Soit a un réel et $\vec{w}(a;1;-4)$. Détermine a pour que $\vec{w}$ soit orthogonal à $\overrightarrow{KL}$.

INDICE

Écris la condition $\vec{w}\cdot\overrightarrow{KL} = 0$: c'est une équation du premier degré en a.

CORRIGÉ

Le repère est orthonormé. Le vecteur $\vec{w}$ est orthogonal à $\overrightarrow{KL}$ si et seulement si leur produit scalaire est nul. Or :

$$\begin{aligned}\vec{w}\cdot\overrightarrow{KL} &= 2a + 1\times(-2) + (-4)\times 1\\ &= 2a - 6.\end{aligned}$$

La condition $\vec{w}\cdot\overrightarrow{KL} = 0$ équivaut donc à $2a - 6 = 0$, c'est-à-dire $a = 3$.

Conclusion. Le vecteur $\vec{w}$ est orthogonal à $\overrightarrow{KL}$ pour $a = 3$, et seulement pour cette valeur : $\vec{w}(3;1;-4)$.

Exercice 3

Vecteur normal et équation cartésienne d'un plan

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1.

Détermine une équation cartésienne du plan (P) qui passe par $E(3;0;-2)$ et admet $\vec{n}(1;-3;2)$ pour vecteur normal.

INDICE

Prends $M(x;y;z)$ et traduis « $\overrightarrow{EM}$ est orthogonal à $\vec{n}$ » par un produit scalaire nul.

CORRIGÉ

Soit $M(x;y;z)$ un point de l'espace ; on a $\overrightarrow{EM}(x-3;y;z+2)$. Le point M appartient à (P) si et seulement si $\overrightarrow{EM}$ est orthogonal à $\vec{n}$:

$$\begin{aligned} & M \in (P) \\ \iff & \vec{n} \cdot \overrightarrow{EM} = 0 \\ \iff & (x-3) - 3y \\ & \quad + 2(z+2) = 0 \\ \iff & x - 3y + 2z + 1 = 0. \end{aligned}$$

Contrôle. Avec E : $3 - 0 - 4 + 1 = 0$.

Conclusion. Une équation cartésienne du plan (P) est $x - 3y + 2z + 1 = 0$.

2.

On considère le plan (Q) : $4x - y + 2z - 5 = 0$. Donne un vecteur normal à (Q). Les points $F(1;1;1)$ et $G(2;0;1)$ appartiennent-ils à (Q) ?

INDICE

Les coefficients de x, y, z forment un vecteur normal. Pour un point, remplace et regarde si tu trouves 0.

CORRIGÉ

Vecteur normal. Dans l'équation de (Q), les coefficients de x, y et z sont 4, -1 et 2 : le vecteur $\vec{n}'(4;-1;2)$ est normal à (Q).

Appartenance. On remplace les coordonnées de chaque point dans le premier membre de l'équation :

- pour F : $4 - 1 + 2 - 5 = 0$, donc $F \in (Q)$;
- pour G : $8 - 0 + 2 - 5 = 5 \neq 0$, donc $G \notin (Q)$.

Conclusion. $\vec{n}'(4;-1;2)$ est normal à (Q) ; le point F appartient à (Q), le point G non.

3.

Soient $J(1;1;0)$ et $\vec{u}(1;1;-1)$. Détermine l'ensemble des points $M(x;y;z)$ tels que $\vec{u}\cdot\overrightarrow{JM}=3$.

INDICE

Calcule $\vec{u}\cdot\overrightarrow{JM}$ en fonction de x, y, z : tu obtiens une équation du premier degré.

CORRIGÉ

Soit $M(x;y;z)$; on a $\overrightarrow{JM}(x-1;y-1;z)$. Le repère est orthonormé, donc :

$$\begin{aligned}&\vec{u}\cdot\overrightarrow{JM}\\&=(x-1)+(y-1)-z\\&=x+y-z-2.\end{aligned}$$

La condition $\vec{u}\cdot\overrightarrow{JM}=3$ équivaut à $x+y-z-2=3$, c'est-à-dire :

$$x+y-z-5=0.$$

Conclusion. L'ensemble cherché est le **plan** d'équation $x+y-z-5=0$; il admet $\vec{u}$ pour vecteur normal.

4.

Le vecteur $\vec{w}(1;1;1)$ est-il normal au plan (P) de la question 1 ? Est-il un vecteur de (P) ?

INDICE

Compare $\vec{w}$ à $\vec{n}(1;-3;2)$: sont-ils colinéaires ? Calcule aussi $\vec{n}\cdot\vec{w}$.

CORRIGÉ

Vecteur normal ? Si $\vec{w}$ était colinéaire à $\vec{n}$, il existerait un réel α tel que $\vec{w}=\alpha\vec{n}$. La première coordonnée donnerait $\alpha=1$, puis la deuxième $1=-3\alpha=-3$, ce qui est faux. Les vecteurs $\vec{w}$ et $\vec{n}$ ne sont pas colinéaires : $\vec{w}$ n'est **pas** normal à (P).

Vecteur de (P) ? Le repère est orthonormé et $\vec{n}\cdot\vec{w}=1-3+2=0$. Le vecteur $\vec{w}$ est orthogonal au vecteur normal $\vec{n}$: c'est un vecteur directeur du plan (P).

Conclusion. $\vec{w}$ n'est pas normal à (P) ; c'est un **vecteur de** (P).

Exercice 4

Distance à un plan, de deux façons

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit (P) le plan d'équation $2x + y - 2z + 3 = 0$.

1.

Calcule la distance de l'origine O au plan (P).

INDICE

Formule : $\dfrac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$. Ici $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ se simplifie bien.

CORRIGÉ

On applique la formule de la distance d'un point à un plan. Le dénominateur vaut :

$$\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3.$$

Pour l'origine $O(0;0;0)$:

$$\begin{aligned} d(O,(P)) &= \frac{|0 + 0 - 0 + 3|}{3} \\ &= \frac{3}{3} = 1. \end{aligned}$$

Conclusion. La distance de O au plan (P) vaut 1.

2.

Calcule $d(N,(P))$ pour $N(0;-1;2)$.

INDICE

Le numérateur est négatif avant la valeur absolue : une distance, elle, ne l'est jamais.

CORRIGÉ

Avec $N(0;-1;2)$ et le dénominateur 3 de la question 1 :

$$\begin{aligned} &d(N,(P)) \\ &= \frac{|2 \times 0 + (-1) - 2 \times 2 + 3|}{3} \\ &= \frac{|-2|}{3} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Sans la valeur absolue, on trouverait $-\dfrac{2}{3}$, ce qui n'a pas de sens pour une distance.

Conclusion. $d(N,(P)) = \dfrac{2}{3}$.

3.

Calcule $d(M,(P))$ pour $M(5;3;-1)$.

INDICE

Même formule ; vérifie le signe du terme $-2z$ avec $z=-1$.

CORRIGÉ

Avec $M(5;3;-1)$, en faisant attention au terme $-2z$ pour $z=-1$:

$$\begin{aligned} & d(M,(P)) \\ &= \frac{|2\times 5+3-2\times(-1)+3|}{3} \\ &= \frac{|10+3+2+3|}{3} \\ &= \frac{18}{3}=6. \end{aligned}$$

Conclusion. $d(M,(P))=6$.

4.

Donne une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par M et orthogonale à (P).

INDICE

Une droite orthogonale à (P) a pour vecteur directeur un vecteur normal de (P).

CORRIGÉ

Une droite orthogonale au plan (P) est dirigée par un vecteur normal de (P). Les coefficients de l'équation donnent $\vec{n}(2;1;-2)$, et la droite (Δ) passe par $M(5;3;-1)$.

Conclusion. Une représentation paramétrique de (Δ) est :

$$\begin{cases} x=5+2t \\ y=3+t \\ z=-1-2t \end{cases} \qquad (t\in\mathbb{R}).$$

5.

Détermine les coordonnées du projeté orthogonal H de M sur (P), puis calcule la longueur MH. Compare avec la question 3.

INDICE

Reporte x, y, z de (Δ) dans l'équation de (P) : tu obtiens une équation du premier degré en t.

CORRIGÉ

Paramètre de H. Le point H est le point commun à (Δ) et à (P). Pour le point de (Δ) de paramètre t, le premier membre de l'équation de (P) vaut :

$$\begin{aligned} &2(5+2t)+(3+t) \\ &\quad -2(-1-2t)+3 \\ &=18+9t. \end{aligned}$$

Ce point est dans (P) si et seulement si $18+9t=0$, c'est-à-dire $t=-2$.

Coordonnées de H. Pour $t=-2$: $H(5-4;3-2;-1+4)$, soit $H(1;1;3)$. **Contrôle** : $2+1-6+3=0$.

Longueur MH. On a $\overrightarrow{MH}(-4;-2;4)$, donc :

$$\begin{aligned} MH &= \sqrt{16+4+16} \\ &= \sqrt{36}=6. \end{aligned}$$

Conclusion. $H(1;1;3)$ et $MH=6$: on retrouve $d(M,(P))$, calculée à la question 3.

Exercice 5

Reconnaître et écrire une sphère

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Les questions sont indépendantes, sauf la dernière qui reprend la sphère de la question 1.

1.

Écris une équation cartésienne de la sphère (S) de centre $\Omega(2; -1; 0)$ et de rayon 3, puis développe-la.

INDICE

$M \in (S)$ équivaut à $\Omega M^2 = 9$. Écris ΩM^2 avec les coordonnées.

CORRIGÉ

Équation. Soit $M(x; y; z)$. Le point M appartient à (S) si et seulement si $\Omega M = 3$, c'est-à-dire $\Omega M^2 = 9$, car une distance est positive. Le repère est orthonormé, donc $M \in (S)$ équivaut à :

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 9.$$

Forme développée. On développe $(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$ et $(y+1)^2 = y^2 + 2y + 1$, puis on regroupe les constantes : $4 + 1 - 9 = -4$.

Conclusion. (S) : $(x-2)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 9$, soit, après développement, (S) : $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 4 = 0$.

2.

Montre que l'ensemble (S') des points $M(x; y; z)$ tels que $x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 2y - 4z - 11 = 0$ est une sphère dont tu donneras le centre et le rayon.

INDICE

Regroupe $x^2 + 6x$, puis $y^2 - 2y$, puis $z^2 - 4z$, et complète chaque carré.

CORRIGÉ

Complétion des carrés. On regroupe les termes de chaque variable :

$$x^2 + 6x = (x+3)^2 - 9,$$
$$y^2 - 2y = (y-1)^2 - 1,$$
$$z^2 - 4z = (z-2)^2 - 4.$$

Équation réduite. L'équation de (S') équivaut donc à :

$$(x+3)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 9 + 1 + 4 + 11 = 25.$$

Conclusion. Comme $25 > 0$, (S') est la sphère de centre $\Omega'(-3; 1; 2)$ et de rayon $\sqrt{25} = 5$.

3.

Quel est l'ensemble (E) des points $M(x;y;z)$ tels que $x^2+y^2+z^2-2y+8z+20=0$?

INDICE

Complète les carrés, puis regarde le signe du nombre obtenu à droite.

CORRIGÉ

Complétion des carrés. $y^2-2y=(y-1)^2-1$ et $z^2+8z=(z+4)^2-16$. L'équation de (E) équivaut donc à :

$$\begin{aligned} &x^2+(y-1)^2+(z+4)^2 \\ &=1+16-20=-3. \end{aligned}$$

Signe. Pour tout point $M(x;y;z)$, le premier membre est une somme de trois carrés : il est positif ou nul, il ne vaut jamais -3.

Conclusion. Aucun point ne vérifie l'équation : l'ensemble (E) est **vide**, ce n'est pas une sphère.

4.

Soient $A(1;4;-2)$ et $B(3;0;2)$. Reconnais l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$, et précise son centre et son rayon.

INDICE

Pour $M(x;y;z)$, écris les coordonnées de $\overrightarrow{MA}$ et de $\overrightarrow{MB}$, développe $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$ en coordonnées, puis complète les carrés comme à la question 2.

CORRIGÉ

Produit scalaire en coordonnées. Soit $M(x;y;z)$; on a $\overrightarrow{MA}(1-x;4-y;-2-z)$ et $\overrightarrow{MB}(3-x;-y;2-z)$. Le repère est orthonormé, donc :

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} \\ &=(x-1)(x-3)+(y-4)y \\ &\quad+(z+2)(z-2) \\ &=x^2+y^2+z^2 \\ &\quad-4x-4y-1. \end{aligned}$$

Complétion des carrés. Avec $x^2-4x=(x-2)^2-4$ et $y^2-4y=(y-2)^2-4$, la condition $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ s'écrit $(x-2)^2-4+(y-2)^2-4+z^2-1=0$, c'est-à-dire :

$$(x-2)^2+(y-2)^2+z^2=9.$$

Conclusion. L'ensemble cherché est la sphère de centre $I(2;2;0)$ et de rayon 3.

Remarque. $I\left(\frac{1+3}{2};\frac{4+0}{2};\frac{-2+2}{2}\right)$ est le milieu de $[AB]$. De plus $\overrightarrow{AB}(2;-4;4)$, donc $AB=\sqrt{4+16+16}=6$ et le rayon vaut $\frac{AB}{2}=3$: c'est la sphère de diamètre $[AB]$.

5.

Écris une représentation paramétrique de la sphère (S) de la question 1. Quel point obtient-on pour $\theta = 0$ et $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$? Vérifie qu'il est sur (S).

INDICE

Le modèle est $x = x_0 + R\cos\theta\sin\varphi$, $y = y_0 + R\sin\theta\sin\varphi$, $z = z_0 + R\cos\varphi$, avec ici $R = 3$.

CORRIGÉ

Représentation paramétrique. La sphère (S) a pour centre $\Omega(2;-1;0)$ et pour rayon $R = 3$:

$$(S) : \begin{cases} x = 2 + 3\cos\theta\sin\varphi \\ y = -1 + 3\sin\theta\sin\varphi \\ z = 3\cos\varphi \end{cases}$$

où θ et φ décrivent $\mathbb{R}$.

Point demandé. Pour $\theta = 0$ et $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$: $\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$, $\sin\dfrac{\pi}{2} = 1$ et $\cos\dfrac{\pi}{2} = 0$. On obtient le point $(5;-1;0)$.

Contrôle. $(5-2)^2 + (-1+1)^2 + 0^2 = 9$.

Conclusion. Pour $\theta = 0$ et $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, on obtient le point $(5;-1;0)$, qui est bien sur (S).

Exercice 6

Une sphère et trois plans

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit (S) la sphère de centre $\Omega(-1; 2; 1)$ et de rayon $R = 5$. On considère les plans :

- $(P_1) : 2x + y + 2z + 7 = 0$;
- $(P_2) : 3x + 4z - 26 = 0$;
- $(P_3) : 2x + 2y - z + 16 = 0$.

1.

Calcule $d(\Omega, (P_1))$ et déduis-en la position de (P_1) par rapport à (S).

INDICE

Calcule la distance, puis compare-la à $R = 5$.

CORRIGÉ

D'après la formule de la distance d'un point à un plan :

$$\begin{aligned} & d(\Omega, (P_1)) \\ &= \frac{|2 \times (-1) + 2 + 2 \times 1 + 7|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} \\ &= \frac{9}{3} = 3. \end{aligned}$$

Conclusion. $d(\Omega, (P_1)) = 3$ et $3 < 5$: la distance du centre au plan est strictement inférieure au rayon, donc le plan (P_1) coupe la sphère (S) selon un **cercle**.

2.

Calcule le rayon r de ce cercle.

INDICE

Le centre de la sphère, le centre du cercle et un point du cercle forment un triangle rectangle.

CORRIGÉ

Notons $d = d(\Omega, (P_1)) = 3$, H_1 le centre du cercle et M un point du cercle. Le triangle $\Omega H_1 M$ est rectangle en H_1, avec $\Omega H_1 = d$ et $\Omega M = R$. D'après le théorème de Pythagore, $r^2 = R^2 - d^2$, donc :

$$r = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4.$$

Conclusion. Le rayon du cercle est $r = 4$. Attention : $R - d = 2$ n'est pas le rayon.

3.

Détermine les coordonnées du centre H_1 de ce cercle.

INDICE

H_1 est le projeté orthogonal de Ω sur (P_1) : passe par la droite issue de Ω dirigée par $\vec{n}_1(2;1;2)$.

CORRIGÉ

Droite utile. Le centre H_1 est le projeté orthogonal de Ω sur (P_1). La droite passant par Ω et dirigée par $\vec{n}_1(2;1;2)$ est formée des points $(-1+2t;2+t;1+2t)$, où $t \in \mathbb{R}$.

Paramètre de H_1. Un tel point appartient à (P_1) si et seulement si :

$$\begin{aligned} &2(-1+2t)+(2+t)\\ &\quad+2(1+2t)+7=0, \end{aligned}$$

c'est-à-dire $9+9t=0$, soit $t=-1$.

Contrôle. Pour $t=-1$, on obtient $(-3;1;-1)$, et $-6+1-2+7=0$.

Conclusion. Le centre du cercle est $H_1(-3;1;-1)$.

4.

Montre que (P_2) est tangent à (S) et détermine le point de contact T.

INDICE

Ici $\vec{n}_2(3;0;4)$ a pour norme 5. Le point de contact est le projeté orthogonal de Ω sur (P_2).

CORRIGÉ

Tangence. Le vecteur $\vec{n}_2(3;0;4)$ est normal à (P_2) :

$$\begin{aligned} &d(\Omega,(P_2))\\ &=\frac{|3\times(-1)+4\times1-26|}{\sqrt{9+0+16}}\\ &=\frac{25}{5}=5=R. \end{aligned}$$

La distance du centre au plan est égale au rayon : (P_2) est **tangent** à (S).

Point de contact. C'est le projeté orthogonal de Ω sur (P_2). La droite passant par Ω et dirigée par $\vec{n}_2$ est formée des points $(-1+3t;2;1+4t)$, où $t \in \mathbb{R}$. Un tel point est dans (P_2) si et seulement si :

$$\begin{aligned} &3(-1+3t)+4(1+4t)\\ &\quad-26=0, \end{aligned}$$

c'est-à-dire $25t-25=0$, soit $t=1$. On obtient $T(2;2;5)$.

Contrôle. $6+20-26=0$ et $\Omega T^2=9+0+16=25=R^2$.

Conclusion. Le plan (P_2) est tangent à (S) au point $T(2;2;5)$.

5.

Le plan (P_3) a-t-il des points communs avec (S) ?

INDICE

Compare $d(\Omega, (P_3))$ et 5 ; pour comparer une fraction à 5, écris $5 = \dfrac{15}{3}$.

CORRIGÉ

Distance.

$$\begin{aligned} & d(\Omega, (P_3)) \\ &= \frac{|-2+4-1+16|}{\sqrt{4+4+1}} \\ &= \frac{17}{3}. \end{aligned}$$

Comparaison. $\dfrac{17}{3} > \dfrac{15}{3} = 5$: la distance du centre au plan dépasse le rayon.

Conclusion. Le plan (P_3) et la sphère (S) n'ont **aucun point commun**.

6.

Vérifie que $V(3;5;1)$ appartient à (S), puis donne une équation du plan tangent à (S) en V.

INDICE

Le plan tangent en V passe par V et admet $\overrightarrow{\Omega V}$ pour vecteur normal.

CORRIGÉ

Appartenance. $\overrightarrow{\Omega V}(4;3;0)$, donc $\Omega V^2 = 16+9+0 = 25 = R^2$: $V \in (S)$.

Plan tangent. Le plan tangent à (S) en V passe par V et admet $\overrightarrow{\Omega V}$ pour vecteur normal. Un point $M(x;y;z)$ lui appartient si et seulement si $\overrightarrow{\Omega V} \cdot \overrightarrow{VM} = 0$. La troisième coordonnée de $\overrightarrow{\Omega V}$ est nulle, donc cette condition s'écrit :

$$4(x-3) + 3(y-5) = 0,$$

c'est-à-dire $4x + 3y - 27 = 0$.

Conclusion. V appartient à (S), et le plan tangent à (S) en V a pour équation $4x + 3y - 27 = 0$.

Exercice 7

Une sphère et trois droites

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Soit (S) la sphère d'équation $(x-1)^2+(y+1)^2+z^2=9$, de centre $\Omega(1;-1;0)$ et de rayon 3. On considère les droites suivantes, où t décrit $\mathbb{R}$:

$$(D_1):\begin{cases}x=3-3t\\y=1\\z=1+t\end{cases}$$

$$(D_2):\begin{cases}x=4+t\\y=0\\z=1-t\end{cases}$$

$$(D_3):\begin{cases}x=2+t\\y=-1-t\\z=4\end{cases}$$

1.

Détermine les points communs à (D_1) et à (S).

INDICE

Remplace x, y, z par leurs expressions en t dans l'équation de (S), développe, puis résous.

CORRIGÉ

Report. Le point de (D_1) de paramètre t a pour coordonnées $(3-3t;1;1+t)$. Il appartient à (S) si et seulement si :

$$(2-3t)^2+2^2+(1+t)^2=9.$$

En développant, $4-12t+9t^2+4+1+2t+t^2=9$, soit :

$$10t^2-10t=0.$$

Résolution. $10t^2-10t=10t(t-1)$: l'équation équivaut à $t=0$ ou $t=1$.

Points communs. Pour $t=0$, on obtient $(3;1;1)$; pour $t=1$, on obtient $(0;1;2)$.

Conclusion. La droite (D_1) coupe (S) en **deux points**, $(3;1;1)$ et $(0;1;2)$.

2.

Montre que (D_2) est tangente à (S) et précise le point de contact.

INDICE

Après report, calcule le discriminant Δ de l'équation du second degré obtenue. Rappel : si $\Delta > 0$, deux solutions, donc deux points communs ; si $\Delta = 0$, une seule solution, donc un point de contact (droite tangente) ; si $\Delta < 0$, aucune solution, donc aucun point commun.

CORRIGÉ

Report. Le point de (D_2) de paramètre t appartient à (S) si et seulement si :

$$(3+t)^2 + 1^2 + (1-t)^2 = 9.$$

En développant, le premier membre vaut $2t^2 + 4t + 11$. L'équation $2t^2 + 4t + 11 = 9$ équivaut à :

$$2t^2 + 4t + 2 = 0.$$

Discriminant. $\Delta = 4^2 - 4 \times 2 \times 2 = 0$: l'équation a une seule solution,

$$t = -\frac{4}{2 \times 2} = -1.$$

Conclusion. La droite (D_2) et la sphère (S) ont un seul point commun : (D_2) est **tangente** à (S) au point $(3; 0; 2)$.

3.

La droite (D_3) coupe-t-elle (S) ?

INDICE

Même méthode ; le signe du discriminant répond à la question : $\Delta > 0$, deux points ; $\Delta = 0$, un point ; $\Delta < 0$, aucun point.

CORRIGÉ

Report. Le point de (D_3) de paramètre t appartient à (S) si et seulement si :

$$(1+t)^2 + (-t)^2 + 4^2 = 9,$$

c'est-à-dire $2t^2 + 2t + 17 = 9$, ou encore :

$$2t^2 + 2t + 8 = 0.$$

Discriminant. $\Delta = 2^2 - 4 \times 2 \times 8 = 4 - 64 = -60 < 0$: l'équation n'a aucune solution réelle.

Conclusion. La droite (D_3) ne coupe pas (S) : elles n'ont **aucun point commun**.

Exercice 8

Orientation et premiers produits vectoriels

Le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthonormé direct. On donne $\vec{u}(2; 1; -1)$ et $\vec{v}(1; 3; 2)$.

1.

Les bases $(\vec{k}, \vec{j}, \vec{i})$ et $(-\vec{i}, -\vec{j}, \vec{k})$ sont-elles directes ?

INDICE

Place le bonhomme d'Ampère debout selon le troisième vecteur, regardant vers le premier : le deuxième est-il à sa gauche ?

CORRIGÉ

- $(\vec{k}, \vec{j}, \vec{i})$: le bonhomme d'Ampère est debout selon le troisième vecteur, $\vec{i}$, et regarde vers le premier, $\vec{k}$. Il a alors $\vec{j}$ à sa droite. Cette base est **indirecte**.
- $(-\vec{i}, -\vec{j}, \vec{k})$: le bonhomme est debout selon $\vec{k}$. Quand il regarde vers $\vec{i}$, il a $\vec{j}$ à sa gauche, car $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est directe. S'il fait demi-tour pour regarder vers $-\vec{i}$, sa gauche passe du côté de $-\vec{j}$. Cette base est **directe**.

Conclusion. La base $(\vec{k}, \vec{j}, \vec{i})$ est indirecte, la base $(-\vec{i}, -\vec{j}, \vec{k})$ est directe.

2.

Calcule les coordonnées de $\vec{u} \wedge \vec{v}$, puis contrôle ton résultat.

INDICE

Écris les deux vecteurs en colonnes. Cache la ligne des x pour la première composante, celle des y pour la deuxième (sans oublier le signe moins), celle des z pour la troisième.

CORRIGÉ

Calcul. La base est orthonormée directe. On écrit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ en colonnes et on calcule trois déterminants 2×2 :

$$\begin{aligned}\vec{u} \wedge \vec{v} &= \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \vec{j} \\ &\quad + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= (2+3)\vec{i} - (4+1)\vec{j} \\ &\quad + (6-1)\vec{k}.\end{aligned}$$

Donc $\vec{u} \wedge \vec{v} = 5\vec{i} - 5\vec{j} + 5\vec{k}$.

Contrôle. Le produit vectoriel doit être orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$: $\vec{u} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = 10 - 5 - 5 = 0$ et $\vec{v} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = 5 - 15 + 10 = 0$.

Conclusion. $\vec{u} \wedge \vec{v}$ a pour coordonnées $(5; -5; 5)$.

3.

Sans nouveau calcul de déterminant, donne $\vec{v} \wedge \vec{u}$ et $(2\vec{u}) \wedge \vec{v}$.

INDICE

Échanger les deux facteurs change le signe ; un facteur réel sort du produit vectoriel.

CORRIGÉ

Le produit vectoriel est antisymétrique : $\vec{v} \wedge \vec{u} = -(\vec{u} \wedge \vec{v})$.

Par bilinéarité, un facteur réel sort du produit : $(2\vec{u}) \wedge \vec{v} = 2(\vec{u} \wedge \vec{v})$.

Conclusion. $\vec{v} \wedge \vec{u}$ a pour coordonnées $(-5; 5; -5)$ et $(2\vec{u}) \wedge \vec{v}$ a pour coordonnées $(10; -10; 10)$.

4.

Soient $\vec{a}(2; -4; 6)$ et $\vec{b}(-3; 6; -9)$. Calcule $\vec{a} \wedge \vec{b}$. Que peux-tu en conclure ?

INDICE

Si tu trouves le vecteur nul, pense à la propriété qui relie produit vectoriel nul et colinéarité.

CORRIGÉ

Calcul. Dans la base orthonormée directe, on calcule les trois composantes de $\vec{a} \wedge \vec{b}$:

- sur $\vec{i}$: $(-4) \times (-9) - 6 \times 6 = 36 - 36 = 0$;
- sur $\vec{j}$: $-\big(2 \times (-9) - 6 \times (-3)\big) = -(-18 + 18) = 0$;
- sur $\vec{k}$: $2 \times 6 - (-4) \times (-3) = 12 - 12 = 0$.

Donc $\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{0}$.

Contrôle. Sur les coordonnées, $\vec{b} = -\dfrac{3}{2}\,\vec{a}$.

Conclusion. Le produit vectoriel de $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est nul : d'après la caractérisation de la colinéarité par le produit vectoriel, les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont **colinéaires**.

Exercice 9

Aire, plan et distance à une droite par le produit vectoriel

Le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthonormé direct. On donne les points $A(0;1;3)$, $B(1;1;5)$ et $C(2;-1;3)$.

1.

Calcule $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ puis $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$. Les points A, B, C sont-ils alignés ?

INDICE

Trois points sont alignés exactement quand $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{0}$.

CORRIGÉ

Coordonnées. $\overrightarrow{AB}(1;0;2)$ et $\overrightarrow{AC}(2;-2;0)$.

Produit vectoriel. Dans la base orthonormée directe :

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\\ &= \big(0 \times 0 - 2 \times (-2)\big)\vec{i}\\ &\quad - (1 \times 0 - 2 \times 2)\vec{j}\\ &\quad + \big(1 \times (-2) - 0 \times 2\big)\vec{k}\\ &= 4\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}.\end{aligned}$$

Conclusion. Ce vecteur n'est pas nul, donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires : les points A, B, C ne sont **pas alignés**.

2.

Calcule l'aire du triangle ABC.

INDICE

L'aire du triangle est la moitié de la norme de $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

CORRIGÉ

L'aire du triangle ABC est la moitié de la norme de $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$. Or :

$$\begin{aligned}&\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|\\ &= \sqrt{16 + 16 + 4} = \sqrt{36} = 6.\end{aligned}$$

Donc :

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} \times 6 = 3.$$

Conclusion. L'aire du triangle ABC vaut 3 unités d'aire.

3.

Déduis-en une équation cartésienne du plan (ABC).

INDICE

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est normal au plan ; tu peux le diviser par 2 pour simplifier.

CORRIGÉ

Vecteur normal. Le vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$, de coordonnées $(4; 4; -2)$, est normal au plan (ABC). Le vecteur $\vec{n}(2; 2; -1)$, qui lui est colinéaire, est donc aussi normal à (ABC).

Terme constant. Le plan (ABC) a une équation de la forme $2x + 2y - z + \delta = 0$, où δ est un réel. Comme $A \in (ABC)$: $0 + 2 - 3 + \delta = 0$, donc $\delta = 1$.

Contrôle. Pour B : $2 + 2 - 5 + 1 = 0$; pour C : $4 - 2 - 3 + 1 = 0$.

Conclusion. Une équation cartésienne du plan (ABC) est $2x + 2y - z + 1 = 0$.

4.

Calcule la distance du point C à la droite (AB), puis retrouve l'aire de la question 2.

INDICE

$d(C, (AB)) = \dfrac{\left\|\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AB}\right\|}{AB}$, et l'aire d'un triangle vaut base fois hauteur sur 2.

CORRIGÉ

Distance à (AB). La droite (AB) passe par A et est dirigée par $\overrightarrow{AB}$, de norme $AB = \sqrt{1 + 0 + 4} = \sqrt{5}$. Le vecteur $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AB} = -\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right)$ a la même norme, 6. D'après la formule de la distance d'un point à une droite :

$$\begin{aligned} d(C, (AB)) &= \frac{6}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{6\sqrt{5}}{5} \approx 2{,}68. \end{aligned}$$

Retour à l'aire. L'aire d'un triangle est la moitié du produit d'une base par la hauteur correspondante. Avec la base $[AB]$ et la hauteur $d(C, (AB))$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{ABC} &= \frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times \frac{6}{\sqrt{5}} \\ &= 3. \end{aligned}$$

Conclusion. $d(C, (AB)) = \dfrac{6\sqrt{5}}{5}$, et l'on retrouve l'aire 3 de la question 2.