BURHAN

Géométrie dans l'espace

2ème Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-experimentales/mathematiques/geometrie-dans-l-espace/cours

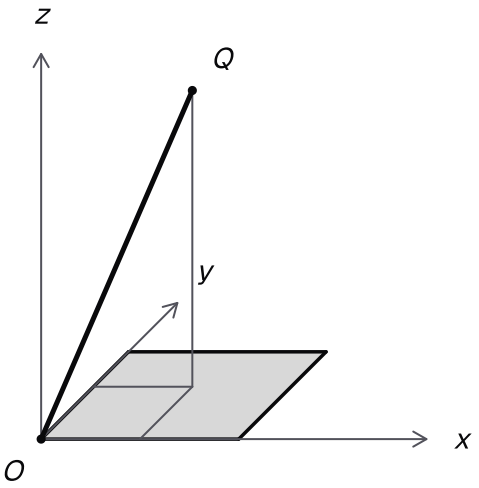
Chapitre	Semestre
Géométrie dans l'espace	Semestre 2

Un drone dans la salle

Un drone dans la salle

Dans la salle de sport du lycée, un club teste un petit **drone**. On repère tout depuis un coin O du sol. Le premier axe longe un mur, le deuxième longe l'autre mur. Le troisième monte à la verticale. L'unité est le mètre.

Le drone reste immobile au point $Q(2;3;6)$: 2 m le long du premier mur, 3 m le long du second, 6 m de hauteur.



Le coin O de la salle, ses trois axes et le drone Q, à 2 m, 3 m puis 6 m du coin selon chaque axe ; le fil relie O à Q.

Devine : Un fil du coin au drone

Un fil tendu relie le coin O au drone Q. Quelle est sa longueur ?

A. 7 m

Juste.
Le fil est l'hypoténuse d'un triangle rectangle, et cela deux fois de suite : $\sqrt{2^2+3^2+6^2} = \sqrt{49} = 7$.

B. $2+3+6 = 11$ m

Faux.
Additionner les coordonnées revient à longer les murs puis à monter : c'est un trajet en escalier, plus long que le fil tendu.

C. 49 m

Faux.
49 est le carré de la longueur. Il manque la racine carrée.

D. $\sqrt{13}$ m, soit environ $3{,}6$ m

Faux.
$\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$ est une distance au sol : du coin au point situé sous le drone. La hauteur de 6 m est oubliée.

Correction
Au sol, le coin O et le point situé sous le drone sont à $\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$ m l'un de l'autre, par Pythagore.

Ce segment du sol et la verticale de 6 m forment un angle droit. Pythagore, encore une fois :

$$OQ=\sqrt{13+6^2}=\sqrt{49}=7.$$

Le fil mesure 7 m. Ce calcul a un nom : la distance de deux points dans un repère orthonormé.

Ce que tu vas construire

Pour faire voler ce drone sans heurter personne, il te faut quatre outils :

1. le **produit scalaire**, pour mesurer et repérer un angle droit ;
2. l'**équation d'un plan**, pour décrire le sol, un mur ou un toit ;
3. l'**équation d'une sphère**, pour décrire la zone de sécurité autour du drone ;
4. le **produit vectoriel**, pour fabriquer en un calcul un vecteur orthogonal à deux autres.

Un exercice de géométrie dans l'espace figure dans 13 des 15 sujets de bac consultés par BURHAN. Il y vaut 3 points à chaque fois. Le chapitre suit son chemin : produit scalaire (partie A), plans et sphères (partie B), produit vectoriel (partie C). La dernière section rédige un sujet complet, question par question.

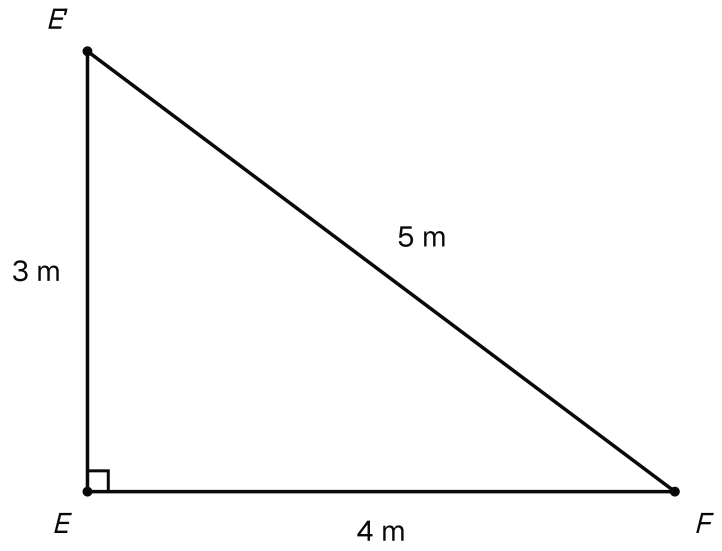
A. Le produit scalaire dans l'espace

Trois points, un plan

Sur le toit plat du lycée, une antenne $[EE']$ se dresse à la verticale. Son pied E est sur le toit. Son sommet E' est 3 m plus haut. Un point F du toit est à 4 m de E.

Le triangle EFE' est rectangle en E, car l'antenne est verticale et le toit horizontal. Donc $FE'=\sqrt{4^2+3^2}=5$ m.

Bonne nouvelle : trois points sont toujours dans un même plan. Ici, c'est le plan vertical qui contient l'antenne et F. Dans ce plan, le produit scalaire de première s'applique tel quel.



Le triangle EFE', dans le plan vertical de l'antenne : rectangle en E, avec EF = 4 m, EE' = 3 m et FE' = 5 m.

Devine : Un produit scalaire sur le toit

Que vaut $\overrightarrow{FE} \cdot \overrightarrow{FE'}$?

A. 20, car $FE \times FE' = 4 \times 5$

Faux.

Le produit des longueurs ne convient que pour deux vecteurs de même direction et de même sens. Ici, l'angle $\widehat{EFE'}$ n'est pas nul : il faut un cosinus.

B. 0, car il y a un angle droit

Faux.

L'angle droit est en E, pas en F. C'est $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EE'}$ qui est nul.

C. 16

Juste.

Le projeté de E' sur la droite (FE) est E : le produit vaut $FE \times FE = 16$.

D. 12, car $FE \times EE' = 4 \times 3$

Faux.

$\overrightarrow{EE'}$ n'est pas un des deux vecteurs. Les deux vecteurs partent de F : $\overrightarrow{FE}$ et $\overrightarrow{FE'}$.

Correction

Dans le plan EFE', on utilise le cosinus. Le triangle est rectangle en E, donc :

$$\cos \widehat{EFE'} = \frac{FE}{FE'} = \frac{4}{5}.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{FE}\cdot\overrightarrow{FE'}\\&=FE\times FE'\times\cos\widehat{EFE'}\\&=4\times5\times\frac{4}{5}=16.\end{aligned}$$

Réponse : 16, car on calcule comme dans le plan qui contient E, F et E'.

La définition

Définition : Produit scalaire de deux vecteurs de l'espace

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace, et A, B, C trois points tels que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$. Il existe au moins un plan contenant A, B et C. Le **produit scalaire** $\vec{u}\cdot\vec{v}$ est le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ calculé dans un tel plan ; il ne dépend ni du point A ni du plan choisis.

Si $\vec{u}\neq\vec{0}$ et $\vec{v}\neq\vec{0}$, alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos\theta$, où θ est la mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{BAC}$. Si $\vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$, alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.

Propriété : Produit scalaire et projection orthogonale

Soient A, B, C trois points de l'espace avec $A\neq B$, et H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB). Alors $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}$. Ainsi $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AH$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont le même sens, et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-AB\times AH$ s'ils sont de sens contraires.

Exemple : Deux calculs, un même nombre

Reprends l'antenne.

- **Par le cosinus** : $\overrightarrow{FE}\cdot\overrightarrow{FE'}=4\times5\times\frac{4}{5}=16$.
- **Par la projection** : le projeté orthogonal de E' sur la droite (FE) est E, car (EE') est perpendiculaire au toit. Donc $\overrightarrow{FE}\cdot\overrightarrow{FE'}=\overrightarrow{FE}\cdot\overrightarrow{FE}$, c'est-à-dire $FE^2=16$.

Et l'angle droit en E donne $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EE'}=0$.

Les règles du plan restent vraies

Les règles de calcul du plan restent vraies dans l'espace. On les admet. Les voici, suivies de la définition de l'**orthogonalité**.

Propriété : Symétrie, bilinéarité et carré scalaire

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ de l'espace et tout réel α :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ (symétrie) ;
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ et $(\alpha\vec{u}) \cdot \vec{v} = \alpha\,(\vec{u} \cdot \vec{v})$ (bilinéarité) ;
- $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$: c'est le **carré scalaire** de $\vec{u}$, noté aussi $\vec{u}^{\,2}$.

Définition : Vecteurs orthogonaux, droites orthogonales

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace sont **orthogonaux**, et l'on note $\vec{u} \perp \vec{v}$, lorsque $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur. Deux droites de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonales** lorsque $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$; elles ne sont pas forcément sécantes.

Vérifie : La gouttière et l'antenne

Une gouttière horizontale longe le bord du toit. Elle ne passe pas par le pied E de l'antenne. La droite de la gouttière et la droite (EE') sont-elles orthogonales ?

A. Non : deux droites qui ne se coupent pas ne peuvent pas être orthogonales.

Faux.
Deux droites de l'espace peuvent être orthogonales sans jamais se rencontrer. Seuls leurs vecteurs directeurs comptent.

B. Oui : vertical et horizontal donnent un produit scalaire nul.

Juste.
C'est la définition : on compare les directions, pas les positions.

C. Non, elles sont parallèles, car toutes deux sont liées au toit.

Faux.
Deux droites parallèles ont des vecteurs directeurs colinéaires. Un vecteur vertical et un vecteur horizontal non nul ne le sont jamais.

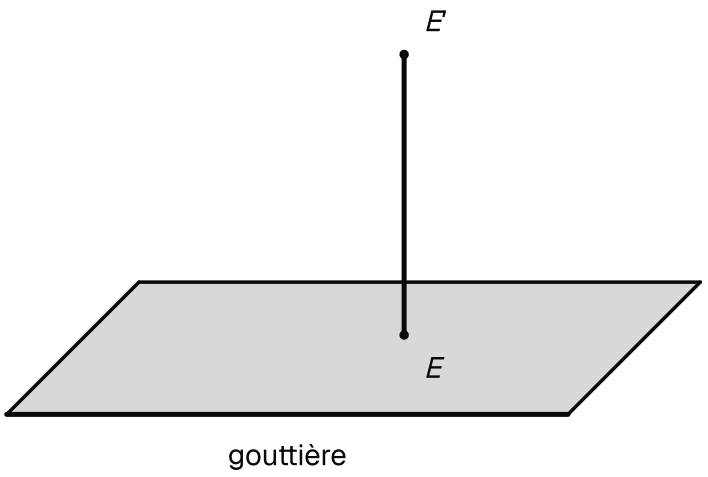
D. On ne peut pas savoir sans coordonnées.

Faux.
Les directions suffisent : verticale d'un côté, horizontale de l'autre. L'angle entre ces directions est droit.

Correction
Prends $\vec{u} = \overrightarrow{EE'}$, vertical, et $\vec{v}$ un vecteur directeur de la gouttière, horizontal.

Place un représentant de $\vec{v}$ au point E : il est dans le toit, donc perpendiculaire à l'antenne. Ainsi $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Réponse : oui, les deux droites sont orthogonales, bien qu'elles ne se coupent pas.



Le toit plat, l'antenne [EE'] dressée en son milieu et la gouttière le long du bord avant, loin du pied E.

Calculer avec des coordonnées

Devine : Un calcul dans la base

Les vecteurs $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ont pour longueur 1 et sont deux à deux orthogonaux. Ainsi $\vec{i} \cdot \vec{i} = 1$ et $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$, et de même pour les autres. Que vaut $(2\vec{i} + \vec{j}) \cdot (3\vec{i} - 4\vec{k})$?

A. 2

Faux.
Tu as sans doute associé $\vec{j}$ et $-4\vec{k}$: $2 \times 3 + 1 \times (-4) = 2$. Or $\vec{j} \cdot \vec{k} = 0$: ce terme disparaît.

B. 0, car les vecteurs de base sont orthogonaux

Faux.
Seuls les produits de deux vecteurs **différents** sont nuls. Le terme $6\,\vec{i} \cdot \vec{i}$ vaut 6.

C. Le vecteur $6\vec{i}$

Faux.
Un produit scalaire est un **nombre**, jamais un vecteur.

D. 6

Juste.
Seul le terme en $\vec{i} \cdot \vec{i}$ reste : $2 \times 3 \times 1 = 6$.

Correction
On développe grâce à la bilinéarité :

$$\begin{aligned}(2\vec{i} + \vec{j}) \cdot (3\vec{i} - 4\vec{k}) &= 6\,\vec{i} \cdot \vec{i} - 8\,\vec{i} \cdot \vec{k} \\ &\quad + 3\,\vec{j} \cdot \vec{i} - 4\,\vec{j} \cdot \vec{k} \\ &= 6.\end{aligned}$$

Les trois derniers produits sont nuls, car les vecteurs de base sont deux à deux orthogonaux ; et $\vec{i} \cdot \vec{i} = 1$.

Avec les coordonnées $(2; 1; 0)$ et $(3; 0; -4)$, on retrouve $2 \times 3 + 1 \times 0 + 0 \times (-4) = 6$. C'est la formule qui suit.

Définition : Base orthonormée, repère orthonormé

Une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace est **orthonormée** lorsque $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$ et que $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{i} \cdot \vec{k} = 0$. Un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est **orthonormé** lorsque sa base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthonormée.

Propriété : Expression analytique du produit scalaire

Dans une base orthonormée, si $\vec{u}$ a pour coordonnées $(x; y; z)$ et $\vec{v}$ a pour coordonnées $(x'; y'; z')$, alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'.$$

En particulier, $\vec{u} \perp \vec{v}$ si et seulement si $xx' + yy' + zz' = 0$.

En clair : dans un repère orthonormé, tu multiplies les coordonnées qui se correspondent, puis tu additionnes. Une somme nulle signale un angle droit. C'est ainsi qu'en chimie on obtient l'angle de deux liaisons d'une molécule, à partir des coordonnées de ses atomes.

Exemple : Orthogonaux en trois produits

Le repère est orthonormé. On calcule terme à terme :

	x	y	z
$\vec{u}$	1	-2	2
$\vec{v}$	2	3	2
produits	2	-6	4

La somme vaut $2 - 6 + 4 = 0$: donc $\vec{u} \perp \vec{v}$.

La norme suit le même chemin : $\|\vec{u}\| = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3$.

Longueurs et distances

Propriété : Norme d'un vecteur, distance de deux points

Dans un repère orthonormé, si $\vec{u}$ a pour coordonnées $(x; y; z)$, alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Pour deux points $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

À toi : Deux distances

Le repère est orthonormé. Avec $K(1; 0; -1)$ et $L(3; 2; 0)$, calcule KL. Calcule ensuite NG, avec $N(2; -2; 1)$ et $G(6; -6; 8)$.

Indice 1
Commence par les coordonnées du vecteur : arrivée moins départ.
Indice 2
Prends ensuite la racine de la somme des carrés.
Indice 3
Regarde si la somme est un carré parfait : la racine se simplifie alors.

Réponse
$\overrightarrow{KL}(2; 2; 1)$, donc $KL = \sqrt{4 + 4 + 1}$, soit $KL = \sqrt{9} = 3$.

$\overrightarrow{NG}(4; -4; 7)$, donc $NG = \sqrt{16 + 16 + 49}$, soit $NG = \sqrt{81} = 9$.

Réponse : $KL = 3$ et $NG = 9$, car une distance est la norme du vecteur qui joint les deux points.

Démontrer un angle droit

Méthode : Démontrer que deux vecteurs sont orthogonaux

1. **Repère** : vérifie qu'il est orthonormé. Sinon, la formule ne s'applique pas.
2. **Coordonnées** : écris celles des deux vecteurs, arrivée moins départ.
3. **Calcul** : multiplie coordonnée par coordonnée, puis additionne.
4. **Trancher** : une somme égale à 0 donne l'angle droit ; toute autre valeur l'exclut.

Attention : Un nombre, pas un vecteur

Avec $\vec{u}(1; 2; 3)$ et $\vec{v}(2; 0; -1)$:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 + 0 - 3 = -1.$$

✗ Garder les trois produits $(2; 0; -3)$ comme résultat : ce n'est pas fini.

✓ Un produit scalaire est un **nombre**. Additionne toujours les trois produits.

À toi : Le triangle KLN

Avec $K(1;0;-1)$, $L(3;2;0)$ et $N(2;-2;1)$, montre que le triangle KLN est rectangle en K.

Indice 1
Un angle droit en K : quel produit scalaire doit être nul ?
Indice 2
Calcule $\overrightarrow{KL}$ et $\overrightarrow{KN}$, puis leur produit scalaire.
Indice 3
Conclus par une phrase complète.

Réponse
Le repère est orthonormé. On a $\overrightarrow{KL}(2;2;1)$ et $\overrightarrow{KN}(1;-2;2)$. Alors :

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{KL}\cdot\overrightarrow{KN}\\&=2\times1+2\times(-2)\\&\quad+1\times2\\&=2-4+2=0.\end{aligned}$$

Donc $\overrightarrow{KL}\perp\overrightarrow{KN}$: le triangle KLN est rectangle en K.

Garde ce triangle : il reviendra dans les parties B et C.

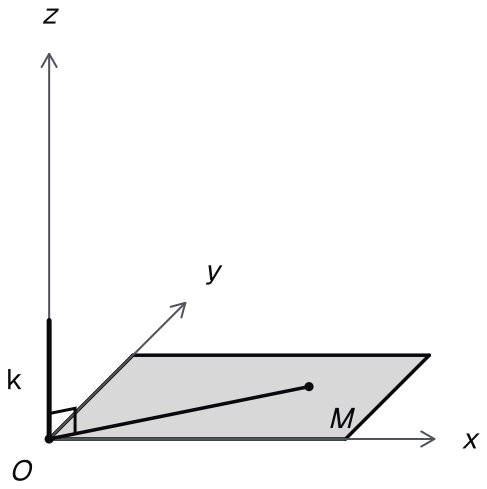
B1. Plans : vecteur normal, équation, distance

Le sol et une autre hauteur

Reviens dans la salle et son repère. Un point $M(x;y;z)$ est au sol quand sa hauteur z est nulle.

Or $\vec{k}(0;0;1)$ et $\overrightarrow{OM}(x;y;z)$ donnent $\vec{k}\cdot\overrightarrow{OM}=z$. Le sol est donc l'ensemble des points M tels que $\vec{k}\cdot\overrightarrow{OM}=0$.

Un produit scalaire fixé décrit un plan.



Le sol, plan horizontal passant par O, et le vecteur k qui monte du coin : un point M du sol donne k · OM = 0.

Devine : Une autre valeur

Quel est l'ensemble des points M tels que $\vec{k} \cdot \overrightarrow{OM} = 4$?

A. Le seul point $(0; 0; 4)$, à la verticale de O

Faux.

Ce point convient, mais il n'est pas seul : $(1; 5; 4)$ convient aussi. Seule la hauteur est imposée.

B. La droite verticale qui passe par O

Faux.

Sur cette droite, z varie : la condition $z = 4$ n'y est vraie qu'en un point.

C. La sphère de centre O et de rayon 4

Faux.

Sur cette sphère, c'est la **distance** à O qui vaut 4. Ici, seule la **hauteur** vaut 4.

D. Le plan horizontal de cote 4

Juste.

La condition se lit $z = 4$: toutes les positions au sol sont permises, la hauteur est fixée.

Correction

On calcule le produit scalaire en coordonnées :

$$\begin{aligned} &\vec{k} \cdot \overrightarrow{OM} \\ &= 0 \times x + 0 \times y + 1 \times z \\ &= z. \end{aligned}$$

La condition s'écrit donc $z = 4$.

Réponse : c'est le plan horizontal situé à 4 m de hauteur, orthogonal à $\vec{k}$.

Vecteur normal

Propriété : Ensemble des points M tels que u·AM = k

Soient $\vec{u}$ un vecteur non nul, A un point et k un réel. L'ensemble des points M de l'espace tels que $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = k$ est un plan, orthogonal à toute droite de vecteur directeur $\vec{u}$. Pour $k = 0$, c'est le plan passant par A et orthogonal à $\vec{u}$.

Définition : Vecteur normal à un plan

Un vecteur $\vec{n}$ **non nul** est **normal** au plan (P) lorsqu'il est orthogonal à tout vecteur $\overrightarrow{MN}$, où M et N sont deux points de (P). On admet qu'il suffit que $\vec{n}$ soit orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de (P).

Vérifie : Quel vecteur est normal ?

Un plan (P) passe par $J(1;2;-1)$. Les vecteurs non colinéaires $\vec{w}_1(1;2;0)$ et $\vec{w}_2(1;0;-1)$ sont parallèles à (P). Lequel de ces vecteurs est normal à (P) ?

A. $\vec{w}_1(1;2;0)$

Faux.

$\vec{w}_1$ est parallèle au plan. Il ne lui est pas orthogonal : $\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_1 = 5 \neq 0$.

B. $(2;-1;-2)$

Faux.

Il est orthogonal à $\vec{w}_1$, car $2 - 2 + 0 = 0$, mais pas à $\vec{w}_2$: $2 + 0 + 2 = 4$. Un seul vecteur ne suffit pas.

C. $(2;-1;2)$

Juste.

Il est orthogonal aux deux : $2 - 2 + 0 = 0$ et $2 + 0 - 2 = 0$.

D. $(0;0;0)$

Faux.

Le vecteur nul est orthogonal à tout. Mais un vecteur normal est **non nul**, par définition.

Correction

On teste chaque vecteur contre $\vec{w}_1$ **et** contre $\vec{w}_2$. Pour $\vec{n}(2;-1;2)$:

$$\vec{n} \cdot \vec{w}_1 = 2 - 2 + 0 = 0,$$
$$\vec{n} \cdot \vec{w}_2 = 2 + 0 - 2 = 0.$$

Comme $\vec{w}_1$ et $\vec{w}_2$ ne sont pas colinéaires, $\vec{n}$ est normal à (P).

Réponse : $\vec{n}(2;-1;2)$.

Une équation cartésienne

Propriété : Plan défini par un point et un vecteur normal

Dans un repère orthonormé, soient $A(x_A; y_A; z_A)$ un point et $\vec{n}(a; b; c)$ un vecteur non nul. Le plan (P) passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ est l'ensemble des points M tels que $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$. Il admet une équation cartésienne de la forme

$$ax + by + cz + d = 0, \quad \text{avec } d = -(ax_A + by_A + cz_A).$$

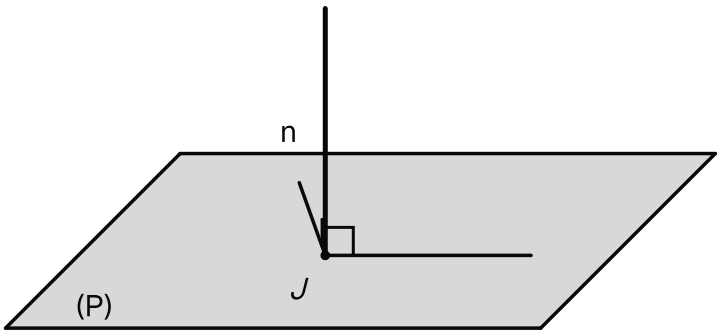
Propriété : Lecture d'un vecteur normal sur une équation cartésienne

Dans un repère orthonormé, soient a, b, c, d des réels avec $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$. L'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que $ax + by + cz + d = 0$ est un plan, de vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$.

Exemple : Le plan (P), étape par étape

Le plan (P) passe par $J(1; 2; -1)$ et admet $\vec{n}(2; -1; 2)$ pour vecteur normal.

1. **Traduire** : $M(x; y; z) \in (P)$ si et seulement si $\vec{n} \cdot \overrightarrow{JM} = 0$.
2. **Écrire** : $2(x - 1) - (y - 2) + 2(z + 1) = 0$.
3. **Développer** : $2x - 2 - y + 2 + 2z + 2 = 0$, soit $(P) : 2x - y + 2z + 2 = 0$.
4. **Contrôler** avec J : $2 - 2 - 2 + 2 = 0$.



Le plan (P) passe par J ; le vecteur n, tracé depuis J, est orthogonal à deux directions du plan.

Méthode : Un point et un vecteur normal donnent le plan

1. **Repérer** le point A du plan et un vecteur normal $\vec{n}(a;b;c)$, non nul.
2. **Traduire** : le point $M(x;y;z)$ est dans le plan exactement quand $\overrightarrow{AM}$ est orthogonal à $\vec{n}$. On écrit donc $a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$.
3. **Développer** jusqu'à la forme $ax+by+cz+d=0$.
4. **Vérifier** avec les coordonnées de A : le membre de gauche doit valoir 0.

Deux contrôles

Attention : Normal ne veut pas dire parallèle

Sur l'équation $2x-y+2z+2=0$, les coefficients donnent $\vec{n}(2;-1;2)$. Ce vecteur est **orthogonal** au plan.

✗ Prendre $\vec{n}$ comme vecteur directeur du plan.

✓ Un vecteur $\vec{w}$ est parallèle au plan quand $\vec{n}\cdot\vec{w}=0$. Ainsi $\vec{w}_1(1;2;0)$ l'est, car $2-2+0=0$.

À toi : Vérifier une équation donnée

On donne $E_1(1;0;0)$, $E_2(0;1;1)$ et $E_3(2;1;3)$. Vérifie que $x+2y-z-1=0$ est une équation du plan $(E_1E_2E_3)$.

Indice 1
Il faut d'abord un vrai plan : les trois points ne doivent pas être alignés.
Indice 2
Compare les coordonnées de $\overrightarrow{E_1E_2}$ et de $\overrightarrow{E_1E_3}$: sont-elles proportionnelles ?
Indice 3
Remplace ensuite les coordonnées de chaque point dans l'équation.

Réponse
On a $\overrightarrow{E_1E_2}(-1;1;1)$ et $\overrightarrow{E_1E_3}(1;1;3)$. Leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles : $\frac{1}{-1}=-1$, alors que $\frac{1}{1}=1$.

Donc les trois points ne sont pas alignés : ils définissent un seul plan.

On remplace ensuite dans l'équation :

- E_1 donne $1+0-0-1=0$;
- E_2 donne $0+2-1-1=0$;
- E_3 donne $2+2-3-1=0$.

Réponse : les trois points vérifient l'équation, donc c'est une équation du plan $(E_1E_2E_3)$.

Distance d'un point à un plan

Devine : Le drone et le sol

Le drone est en $Q(2;3;6)$. À quelle distance du sol se trouve-t-il ?

A. 7 m, la longueur OQ

Faux.
OQ est la distance au coin O, un point particulier du sol. D'autres points du sol sont plus proches.

B. 6 m

Juste.
Le point du sol le plus proche est à la verticale du drone : la distance est la hauteur.

C. 11 m

Faux.
Additionner les coordonnées ne donne aucune distance.

D. $\sqrt{13}$ m

Faux.
$\sqrt{13}$ est la distance, au sol, entre O et le point situé sous le drone. Elle ne dit rien de la hauteur.

Correction
Le point du sol le plus proche de Q est $(2;3;0)$, juste en dessous. Il est à $\sqrt{0+0+6^2}=6$ de Q.

Les autres points du sol sont plus loin : par exemple, $OQ=7$.

Réponse : 6 m, la plus petite des distances de Q aux points du sol.

Définition : Distance d'un point à un plan

Soient (P) un plan, A un point de l'espace et H le projeté orthogonal de A sur (P), c'est-à-dire le point d'intersection de (P) et de la droite passant par A orthogonale à (P). La **distance** de A au plan (P) est $d(A,(P))=AH$. C'est la plus petite des distances AM, pour M dans (P).

Propriété : Formule de la distance d'un point à un plan

Dans un repère orthonormé, soient (P) le plan d'équation $ax+by+cz+d=0$, avec $(a;b;c)\neq(0;0;0)$, et $A(x_A;y_A;z_A)$ un point. Alors

$$d(A,(P))=\frac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

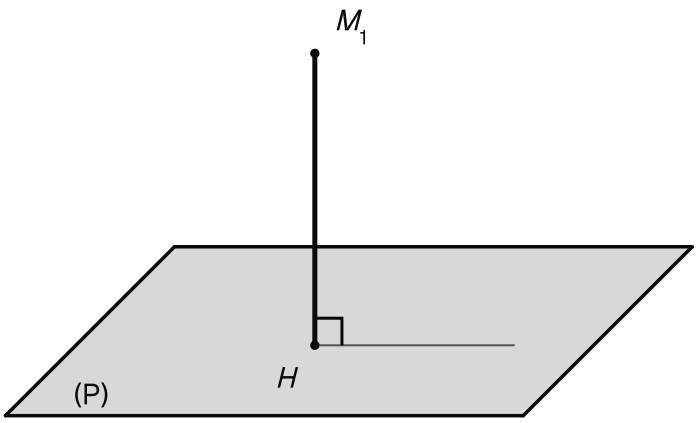
La formule en action

Exemple : Distance de M_1 au plan (P)

On cherche $d(M_1,(P))$ avec $M_1(3;1;2)$ et (P) : $2x-y+2z+2=0$.

1. **Numérateur** : on remplace, puis on prend la valeur absolue : $|2\times 3-1+2\times 2+2|=|11|=11$.
2. **Dénominateur** : $\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}=\sqrt{9}=3$.
3. **Quotient** :

$$d(M_1,(P))=\frac{11}{3}.$$



Le point M_1 et son projeté orthogonal H sur (P) : la longueur M_1H est la distance cherchée, 11/3.

Attention : La racine et la valeur absolue

✗ Diviser par $4+1+4=9$ donne $\frac{11}{9}$: la racine est oubliée.

✗ Sans valeur absolue, le point $(0;4;0)$ donnerait $\frac{0-4+0+2}{3}=-\frac{2}{3}$. Une « distance » négative n'a pas de sens.

✓ Le dénominateur est la norme $\|\vec{n}\|=3$, et le numérateur, une valeur absolue, est positif ou nul. Pour ce point, la distance vaut $\frac{2}{3}$.

À toi : deux distances à un plan

Calcule la distance de O au plan $(E_1E_2E_3)$: $x+2y-z-1=0$. Calcule ensuite celle de $G(6;-6;8)$ au plan (P) : $2x-y+2z+2=0$.

Indice 1
Numérateur : remplace, puis prends la valeur absolue, même quand le nombre obtenu est négatif.
Indice 2
Dénominateur : la racine de la somme des carrés des trois coefficients.
Indice 3
Si une racine reste en bas, multiplie le haut et le bas par cette racine.

Réponse
Pour O. Le numérateur vaut $|0+0-0-1|=|-1|=1$ et le dénominateur $\sqrt{1+4+1}=\sqrt{6}$. Donc :

$$\begin{aligned} d(O,(E_1E_2E_3)) &= \frac{1}{\sqrt{6}} \\ &= \frac{\sqrt{6}}{6}. \end{aligned}$$

Pour G. Le numérateur vaut $|12+6+16+2|=36$ et le dénominateur 3. Donc :

$$d(G,(P))=\frac{36}{3}=12.$$

Réponse : $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$ et 12.

Méthode : Coin examen : la distance à un plan

La distance d'un point à un plan est demandée ou notée au barème dans 11 des 13 sujets qui ont un exercice d'espace. Les barèmes lus donnent souvent $0{,}25$ pour la formule et $0{,}25$ pour la valeur.

Pour le drone $Q(2;3;6)$ et le plan (P), rédige ainsi :

> $d(Q,(P))=\dfrac{|2\times 2-3+2\times 6+2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}$ ($0{,}25$ pt), donc $d(Q,(P))=\dfrac{15}{3}=5$. ($0{,}25$ pt)

La formule écrite avec les nombres rapporte déjà le premier quart de point.

B2. Droite orthogonale à un plan

Une direction perpendiculaire

Devine : Une direction perpendiculaire

Quel vecteur dirige une droite orthogonale au plan (P) : $2x-y+2z+2=0$ de la partie B1 ?

A. $(4;-2;4)$
Juste.
C'est $2\vec{n}$: il a la direction de $\vec{n}$, donc il est orthogonal au plan.

B. $(1;2;0)$

Faux.

Ce vecteur est parallèle à (P), car $2-2+0=0$. La droite serait parallèle au plan, pas orthogonale.

C. $(2;1;2)$

Faux.

Le signe du coefficient de y est perdu : $(2;1;2)$ n'est pas colinéaire à $\vec{n}(2;-1;2)$.

Correction

Une droite est orthogonale à (P) quand son vecteur directeur est colinéaire au vecteur normal $\vec{n}(2;-1;2)$.

Or $(4;-2;4)=2\vec{n}$.

Réponse : $(4;-2;4)$, car il est colinéaire à $\vec{n}$.

Remarque : Rappel de 1re : représentation paramétrique d'une droite

Une droite se décrit par un point et un vecteur directeur non nul. Celle qui passe par $(0;1;2)$ et suit $\vec{u}(1;-2;3)$ a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1-2t \\ z = 2+3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Lecture : les coefficients de t forment un vecteur directeur ; les termes constants, un point.

Chaque valeur de t donne un point :

t	0	1	-1
point	$(0;1;2)$	$(1;-1;5)$	$(-1;3;-1)$

Parallèles ou perpendiculaires

Propriété : Parallélisme et orthogonalité par les vecteurs normaux

Soient (P) et (P') deux plans de vecteurs normaux $\vec{n}$ et $\vec{n}'$, et (D) une droite de vecteur directeur $\vec{u}$.

- (P) et (P') sont parallèles (éventuellement confondus) si et seulement si $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont colinéaires ;
- (P) et (P') sont perpendiculaires si et seulement si $\vec{n}\cdot\vec{n}'=0$;
- (D) est orthogonale à (P) si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires ;

- (D) est parallèle à (P) (éventuellement contenue dans (P)) si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$.

Exemple : Trois paires de vecteurs normaux

On compare $\vec{n}(2;-1;2)$, normal à (P), au vecteur normal $\vec{n}'$ d'un autre plan :

$\vec{n}'$	**colinéaire à $\vec{n}$?**	$\vec{n} \cdot \vec{n}'$	**les deux plans sont**
$(4;-2;4)$	oui : $\vec{n}' = 2\vec{n}$	$8+2+8=18$	parallèles, ou confondus
$(1;2;0)$	non	$2-2+0=0$	perpendiculaires
$(1;1;1)$	non	$2-1+2=3$	ni l'un ni l'autre

La colinéarité tranche le parallélisme ; le produit scalaire nul tranche l'angle droit.

Vérifie : Deux plans, deux vecteurs normaux

Les plans $(P) : 2x - y + 2z + 2 = 0$ et $(P') : x + 4y + z - 5 = 0$ sont-ils parallèles, perpendiculaires, ou ni l'un ni l'autre ?

A. Parallèles, car $\vec{n} \cdot \vec{n}' = 0$

Faux.
Un produit scalaire nul signale un angle droit entre les vecteurs normaux, donc entre les plans. Le parallélisme demande des vecteurs normaux colinéaires.

B. Ni l'un ni l'autre, car $\vec{n} \cdot \vec{n}' = 8$

Faux.
Revois le terme du milieu : $(-1) \times 4 = -4$. La somme vaut $2 - 4 + 2 = 0$.

C. Perpendiculaires, car $\vec{n} \cdot \vec{n}' = 0$

Juste.
Avec $\vec{n}'(1;4;1)$, on trouve $2 - 4 + 2 = 0$: les vecteurs normaux sont orthogonaux.

D. Parallèles, car $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont colinéaires

Faux.
$\vec{n}(2;-1;2)$ et $\vec{n}'(1;4;1)$ ne sont pas colinéaires : le rapport des premières coordonnées vaut 2, celui des deuxièmes $-\dfrac{1}{4}$.

Correction

On lit $\vec{n}(2;-1;2)$ et $\vec{n}'(1;4;1)$. Ils ne sont pas colinéaires, et :

$$\begin{aligned} &\vec{n} \cdot \vec{n}' \\ &= 2 \times 1 + (-1) \times 4 + 2 \times 1 \\ &= 2 - 4 + 2 = 0. \end{aligned}$$

Réponse : les plans (P) et (P') sont perpendiculaires.

Le projeté orthogonal

Propriété : Droite passant par un point et orthogonale à un plan

Dans un repère orthonormé, soient (P) un plan de vecteur normal $\vec{n}(a;b;c)$ et $A(x_A;y_A;z_A)$ un point. La droite (Δ) passant par A et orthogonale à (P) est la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{n}$; elle admet la représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Elle coupe (P) en un seul point : le projeté orthogonal de A sur (P).

Méthode : Trouver le projeté orthogonal d'un point

1. **Normal** : lis sur l'équation du plan un vecteur normal $\vec{n}(a;b;c)$.
2. **Droite** : paramètre la droite qui part du point et suit $\vec{n}$.
3. **Report** : remplace x, y et z dans l'équation du plan, puis résous l'équation en t, du premier degré.
4. **Point** : remets la valeur de t dans la droite. Le point obtenu doit vérifier l'équation du plan.

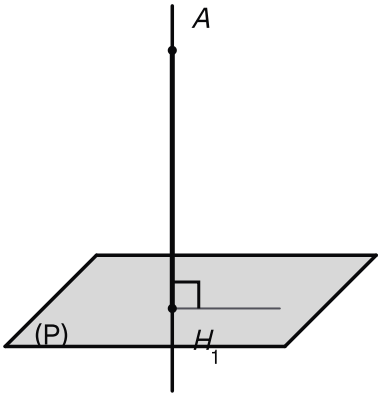
Exemple : Projeter un point sur (P)

On projette sur (P) : $2x - y + 2z + 2 = 0$ le point de coordonnées $(4;0;4)$.

1. **Droite** : elle passe par ce point et a pour vecteur directeur $\vec{n}(2;-1;2)$.

$$\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -t \\ z = 4 + 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

2. **Report** dans (P) : $2(4+2t) + t + 2(4+2t) + 2 = 0$, soit $18 + 9t = 0$, donc $t = -2$.
3. **Point** : $t = -2$ donne $H_1(0;2;0)$. Contrôle : $0 - 2 + 0 + 2 = 0$.



La droite issue du point (4 ; 0 ; 4), noté A, et dirigée par n perce (P) en H_1, son projeté orthogonal.

À toi : Un projeté surprise

Détermine le projeté orthogonal sur (P) du point de coordonnées $(3;1;1)$. Donne aussi la distance de ce point à (P).

Indice 1
Écris la droite qui passe par ce point, dirigée par $\vec{n}(2;-1;2)$.
Indice 2
Reporte dans l'équation de (P) : tu obtiens une équation du premier degré en t.
Indice 3
Compare le point trouvé aux points nommés dans la partie B1.

Réponse
Droite. Elle passe par le point et suit $\vec{n}$: $x = 3 + 2t$, $y = 1 - t$, $z = 1 + 2t$, avec $t \in \mathbb{R}$.

Report. Dans l'équation de (P) :

$$\begin{aligned} &2(3+2t) - (1-t) \\ &\quad + 2(1+2t) + 2 \\ &= 9 + 9t. \end{aligned}$$

Donc $9 + 9t = 0$, soit $t = -1$. Le projeté est $(1;2;-1)$: c'est J.

Distance.

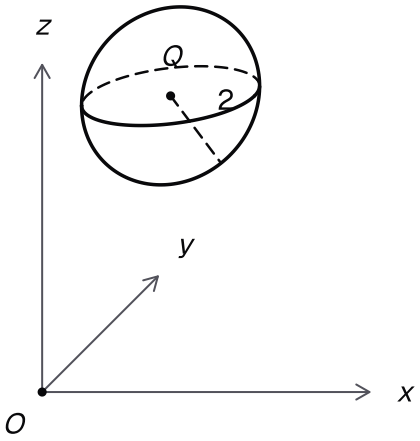
$$\frac{|6 - 1 + 2 + 2|}{3} = \frac{9}{3} = 3.$$

Réponse : le projeté est J, et le point est à 3 de (P). Normal : ce point s'obtient en partant de J et en ajoutant $\vec{n}$, de norme 3.

Équation cartésienne d'une sphère

La zone de sécurité

Pour éviter les chocs, le club interdit d'approcher le drone à moins de 2 m. Le bord de cette zone est formé des points situés **exactement** à 2 m de $Q(2;3;6)$. Ce bord est une **sphère** : la surface d'un ballon, pas le ballon plein.



La zone interdite autour du drone : la sphère de centre Q(2 ; 3 ; 6) et de rayon 2, dans le repère de la salle.

Devine : Dedans ou dehors ?

Une perche s'arrête au point de coordonnées $(3;5;7)$. Ce point est-il dans la zone interdite, sur son bord ou dehors ?

A. Dedans : chaque coordonnée diffère de celle de Q d'au plus 2.

Faux.

Les écarts sont 1, 2 et 1, mais ils se combinent : la distance n'est pas le plus grand écart.

B. Sur le bord : le plus grand écart vaut exactement 2.

Faux.

Le plus grand écart ne donne pas la distance. Il faut la racine de la somme des carrés.

C. Dehors : il est à plus de 2 m de Q.

Juste.

$\sqrt{1+4+1}=\sqrt{6}$, environ $2{,}45$: c'est plus que 2.

Correction

Le carré de la distance du point à Q vaut :

$$\begin{aligned}&(3-2)^2+(5-3)^2\\&\quad+(7-6)^2\\&=1+4+1=6.\end{aligned}$$

La distance vaut donc $\sqrt{6}\approx 2{,}45$.

Comme $\sqrt{6}>2$, le point est hors de la zone. Réponse : dehors.

Équation d'une sphère

Définition : Sphère

Soient Ω un point de l'espace et R un réel strictement positif. La **sphère** de centre Ω et de rayon R est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\Omega M = R$.

Propriété : Équation cartésienne d'une sphère

Dans un repère orthonormé, la sphère (S) de centre $\Omega(x_0;y_0;z_0)$ et de rayon $R>0$ est l'ensemble des points $M(x;y;z)$ tels que

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2.$$

C'est une **équation cartésienne** de (S).

Exemple : La zone du drone en équation

La sphère (S_0) de centre $Q(2;3;6)$ et de rayon 2 a pour équation :

$$\begin{aligned}&(x-2)^2+(y-3)^2\\&\quad+(z-6)^2=4.\end{aligned}$$

Le point $(2;3;4)$, juste sous le drone, la vérifie : $0+0+4=4$. Il est sur (S_0).

Le point de la perche donne $1+4+1=6$, et $6>4$: il est dehors.

Une équation développée

Devine : Retrouver le centre

En développant l'équation de (S_0), on obtient $x^2+y^2+z^2-4x-6y-12z+45=0$: le centre ne se lit plus directement. Quel est le centre de la sphère d'équation $x^2+y^2+z^2-6x+2z+1=0$?

A. $(-6;0;2)$
Faux.

Ce sont les coefficients de x, y, z recopiés. Le centre vient de la moitié de ces coefficients, avec le signe changé.

B. $(-3;0;1)$

Faux.

Les moitiés sont justes, mais pas le signe : $x^2-6x=(x-3)^2-9$ donne l'abscisse 3.

C. $(3;0;-1)$

Juste.

$x^2-6x=(x-3)^2-9$ et $z^2+2z=(z+1)^2-1$.

D. O, car il n'y a pas de terme en y

Faux.

L'absence de terme en y donne seulement l'ordonnée 0 du centre. Les termes en x et en z déplacent le centre.

Correction

On complète les carrés :

$$x^2-6x=(x-3)^2-9,$$
$$z^2+2z=(z+1)^2-1,$$

car $(x-3)^2=x^2-6x+9$ et $(z+1)^2=z^2+2z+1$. L'équation devient :

$$(x-3)^2+y^2+(z+1)^2 = 9+1-1=9.$$

Réponse : le centre est $(3;0;-1)$, et le rayon vaut $\sqrt{9}=3$.

Propriété : Ensemble des points tels que x² + y² + z² + ax + by + cz + d = 0

Dans un repère orthonormé, soient a, b, c, d des réels, (E) l'ensemble des points $M(x;y;z)$ tels que $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$, $\Omega\left(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2};-\frac{c}{2}\right)$ et $k=\frac{a^2+b^2+c^2-4d}{4}$.

- Si $k>0$, (E) est la sphère de centre Ω et de rayon $\sqrt{k}$;
- si $k=0$, (E) est réduit au point Ω ;
- si $k<0$, (E) est l'ensemble vide.

En clair : on complète les carrés, puis on regarde le nombre k du second membre. S'il est strictement positif, le rayon est $\sqrt{k}$, jamais k lui-même.

Exemple : Compléter les carrés

Soit (S) : $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-2=0$.

1. **Compléter** chaque carré :

$$x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$$
$$y^2 + 4y = (y+2)^2 - 4$$
$$z^2 - 6z = (z-3)^2 - 9$$

2. **Regrouper** : l'équation devient

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 1 + 4 + 9 + 2 = 16.$$

3. **Conclure** : $16 > 0$, donc (S) est la sphère de centre $\Omega(1; -2; 3)$ et de rayon $R = \sqrt{16} = 4$.

Deux pièges

Attention : Vide, ou un rayon trop grand

✗ Conclure « sphère » sans regarder le second membre. Ainsi, $x^2 + y^2 + z^2 + 4z + 5 = 0$ s'écrit $x^2 + y^2 + (z+2)^2 = -1$.

Une somme de carrés n'est jamais négative : l'ensemble est **vide**.

✗ Prendre 16 comme rayon quand le second membre vaut 16.

✓ Le rayon est alors $\sqrt{16} = 4$.

Méthode : Reconnaître une sphère

1. **Regrouper** les termes en x, en y et en z.
2. **Compléter** chaque carré : $x^2 + ax = \left(x + \dfrac{a}{2}\right)^2 - \dfrac{a^2}{4}$.
3. **Isoler** le nombre k : $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = k$.
4. **Trancher** : si $k > 0$, sphère de rayon $\sqrt{k}$; si $k = 0$, un seul point ; si $k < 0$, ensemble vide.

À toi : Centre et rayon

Montre que $(S_1) : x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y - 4z = 0$ est une sphère. Donne son centre Ω_1 et son rayon.

Indice 1
Complète trois carrés : un en x, un en y, un en z.
Indice 2
Commence par $x^2 + 4x = (x+2)^2 - 4$, puis fais de même pour y et z.
Indice 3
Avant de conclure, regarde le signe du second membre.

Réponse

On complète les carrés :

$$x^2+4x=(x+2)^2-4$$
$$y^2-2y=(y-1)^2-1$$
$$z^2-4z=(z-2)^2-4$$

L'équation devient :

$$(x+2)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=4+1+4=9.$$

Comme $9>0$, (S_1) est la sphère de centre $\Omega_1(-2;1;2)$ et de rayon $\sqrt{9}=3$.

Au passage, O est sur (S_1) : l'équation n'a pas de terme constant.

Méthode : Coin examen : centre et rayon

Le centre et le rayon d'une sphère, à tirer d'une équation développée, sont demandés dans 7 des 13 sujets qui ont un exercice d'espace. Le barème constaté donne $0{,}5$ point : $0{,}25$ pour le centre, $0{,}25$ pour le rayon.

Pour (S_3) : $x^2+y^2+z^2-2y+4z-4=0$, rédige ainsi :

> On a $y^2-2y=(y-1)^2-1$ et $z^2+4z=(z+2)^2-4$, donc (S_3) : $x^2+(y-1)^2+(z+2)^2=9$.
> Comme $9>0$, (S_3) est la sphère de centre $\Omega_3(0;1;-2)$ ($0{,}25$ pt) et de rayon $\sqrt{9}=3$ ($0{,}25$ pt).

Écris le signe du second membre : c'est lui qui prouve que l'ensemble est une sphère.

Le diamètre et l'angle droit

En première, tu as vu ceci : un point distinct des extrémités d'un segment le voit sous un angle droit exactement quand il est sur le cercle de diamètre ce segment. Dans l'espace, le cercle devient une sphère. Cette propriété est apparue dans 1 des 13 sujets qui ont un exercice d'espace.

Propriété : Ensemble des points M tels que MA·MB = 0

Soient A et B deux points distincts de l'espace. L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ est la sphère de diamètre $[AB]$: son centre est le milieu I de $[AB]$ et son rayon est $\dfrac{AB}{2}$.

Exemple : La sphère de diamètre [LN]

Reprends $L(3;2;0)$ et $N(2;-2;1)$ de la partie A. La sphère (S_2) de diamètre $[LN]$ a :

- pour centre le milieu $\Omega_2\left(\dfrac{5}{2};0;\dfrac{1}{2}\right)$;

- pour rayon $\dfrac{LN}{2} = \dfrac{\sqrt{1+16+1}}{2} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

Or $\overrightarrow{KL} \cdot \overrightarrow{KN} = 0$, vu dans la partie A. Donc K est sur (S_2), sans aucun calcul de distance.

Vérifie : Un point de la sphère de diamètre [LN] ?

Le point $G(6; -6; 8)$ de la partie A est-il sur (S_2) ?

A. Oui, car G est à la distance 9 du point N, un bout du diamètre.

Faux.
Une distance à N seul ne dit rien. Il faut tester $\overrightarrow{GL} \cdot \overrightarrow{GN}$.

B. Oui, car $G\Omega_2 = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$, le rayon.

Faux.
Le calcul donne $G\Omega_2^2 = \dfrac{209}{2}$, loin du carré du rayon, $\dfrac{9}{2}$. Le produit scalaire évite ce calcul.

C. Non : $\overrightarrow{GL} \cdot \overrightarrow{GN} = 100$.

Juste.
Le produit scalaire n'est pas nul : l'angle $\widehat{LGN}$ n'est pas droit.

Correction
On a $\overrightarrow{GL}(-3; 8; -8)$ et $\overrightarrow{GN}(-4; 4; -7)$. Alors :

$$\overrightarrow{GL} \cdot \overrightarrow{GN} = 12 + 32 + 56 = 100.$$

Ce n'est pas 0 : G n'est pas sur (S_2). Réponse : non.

Bonus : une sphère en deux angles

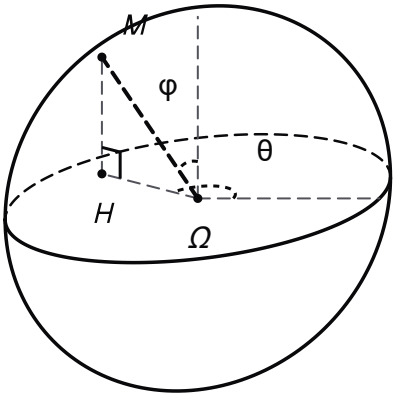
Sur un globe, deux angles suffisent pour repérer un lieu : la longitude et la colatitude (l'angle compté depuis le pôle). Une sphère se décrit de même, avec deux angles θ et φ. Cette écriture est absente des 15 sujets consultés : retiens surtout l'idée.

Propriété : Représentation paramétrique d'une sphère

Dans un repère orthonormé, soit (S) la sphère de centre $\Omega(x_0; y_0; z_0)$ et de rayon $R > 0$. Un point $M(x; y; z)$ appartient à (S) si et seulement s'il existe deux réels θ et φ tels que

$$\begin{cases} x = x_0 + R\cos\theta\sin\varphi \\ y = y_0 + R\sin\theta\sin\varphi \\ z = z_0 + R\cos\varphi \end{cases}$$

Ce système, avec $(\theta; \varphi) \in \mathbb{R}^2$, est une **représentation paramétrique** de (S).



Les deux angles de F18 sur une sphère de rayon R : θ tourne autour de l'axe vertical depuis la direction du premier axe, et φ se compte depuis la verticale qui monte du centre.

Vérifie : Quel point pour ces angles ?

Pour (S_0), de centre $Q(2;3;6)$ et de rayon 2, quel point donnent $\theta = 0$ et $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$?

A. $(2;3;8)$

Faux.

C'est le point obtenu pour $\varphi = 0$: le sommet de la sphère.

B. $(2;5;6)$

Faux.

Ce point demande $\sin\theta = 1$, donc $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, pas $\theta = 0$.

C. $(2;3;6)$

Faux.

C'est le centre Q : il n'est pas sur la sphère, car le rayon 2 n'est pas nul.

D. $(4;3;6)$

Juste.

$\cos 0 = 1$, $\sin\dfrac{\pi}{2} = 1$ et $\cos\dfrac{\pi}{2} = 0$: on avance de 2 selon le premier axe.

Correction

On remplace θ par 0 et φ par $\dfrac{\pi}{2}$:

$$x = 2 + 2\cos 0 \sin\frac{\pi}{2} = 4$$
$$y = 3 + 2\sin 0 \sin\frac{\pi}{2} = 3$$
$$z = 6 + 2\cos\frac{\pi}{2} = 6$$

Réponse : $(4; 3; 6)$.

B4. Sphère et plan : positions relatives

Couper une sphère

Coupe une orange d'un coup de couteau bien droit. La lame est un plan, la peau une sphère. Quand la lame traverse l'orange, sa trace sur la peau est un **cercle** : le bord de la tranche, pas la tranche pleine. Tout dépend de l'endroit où passe la lame.

Devine : Une lame trop loin

Une orange a un rayon de 4 cm. La lame passe à 5 cm de son centre. Que trace-t-elle sur la peau ?

A. Un cercle de rayon 1 cm

Faux.
La lame passe plus loin du centre que la peau : elle ne touche pas l'orange.

B. Un seul point

Faux.
Un seul point de contact demande une lame à **exactement** 4 cm du centre.

C. Rien du tout

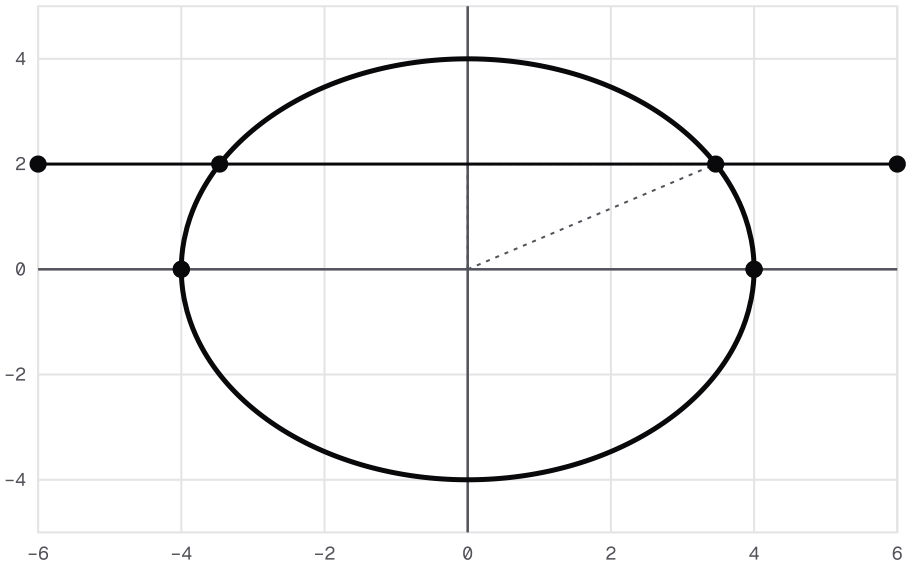
Juste.
Les points de la peau sont à 4 cm du centre. Ceux de la lame sont tous à 5 cm au moins.

D. Un disque

Faux.
Quand la lame coupe, sa trace sur la peau est un cercle, pas un disque. Et ici, elle ne coupe même pas.

Correction
Tous les points de la lame sont à au moins 5 cm du centre. Tous les points de la peau sont à 4 cm du centre. Aucun point n'est commun.

Réponse : rien. Tout se joue sur la comparaison de la distance d du centre au plan et du rayon R.



Coupe de la sphère de centre Ω et de rayon 4 par le plan qui contient Ω et qui est perpendiculaire au plan (P), situé à la distance 2 de Ω. Dans cette coupe, la sphère devient un cercle de rayon 4 centré en Ω, placé à l'origine, et le plan (P) devient la droite horizontale d'ordonnée 2. Le triangle ΩHM est rectangle en H : le rayon du cercle d'intersection vaut r = √(16 − 4) = 2√3, environ 3,46.

Remarque : Les points de la coupe

La coupe ci-dessus est celle d'une sphère de rayon 4 par un plan situé à la distance 2 de son centre. On y lit trois points :

Point	Coordonnées dans la coupe	Rôle
Ω	$(0;0)$	centre de la sphère
H	$(0;2)$	centre du cercle, pied de la perpendiculaire
M	$(2\sqrt{3};2)$	un point du cercle

Le triangle $\Omega H M$ est rectangle en H : $\Omega M = 4$ et $\Omega H = 2$.

Comparer d et R

Vérifie : Une lame plus loin du centre

Une sphère a pour rayon $R = 4$. Un plan passe à la distance $d = 3$ de son centre. Quel est le rayon du cercle d'intersection ?

A. 1

Faux.

C'est $R - d$. Le rayon du cercle se calcule dans un triangle rectangle, avec Pythagore.

B. 7

Faux.

C'est $R^2 - d^2$, sans la racine carrée.

C. 5

Faux.

C'est $\sqrt{R^2 + d^2}$. Or le rayon R est l'hypoténuse : il faut soustraire.

D. $\sqrt{7}$

Juste.

$r = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$, environ $2{,}65$.

Correction

Comme $d = 3 < 4 = R$, le plan coupe la sphère selon un cercle. Dans le triangle rectangle en H de la figure :

$$r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}.$$

Réponse : $\sqrt{7}$, environ $2{,}65$.

Propriété : Position relative d'une sphère et d'un plan

Soient (S) la sphère de centre Ω et de rayon R, (P) un plan, H le projeté orthogonal de Ω sur (P) et $d = d(\Omega, (P)) = \Omega H$.

- Si $d > R$, (P) et (S) n'ont aucun point commun ;
- si $d = R$, (P) et (S) ont un seul point commun, H : on dit que (P) est **tangent** à (S) en H ;
- si $d < R$, (P) coupe (S) selon le cercle de (P) de centre H et de rayon $r = \sqrt{R^2 - d^2}$.

En clair, tout se joue sur la comparaison de d et de R :

Comparaison	Intersection du plan et de la sphère
$d > R$	aucun point
$d = R$	un seul point H : le plan est tangent
$d < R$	un cercle de centre H et de rayon $\sqrt{R^2 - d^2}$

Exemple : La sphère (S) coupée par un plan

Reprends (S), de centre $\Omega(1; -2; 3)$ et de rayon 4, et le plan $(P_1) : x + 2y + 2z + 3 = 0$.

Distance.

$$\begin{aligned} & d(\Omega,(P_1)) \\ &= \frac{|1-4+6+3|}{\sqrt{1+4+4}} \\ &= \frac{6}{3} = 2. \end{aligned}$$

Position. $2 < 4$, donc (P_1) coupe (S) selon un cercle.

Rayon. $r = \sqrt{16-4} = 2\sqrt{3}$.

Centre. La droite issue de Ω dirigée par $\vec{n}(1;2;2)$ donne les points $(1+t;-2+2t;3+2t)$, avec $t \in \mathbb{R}$. Le report dans (P_1) donne $6+9t=0$, donc $t=-\dfrac{2}{3}$ et $H_2\left(\dfrac{1}{3};-\dfrac{10}{3};\dfrac{5}{3}\right)$.

Le piège du rayon

Attention : Pas R moins d

Pour $R=4$ et $d=2$:

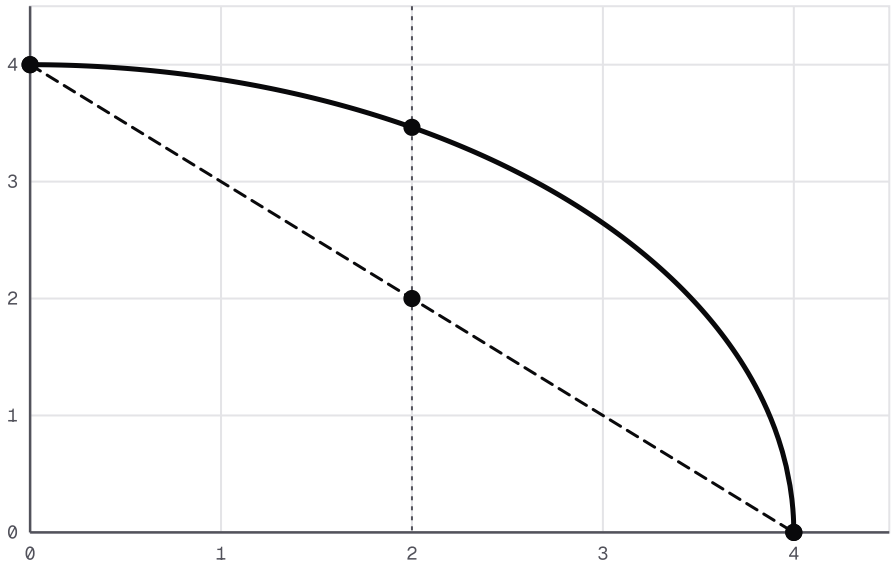
✗ $r = R - d = 2$.

✓ Le triangle formé par le centre de la sphère, le centre H du cercle et un point du cercle est rectangle en H. Donc :

$$r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3},$$

environ $3{,}46$.

La courbe suivante compare les deux formules.



Pour une sphère de rayon 4, rayon r du cercle d'intersection en fonction de la distance d du centre au plan : r = √(16 – d²), en trait plein, comparé à la droite 4 – d, en pointillés. Les deux ne coïncident qu'aux extrémités d = 0 et d = 4 ; pour d = 2, r = 2√3, environ 3,46, et non 2.

La méthode complète

Méthode : Étudier l'intersection d'une sphère et d'un plan

1. **Centre et rayon** de la sphère, en complétant les carrés si besoin.
2. **Distance** d du centre au plan, par la formule.
3. **Comparaison** de d et de R, avec une phrase de conclusion.
4. **Si** $d < R$: le rayon du cercle est $\sqrt{R^2 - d^2}$, son centre est le projeté du centre de la sphère sur le plan. **Si** $d = R$: ce projeté est le point de contact.

À toi : La sphère (S_1) et un plan

On reprend (S_1), de centre $\Omega_1(-2;1;2)$ et de rayon 3, et le plan $(P_2) : 2x + y - 2z + 4 = 0$. Étudie leur intersection.

Indice 1
Commence par $d(\Omega_1, (P_2))$, avec la formule de la distance.
Indice 2
Compare d à 3, puis calcule le rayon du cercle.
Indice 3
Pour le centre, coupe (P_2) par la droite issue de Ω_1, dirigée par $(2;1;-2)$.

Réponse

Distance.

$$\begin{aligned} & d(\Omega_1, (P_2)) \\ &= \frac{|-4+1-4+4|}{\sqrt{4+1+4}} \\ &= \frac{3}{3} = 1. \end{aligned}$$

Position et rayon. Comme $1 < 3$, (P_2) coupe (S_1) selon un cercle de rayon $\sqrt{9-1} = 2\sqrt{2}$.

Centre. La droite de points $(-2+2t; 1+t; 2-2t)$, avec $t \in \mathbb{R}$, coupe (P_2) quand $-3+9t = 0$, soit $t = \dfrac{1}{3}$. Le centre du cercle est $H_3\left(-\dfrac{4}{3}; \dfrac{4}{3}; \dfrac{4}{3}\right)$.

Méthode : Coin examen : le cercle d'intersection

Un plan qui coupe la sphère selon un cercle figure dans 9 des 13 sujets qui ont un exercice d'espace. Son centre ou son rayon est demandé dans 8 des 13 sujets qui ont un exercice d'espace, pour $0{,}25$ point par élément, et $0{,}5$ pour un centre à montrer.

En 2016 R, la conclusion « tangent » est notée à part, pour $0{,}25$: sépare de même la position du calcul. Avec (S) et (P_1), rédige en trois temps :

> $d(\Omega, (P_1)) = 2 < 4 = R$, donc (P_1) coupe (S) selon un cercle. Son rayon est $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{16-4} = 2\sqrt{3}$. ($0{,}25$ pt) Son centre est le point commun à (P_1) et à la droite passant par Ω et orthogonale à (P_1) : c'est H_2. ($0{,}25$ à $0{,}5$ pt)

Le plan tangent

Devine : Le plan qui effleure

Le point $(1; -2; 7)$ est le sommet de (S), juste au-dessus de $\Omega(1; -2; 3)$. Quel plan touche (S) en ce seul point ?

A. Le plan horizontal $z = 7$, à la cote du sommet

Juste.
Tous ses points ont la cote 7. Il est à la distance $|7-3| = 4 = R$ de Ω : il touche (S) en un seul point.

B. Le plan horizontal $z = 3$, à la cote du centre

Faux.
Ce plan passe par le centre : il coupe (S) selon un grand cercle de rayon 4.

C. Le plan horizontal $z = 4$, la cote égale au rayon

Faux.
4 est le rayon, pas une cote. Ce plan est à la distance 1 de Ω : il coupe (S) selon un cercle.

D. Le plan vertical $x = 1$, qui contient le sommet

Faux.

Ce plan vertical passe aussi par Ω : il coupe (S) selon un grand cercle.

Correction

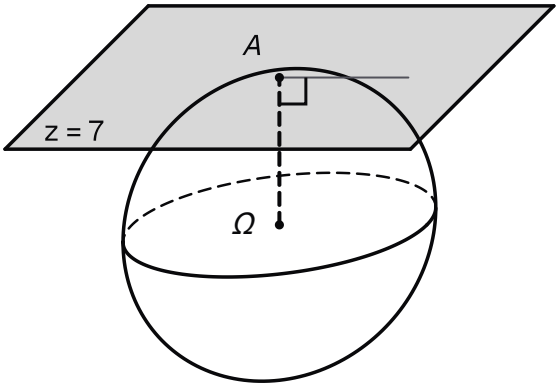
Le vecteur qui va de Ω au sommet est $(0; 0; 4)$, vertical. Le plan cherché lui est orthogonal et passe par le sommet : c'est le plan horizontal formé des points de cote 7, d'équation $z = 7$.

Sa distance à Ω vaut $|7 - 3| = 4 = R$.

Réponse : le plan d'équation $z = 7$.

Définition : Plan tangent à une sphère en un point

Soient (S) une sphère de centre Ω et A un point de (S). Le **plan tangent** à (S) en A est le plan passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{\Omega A}$. C'est le seul plan passant par A qui n'a que le point A en commun avec (S).



La sphère (S) de centre Ω(1 ; -2 ; 3) et de rayon 4, et le plan d'équation z = 7 posé sur son sommet A.

Exemple : Un plan tangent à (S_1)

Le point $M_0(0; 0; 4)$ est sur (S_1) : $0 + 0 + 16 + 0 - 0 - 16 = 0$.

- **Vecteur normal** : $\overrightarrow{\Omega_1 M_0}(2; -1; 2)$.
- **Équation** : $2(x - 0) - (y - 0) + 2(z - 4) = 0$, soit $2x - y + 2z - 8 = 0$.

- **Contrôle** : la distance de Ω_1 à ce plan vaut $\dfrac{|-4-1+4-8|}{3} = 3$, le rayon.

Position relative d'une droite et d'une sphère

Une droite et une sphère

Devine : Une droite par le centre

Une droite passe par le centre d'une sphère. Combien de points a-t-elle en commun avec la sphère ?

A. Aucun

Faux.

Le centre est à l'intérieur : pour s'éloigner à l'infini, la droite doit traverser la sphère.

B. Un seul

Faux.

Une droite par le centre traverse la sphère de part en part : elle entre, puis elle sort.

C. Deux, aux bouts d'un diamètre

Juste.

On part du centre et on avance de R dans chacun des deux sens de la droite.

D. Une infinité, tout un diamètre

Faux.

Une sphère ne contient aucun segment : une droite ne peut pas y rester.

Correction

Sur la droite, les points à la distance R du centre sont exactement deux : un de chaque côté du centre.

Réponse : deux points, les extrémités d'un diamètre.

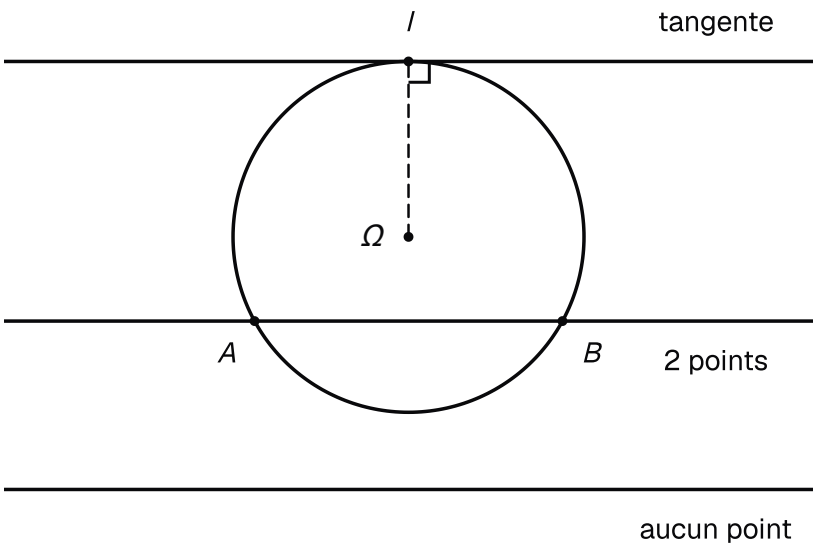
Définition : Points communs d'une sphère et d'une droite

Dans un repère orthonormé, soient (S) une sphère et (D) une droite donnée par une représentation paramétrique de paramètre t. Les points communs à (D) et (S) sont les points de (D) dont le paramètre t est solution de l'équation obtenue en reportant la représentation paramétrique dans une équation cartésienne de (S). Cette équation est du second degré : (D) et (S) ont donc zéro, un ou deux points communs. S'il y en a exactement un, A, on dit que (D) est **tangente** à (S) en A.

Méthode : Les points communs d'une droite et d'une sphère

1. **Paramétrer** la droite : x, y et z en fonction de t.

2. **Reporter** dans l'équation de la sphère.
3. **Résoudre** l'équation du second degré en t obtenue.
4. **Conclure** : deux solutions, deux points ; une solution, droite tangente ; aucune, aucun point commun.



Vue en coupe par un plan contenant le centre : une droite sécante coupe la sphère en deux points, une tangente la touche en un seul, une troisième passe à côté.

Le second degré au service de l'espace

Remarque : Rappel de 1re : l'équation du second degré

Pour $at^2+bt+c=0$, avec $a\neq 0$, on calcule le discriminant $\Delta=b^2-4ac$:

Signe de Δ	Solutions réelles	Points communs
$\Delta>0$	deux : $t_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $t_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	deux
$\Delta=0$	une seule : $t_0=-\dfrac{b}{2a}$	un seul : la droite est tangente
$\Delta<0$	aucune	aucun

Quand $c=0$, inutile de calculer Δ : on factorise par t.

Exemple : La droite (Δ) et la sphère (S)

Soit (S) : $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=16$ et la droite (Δ) :

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 3 \end{cases}$$

On reporte dans l'équation de (S) : $t^2 + (4 - t)^2 + 0 = 16$, d'où $2t^2 - 8t = 0$, c'est-à-dire $2t(t - 4) = 0$.

Deux solutions, $t = 0$ et $t = 4$. Donc (Δ) coupe (S) en deux points : $(1; 2; 3)$ et $(5; -2; 3)$.

À toi : Une droite tangente ?

Soit (Δ_1) la droite d'équations $x = -1 + t$, $y = -2 + 2t$, $z = 4$, avec $t \in \mathbb{R}$. Combien de points a-t-elle en commun avec (S_1) : $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 = 9$?

Indice 1
Reporte x, y et z dans l'équation de (S_1).
Indice 2
Développe et range : tu obtiens une équation du second degré en t.
Indice 3
Calcule le discriminant, puis interprète son signe.

Réponse
On reporte dans l'équation de (S_1) :

$$(1 + t)^2 + (2t - 3)^2 + 2^2 = 9.$$

On développe :

$$t^2 + 2t + 1 + 4t^2 - 12t + 9 + 4 = 9,$$

soit $5t^2 - 10t + 5 = 0$.

Le discriminant vaut $(-10)^2 - 4 \times 5 \times 5 = 0$: une seule solution, $t = 1$.

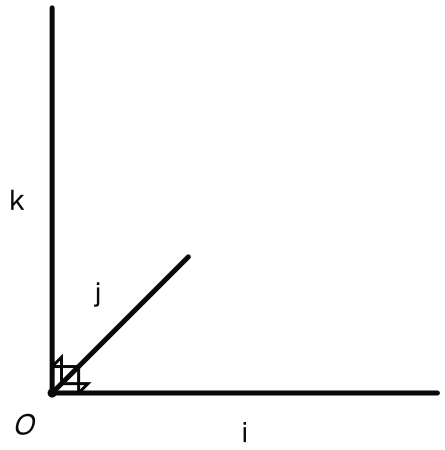
Réponse : un seul point commun, $(0; 0; 4)$, c'est-à-dire M_0. La droite (Δ_1) est tangente à (S_1) en M_0.

C1. Orientation et produit vectoriel

Bonus : gauche ou droite

Dans la salle, $\vec{i}$ suit le premier mur, $\vec{j}$ le second et $\vec{k}$ monte vers le plafond. Imagine un petit personnage, le **bonhomme d'Ampère**, debout le long de $\vec{k}$, les pieds en O. Il regarde dans la direction de $\vec{i}$. Le club a choisi ses axes pour que $\vec{j}$ soit à sa gauche : la base est dite **directe**.

En physique, ce bonhomme sert à orienter le champ magnétique créé par un courant. Et la force de Laplace sur un fil parcouru par un courant est perpendiculaire au fil et au champ : c'est un produit vectoriel.



La base de la salle : i le long du premier mur, j le long du second, k vers le plafond, tous trois issus du coin O.

Devine : Une base dans un autre ordre

La base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est directe. La base $(\vec{j},\vec{k},\vec{i})$ l'est-elle aussi ?

A. Non : l'ordre a changé, donc l'orientation aussi.

Faux.

Tout changement d'ordre ne retourne pas l'orientation. Un **échange** de deux vecteurs la retourne ; une **rotation** des trois la garde.

B. Oui

Juste.

Le bonhomme debout selon $\vec{i}$, regardant vers $\vec{j}$, a bien $\vec{k}$ à sa gauche.

C. On ne peut pas savoir sans coordonnées.

Faux.

L'orientation se lit avec le bonhomme d'Ampère, sans aucun calcul.

Correction

Pour le triplet $(\vec{j},\vec{k},\vec{i})$, on place le bonhomme debout selon le troisième vecteur, $\vec{i}$. Il regarde vers le premier, $\vec{j}$. Le deuxième, $\vec{k}$, est alors à sa gauche.

Réponse : oui, elle est directe. On passe de $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ à $(\vec{j},\vec{k},\vec{i})$ en faisant tourner les trois vecteurs.

Définition : Orientation de l'espace : base orthonormée directe

Soit $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ une base orthonormée et O un point. On place un observateur, le **bonhomme d'Ampère**, debout sur l'axe $(O,\vec{k})$, les pieds en O et la tête du côté de $\vec{k}$, regardant dans la direction de $\vec{i}$. La base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est **directe** lorsque $\vec{j}$ est à sa gauche ; sinon, elle est **indirecte**. Un repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est **orthonormé direct** lorsque sa base est orthonormée et directe. De même, un triplet $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ de vecteurs non nuls deux à deux orthogonaux est direct lorsque le bonhomme d'Ampère, debout selon $\vec{w}$ et regardant vers $\vec{u}$, a $\vec{v}$ à sa gauche.

Exemple : Échanger ou faire tourner

La base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est directe.

Nouvelle base	Ce qu'on a fait	Orientation
$(\vec{j},\vec{i},\vec{k})$	échange de deux vecteurs	indirecte
$(\vec{i},\vec{k},\vec{j})$	échange de deux vecteurs	indirecte
$(\vec{k},\vec{i},\vec{j})$	rotation des trois	directe

Ici, l'orientation sert à une seule chose : fixer le sens du produit vectoriel. Elle est absente des 15 sujets consultés.

Un vecteur orthogonal aux deux

Devine : Orthogonal à deux vecteurs

Le repère est orthonormé direct. On cherche un vecteur $\vec{w}$ orthogonal à $\vec{i}$ et à $2\vec{j}$, de norme $1\times 2=2$, tel que $(\vec{i},2\vec{j},\vec{w})$ soit direct. Lequel ?

A. $-2\vec{k}$

Faux.
Il est orthogonal aux deux et de norme 2. Mais $(\vec{i},2\vec{j},-2\vec{k})$ est indirect : le sens est faux.

B. $\vec{k}$

Faux.
La direction et le sens sont bons, mais la norme vaut 1 au lieu de 2.

C. $\vec{0}$, car $\vec{i}\cdot 2\vec{j}=0$

Faux.
Tu confonds avec le produit scalaire. Ici, on cherche un **vecteur** non nul.

D. $2\vec{k}$

Juste.
Orthogonal à $\vec{i}$ et à $\vec{j}$, de norme 2, et $(\vec{i},2\vec{j},2\vec{k})$ a l'orientation de $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Correction

> Les vecteurs orthogonaux à $\vec{i}$ et à $\vec{j}$ sont colinéaires à $\vec{k}$. La norme 2 laisse $2\vec{k}$ ou $-2\vec{k}$. Le sens direct choisit $2\vec{k}$.
>
> Réponse : $2\vec{k}$. Ce vecteur a un nom : le produit vectoriel de $\vec{i}$ par $2\vec{j}$.

Définition : Produit vectoriel de deux vecteurs

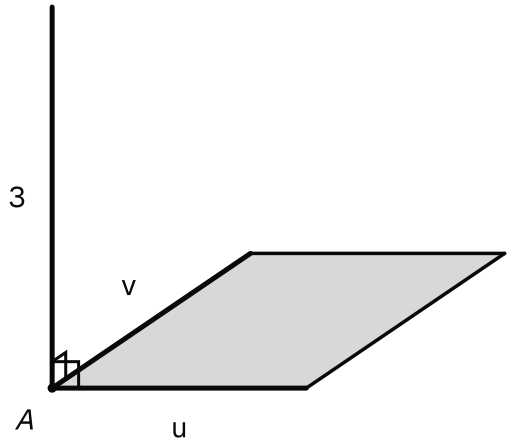
L'espace est orienté. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. Le **produit vectoriel** de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ est le vecteur noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ défini ainsi :

- si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$;
- sinon, $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est l'unique vecteur $\vec{w}$ orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$, tel que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ soit direct et $\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin\theta$, où θ est la mesure en radians de l'angle géométrique formé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Propriété : Produit vectoriel nul et colinéarité

L'espace est orienté. Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$: $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. En particulier, trois points A, B, C sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{0}$.

En clair : $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est un **vecteur**. Il est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$. Sa longueur est l'aire du parallélogramme construit sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Il est nul quand les deux vecteurs sont colinéaires.



Les vecteurs u et v tracés depuis A, le parallélogramme qu'ils construisent et, à angle droit des deux, leur produit vectoriel.

Exemple : Trois produits dans la base

Dans une base orthonormée directe :

- $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$: orthogonal aux deux, de norme $1 \times 1 \times \sin\dfrac{\pi}{2} = 1$, et $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est direct ;
- $\vec{j} \wedge \vec{i} = -\vec{k}$, car $(\vec{j}, \vec{i}, \vec{k})$ est indirect ;
- $\vec{i} \wedge (-3\vec{i}) = \vec{0}$, car les deux vecteurs sont colinéaires.

Règles de calcul

Propriété : Antisymétrie et bilinéarité

L'espace est orienté. Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ et tout réel α :

- $\vec{v} \wedge \vec{u} = -(\vec{u} \wedge \vec{v})$ (antisymétrie) ;
- $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$, $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w}$ et $(\alpha\vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge (\alpha\vec{v}) = \alpha\,(\vec{u} \wedge \vec{v})$ (bilinéarité).

Vérifie : Changer l'ordre et multiplier

On sait que $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}$. Que vaut $(2\vec{v}) \wedge \vec{u}$?

A. $2\vec{i} - 8\vec{j} + 4\vec{k}$

Faux.
Le facteur 2 est bien sorti, mais l'ordre est inversé : l'antisymétrie change le signe.

B. $-2\vec{i} + 8\vec{j} - 4\vec{k}$

Juste.
$(2\vec{v}) \wedge \vec{u} = 2\,(\vec{v} \wedge \vec{u}) = -2\,(\vec{u} \wedge \vec{v})$.

C. $-\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$

Faux.
Le signe est bon, mais le facteur 2 est perdu.

Correction
Par bilinéarité, $(2\vec{v}) \wedge \vec{u} = 2\,(\vec{v} \wedge \vec{u})$. Par antisymétrie, $\vec{v} \wedge \vec{u} = -(\vec{u} \wedge \vec{v})$. Donc :

$$\begin{aligned}(2\vec{v}) \wedge \vec{u} &= -2\,(\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}) \\ &= -2\vec{i} + 8\vec{j} - 4\vec{k}.\end{aligned}$$

En coordonnées

Remarque : Rappel : le déterminant de deux colonnes

Un tableau de deux colonnes et deux lignes a pour **déterminant** le produit de la diagonale descendante, moins celui de la diagonale montante :

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Par exemple :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} &= 2 \times 4 - (-1) \times 3 \\ &= 8 + 3 = 11. \end{aligned}$$

Le produit vectoriel en demande trois, un par coordonnée.

Propriété : Coordonnées du produit vectoriel

Dans une base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, si $\vec{u}$ a pour coordonnées $(x; y; z)$ et $\vec{v}$ a pour coordonnées $(x'; y'; z')$, alors

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \vec{k},$$

c'est-à-dire $\vec{u} \wedge \vec{v} = (yz' - zy')\,\vec{i} + (zx' - xz')\,\vec{j} + (xy' - yx')\,\vec{k}$.

Exemple : Trois déterminants

Base orthonormée directe, $\vec{u}(-1; 2; 0)$ et $\vec{v}(-1; 0; 3)$. On cache une ligne à la fois :

$$\begin{aligned} \vec{u} \wedge \vec{v} &= \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \vec{j} \\ &\quad + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= 6\vec{i} - (-3)\vec{j} + 2\vec{k} \\ &= 6\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}. \end{aligned}$$

Contrôle, par deux produits scalaires :

- avec $\vec{u}$: $(-1) \times 6 + 2 \times 3 + 0 \times 2 = 0$;
- avec $\vec{v}$: $(-1) \times 6 + 0 \times 3 + 3 \times 2 = 0$.

Méthode : Calculer un produit vectoriel

1. **Base** : vérifie qu'elle est orthonormée directe.
2. **Colonnes** : écris $\vec{u}$ et $\vec{v}$ côte à côte.
3. **Déterminants** : cache la ligne des x pour $\vec{i}$, celle des y pour $\vec{j}$, celle des z pour $\vec{k}$. Le deuxième prend un signe moins.
4. **Contrôle** : le résultat a un produit scalaire nul avec $\vec{u}$ et avec $\vec{v}$.

Les pièges

Attention : L'ordre et le signe du milieu

Avec les mêmes vecteurs :

✗ Écrire $\vec{v} \wedge \vec{u} = 6\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$. Changer l'ordre change le sens : $\vec{v} \wedge \vec{u} = -6\vec{i} - 3\vec{j} - 2\vec{k}$.

✗ Oublier le signe moins du milieu, et trouver $6\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$. Ce vecteur n'est pas orthogonal à $\vec{u}$, car son produit scalaire avec $\vec{u}$ vaut $-6 - 6 + 0 = -12$.

✓ Le contrôle par le produit scalaire repère l'erreur.

À toi : Un produit vectoriel

Base orthonormée directe. Calcule $\vec{u} \wedge \vec{v}$ pour $\vec{u}(2;-1;1)$ et $\vec{v}(1;3;-2)$, puis contrôle ton résultat.

Indice 1
Écris les deux vecteurs en colonnes.
Indice 2
Composante sur $\vec{j}$: n'oublie pas le signe moins devant son déterminant.
Indice 3
Contrôle : le résultat doit avoir un produit scalaire nul avec chacun des deux vecteurs.

Réponse
La base est orthonormée directe : on applique la formule en coordonnées.

$$\begin{aligned}&\vec{u} \wedge \vec{v}\\ &= ((-1)(-2) - 1 \times 3)\,\vec{i}\\ &- (2 \times (-2) - 1 \times 1)\,\vec{j}\\ &+ (2 \times 3 - (-1) \times 1)\,\vec{k}\\ &= -\vec{i} + 5\vec{j} + 7\vec{k}.\end{aligned}$$

Contrôle, par deux produits scalaires :

- avec $\vec{u}$: $2 \times (-1) + (-1) \times 5 + 1 \times 7 = 0$;
- avec $\vec{v}$: $1 \times (-1) + 3 \times 5 + (-2) \times 7 = 0$.

Attention : Deux produits, deux natures

Pour $\vec{u}(-1;2;0)$ et $\vec{v}(-1;0;3)$:

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 + 0 + 0 = 1$ est un **nombre** ;
- $\vec{u} \wedge \vec{v} = 6\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$ est un **vecteur**.

✗ Mélanger les deux : le signe $\wedge$ ne donne jamais un nombre, et le point $\cdot$ jamais un vecteur.

Vérifie : Trois balises alignées ?

Le drone doit passer par trois balises : $B_1(1;1;0)$, $B_2(2;3;1)$ et $B_3(4;7;3)$. Sont-elles alignées ?

A. Non, car $\overrightarrow{B_1B_2} \cdot \overrightarrow{B_1B_3} = 18 \neq 0$.

Faux.

Le calcul est juste, mais un produit scalaire non nul dit seulement que l'angle n'est pas droit.

L'alignement se teste par le produit vectoriel.

B. Oui : $\overrightarrow{B_1B_2} \wedge \overrightarrow{B_1B_3} = \vec{0}$.

Juste.

$\overrightarrow{B_1B_3} = 3\,\overrightarrow{B_1B_2}$: les deux vecteurs sont colinéaires.

C. Non, car $B_1B_3 = 3\sqrt{6}$ diffère de $B_1B_2 = \sqrt{6}$.

Faux.

Ces longueurs sont justes, mais des points alignés n'ont aucune raison d'être à égale distance.

Il faut comparer les vecteurs.

Correction

On a $\overrightarrow{B_1B_2}(1;2;1)$ et $\overrightarrow{B_1B_3}(3;6;3)$. Leur produit vectoriel se calcule coordonnée par coordonnée :

$$2 \times 3 - 1 \times 6 = 0$$
$$1 \times 3 - 1 \times 3 = 0$$
$$1 \times 6 - 2 \times 3 = 0$$

Donc $\overrightarrow{B_1B_2} \wedge \overrightarrow{B_1B_3} = \vec{0}$.

Réponse : oui, les trois balises sont alignées. Le drone peut les relier en ligne droite.

C2. Aire, plan et distance par le produit vectoriel

Une aire en un calcul

Une verrière est faite de panneaux triangulaires. Pour commander le verre, il faut l'aire de chaque panneau. Dans l'espace, mesurer une hauteur est pénible. Le produit vectoriel fait le travail : sa norme est une aire.

Devine : Un panneau posé au sol

Un panneau a pour sommets O, $(3;0;0)$ et $(0;4;0)$. Quelle est son aire ?

A. 6

Juste.

Le triangle est rectangle en O : $\dfrac{3 \times 4}{2} = 6$.

B. 12

Faux.

C'est l'aire du rectangle, ou du parallélogramme. Le triangle en est la moitié.

C. 5

Faux.

5 est la longueur de l'hypoténuse, pas une aire.

D. 7

Faux.

Additionner 3 et 4 ne donne ni une longueur, ni une aire.

Correction

Le triangle est rectangle en O, de côtés 3 et 4 : son aire vaut $\dfrac{3 \times 4}{2} = 6$.

Avec le produit vectoriel : $(3;0;0) \wedge (0;4;0) = (0;0;12)$, de norme 12, dont la moitié vaut 6.

Réponse : 6.

Propriété : Aire d'un parallélogramme et d'un triangle

L'espace est orienté. Soient A, B, C trois points non alignés et D le point tel que $ABDC$ soit un parallélogramme. L'aire de $ABDC$ est $\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|$, et l'aire du triangle ABC est

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|.$$

Exemple : Le triangle A_1A_2A_3

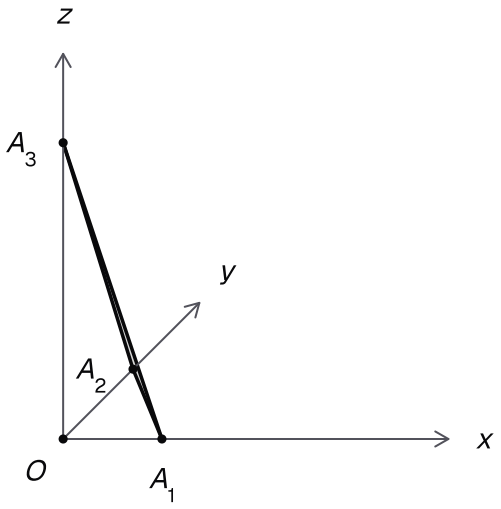
Repère orthonormé direct, $A_1(1;0;0)$, $A_2(0;2;0)$ et $A_3(0;0;3)$. Alors $\overrightarrow{A_1A_2}(-1;2;0)$ et $\overrightarrow{A_1A_3}(-1;0;3)$: ce sont les vecteurs de la partie C1. Donc :

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{A_1A_2} \wedge \overrightarrow{A_1A_3}\\ &= 6\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k},\end{aligned}$$

de norme :

$$\begin{aligned}&\left\|\overrightarrow{A_1A_2} \wedge \overrightarrow{A_1A_3}\right\|\\ &= \sqrt{36 + 9 + 4} = 7.\end{aligned}$$

L'aire du triangle $A_1A_2A_3$ vaut $\dfrac{7}{2}$.



Le triangle A_1A_2A_3, un sommet sur chaque axe : A_1 à 1 sur le premier, A_2 à 2 sur le deuxième, A_3 à 3 sur le troisième.

Un plan par trois points

Propriété : Vecteur normal au plan défini par trois points

L'espace est orienté. Si A, B, C sont trois points non alignés, le vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est non nul et normal au plan (ABC).

Exemple : Le plan (A_1A_2A_3)

Le vecteur $\overrightarrow{A_1A_2} \wedge \overrightarrow{A_1A_3}$, de coordonnées $(6; 3; 2)$, est non nul. Donc A_1, A_2 et A_3 ne sont pas alignés, et ce vecteur est normal au plan $(A_1A_2A_3)$.

- **Équation** : $6x + 3y + 2z + d = 0$.
- **Constante** : A_1 donne $6 + d = 0$, donc $d = -6$.
- **Résultat** : $(A_1A_2A_3) : 6x + 3y + 2z - 6 = 0$.
- **Contrôle** : A_2 donne $6 - 6 = 0$ et A_3 donne $6 - 6 = 0$.

Méthode : Un plan par trois points

1. **Vecteurs** : calcule $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. **Normal** : calcule $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$. S'il est non nul, les points ne sont pas alignés, et ce vecteur $(a; b; c)$ est normal au plan.

3. **Équation** : $ax + by + cz + d = 0$, puis d grâce à A.

4. **Contrôle** avec B et avec C.

À toi : Exemple à compléter : un plan par trois points

Le plan passe par $A_1(1;0;0)$, $A_2(0;2;0)$ et le drone $Q(2;3;6)$. Complète les pointillés.

1. $\overrightarrow{A_1A_2}(-1;2;0)$ et $\overrightarrow{A_1Q}(\ldots;3;6)$.

2. $\overrightarrow{A_1A_2} \wedge \overrightarrow{A_1Q} = (2\times 6 - 0\times 3)\vec{i} - (\ldots)\vec{j} + ((-1)\times 3 - 1\times 2)\,\vec{k}$, soit $12\vec{i} + \ldots\vec{j} - 5\vec{k}$.

3. Ce vecteur est non nul : une équation s'écrit $12x + \ldots y - 5z + d = 0$.

4. A_1 donne $12 + d = 0$, donc $d = \ldots$

Indice 1
Premier pointillé : l'abscisse de Q moins celle de A_1.
Indice 2
Composante sur $\vec{j}$: le déterminant des lignes des x et des z, précédé d'un signe moins.
Indice 3
Contrôle ton équation avec A_2 et avec Q.

Réponse
1. $\overrightarrow{A_1Q}(1;3;6)$.

2. Composante sur $\vec{j}$: $-\left((-1)\times 6 - 1\times 0\right) = 6$, d'où $12\vec{i} + 6\vec{j} - 5\vec{k}$.

3. L'équation s'écrit $12x + 6y - 5z + d = 0$.

4. $d = -12$. Ainsi (A_1A_2Q) : $12x + 6y - 5z - 12 = 0$.

Contrôle : A_2 donne $12 - 12 = 0$ et Q donne $24 + 18 - 30 - 12 = 0$.

À toi : Le plan du triangle KLN

Avec $K(1;0;-1)$, $L(3;2;0)$ et $N(2;-2;1)$, détermine une équation du plan (KLN).

Indice 1
Les vecteurs $\overrightarrow{KL}$ et $\overrightarrow{KN}$ ont été calculés dans la partie A.
Indice 2
Calcule leur produit vectoriel. Tu peux ensuite le diviser par 3.
Indice 3
Trouve la constante avec K, puis contrôle avec L et N.

Réponse
On a $\overrightarrow{KL}(2;2;1)$ et $\overrightarrow{KN}(1;-2;2)$, donc :

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{KL} \wedge \overrightarrow{KN}\\ &= (4+2)\vec{i} - (4-1)\vec{j}\\ &\quad + (-4-2)\vec{k}\\ &= 6\vec{i} - 3\vec{j} - 6\vec{k}.\end{aligned}$$

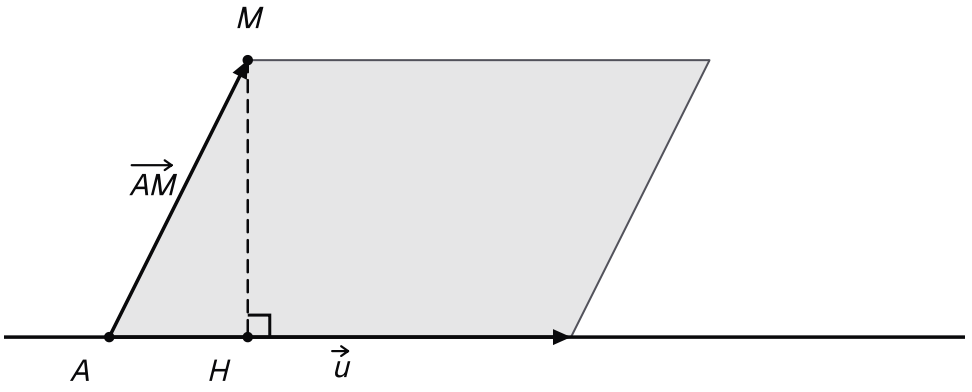
Il est non nul. On prend comme vecteur normal le vecteur colinéaire $(2; -1; -2)$, plus simple.

Une équation s'écrit $2x - y - 2z + d = 0$, et K donne $2 + 2 + d = 0$, donc $d = -4$.

Réponse : (KLN) : $2x - y - 2z - 4 = 0$. Contrôle : L donne $6 - 2 - 0 - 4 = 0$ et N donne $4 + 2 - 2 - 4 = 0$.

Distance d'un point à une droite

Prends une droite qui passe par un point A et dirigée par $\vec{u}$, puis un point M. La norme $\left\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\right\|$ est l'aire du parallélogramme construit sur ces deux vecteurs. Sa base mesure $\|\vec{u}\|$. Sa hauteur est la distance de M à la droite : il suffit de diviser.



Le parallélogramme construit sur AM et u : sa base mesure la norme de u, sa hauteur MH est la distance de M à la droite.

Propriété : Distance d'un point à une droite

L'espace est orienté. Soient (D) la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ non nul, et M un point de l'espace. La distance de M à (D), c'est-à-dire MH où H est le projeté orthogonal de M sur (D), est

$$d(M,(D)) = \frac{\left\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\right\|}{\|\vec{u}\|}.$$

Exemple : Distance de A_3 à la droite (A_1A_2)

La droite (A_1A_2) passe par A_1 et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{A_1A_2}(-1;2;0)$, de norme $\sqrt{5}$.

Par antisymétrie, $\overrightarrow{A_1A_3} \wedge \overrightarrow{A_1A_2}$ est l'opposé de $\overrightarrow{A_1A_2} \wedge \overrightarrow{A_1A_3}$: il a la même norme, 7. Donc :

$$d(A_3, (A_1A_2)) = \frac{7}{\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{5}.$$

À toi : L'aire du triangle KLN

Calcule l'aire du triangle KLN avec le produit vectoriel. Compare avec la partie A, où $KL = KN = 3$ et l'angle en K est droit.

Indice 1
Le produit vectoriel $\overrightarrow{KL} \wedge \overrightarrow{KN}$ vient d'être calculé.
Indice 2
Calcule sa norme, puis prends-en la moitié.

Réponse
On calcule la norme du produit vectoriel :

$$\begin{aligned} &\left\|\overrightarrow{KL} \wedge \overrightarrow{KN}\right\| \\ &= \sqrt{36 + 9 + 36} \\ &= \sqrt{81} = 9. \end{aligned}$$

L'aire vaut donc $\dfrac{9}{2}$.

Contrôle par la partie A : le triangle est rectangle en K, d'aire $\dfrac{KL \times KN}{2} = \dfrac{3 \times 3}{2} = \dfrac{9}{2}$.

Réponse : $\dfrac{9}{2}$, par les deux méthodes.

À toi

Méthode : Aire et distance

1. **Aire** du triangle ABC : norme de $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$, divisée par 2.
2. **Distance** de M à une droite : choisis un point A et un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite.
3. **Norme** : calcule celle de $\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}$.
4. **Quotient** : divise par $\|\vec{u}\|$, puis simplifie la racine.

À toi : Distance de N à la droite (KL)

On a $\left\|\overrightarrow{KN} \wedge \overrightarrow{KL}\right\| = 9$ et $KL = 3$. Quelle est la distance de N à la droite (KL) ?

A. 9

Faux.
9 est l'aire du parallélogramme. Il faut encore diviser par la base $KL = 3$.

B. 1

Faux.
Tu as divisé par $KL^2 = 9$. On divise par la norme de $\overrightarrow{KL}$, sans carré.

C. 3

Juste.
$\dfrac{9}{3} = 3$. C'est aussi KN, car le triangle est rectangle en K.

D. $\dfrac{9}{2}$

Faux.
$\dfrac{9}{2}$ est l'aire du **triangle** KLN, pas une distance.

Correction

$$d(N,(KL)) = \frac{\left\|\overrightarrow{KN} \wedge \overrightarrow{KL}\right\|}{\left\|\overrightarrow{KL}\right\|} = \frac{9}{3} = 3.$$

Contrôle : le triangle KLN est rectangle en K, donc la distance de N à (KL) est $KN = 3$.

Réponse : 3.

Attention : La moitié et la division

✗ Prendre $\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|$ pour l'aire du triangle : c'est celle du parallélogramme, le double.

✗ Oublier de diviser par $\|\vec{u}\|$ dans la distance à une droite.

✓ Triangle : divise par 2. Distance : divise par la norme du vecteur directeur.

Coin examen

Méthode : Coin examen : produit vectoriel et non-alignement

Le produit vectoriel est à vérifier dans 10 des 13 sujets qui ont un exercice d'espace, le plus souvent pour $0{,}5$ point. Le non-alignement qu'il prouve est noté $0{,}25$ dans 1 sujet. Avec A_1, A_2 et A_3, rédige ainsi :

> Le repère est orthonormé direct. On a $\overrightarrow{A_1A_2}(-1;2;0)$ et $\overrightarrow{A_1A_3}(-1;0;3)$, donc $\overrightarrow{A_1A_2} \wedge \overrightarrow{A_1A_3} = 6\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$. ($0{,}5$ pt) Ce vecteur n'est pas nul, donc A_1, A_2 et A_3 ne sont pas alignés. ($0{,}25$ pt)

La seconde phrase prouve que $(A_1A_2A_3)$ est bien un plan.

À retenir : Un calcul, trois réponses

Le seul vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ répond à trois questions :

Question	Ce qu'on regarde
Les points sont-ils alignés ?	le vecteur est-il nul ?
Une équation du plan (ABC)	le vecteur lui-même, normal au plan
L'aire du triangle ABC	la moitié de sa norme

Au bac : l'exercice d'espace, rédigé

Le sujet type

Dans les 13 sujets consultés qui ont un exercice d'espace, cet exercice vaut 3 points. Dans 12 d'entre eux, les questions suivent au moins en partie le même chemin : produit vectoriel, plan, sphère, distance, position, droite orthogonale. Voici un sujet de ce type, construit par BURHAN avec des valeurs neuves. Les points forment un barème indicatif, calqué sur la structure des barèmes consultés.

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère $A(1;0;0)$, $B(2;1;0)$, $C(0;0;2)$ et l'ensemble (S') : $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 6z - 6 = 0$.

1. Vérifier que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$. (0,5 pt)
2. En déduire que $2x - 2y + z - 2 = 0$ est une équation du plan (ABC). (0,25 pt)
3. Montrer que (S') est la sphère de centre $\Omega'(3;-1;3)$ et de rayon 5. (0,5 pt)
4. Calculer $d(\Omega', (ABC))$, puis montrer que (ABC) coupe (S') selon un cercle (Γ'). (0,75 pt)
5. Calculer le rayon de (Γ'). (0,25 pt)
6. Donner une représentation paramétrique de la droite (Δ') passant par Ω' et orthogonale à (ABC). (0,25 pt)
7. Déterminer le centre H' de (Γ'). (0,5 pt)

Questions 1 et 2

Méthode : Question 1, rédigée

On a $\overrightarrow{AB}(1;1;0)$ et $\overrightarrow{AC}(-1;0;2)$. Le repère est orthonormé direct, donc :

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\\ &= (1 \times 2 - 0 \times 0)\vec{i}\\ &\quad - (1 \times 2 - 0 \times (-1))\,\vec{j}\\ &\quad + (1 \times 0 - 1 \times (-1))\,\vec{k}\\ &= 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}.\end{aligned}$$

Dans les barèmes consultés, ce produit vectoriel vaut le plus souvent $0{,}5$ point.

À toi : Question 2

Rédige la question 2 comme sur ta copie.

Indice 1
« En déduire » : utilise le résultat de la question 1.
Indice 2
Un produit vectoriel non nul donne deux informations : des points non alignés, et un vecteur normal.
Indice 3
Trouve le terme constant δ de l'équation avec un des trois points.

Réponse
Le vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}(2;-2;1)$ est non nul. Donc A, B et C ne sont pas alignés, et ce vecteur est normal au plan (ABC). Une équation de (ABC) s'écrit $2x - 2y + z + \delta = 0$, où δ est le terme constant.

Comme $A \in (ABC)$: $2 - 0 + 0 + \delta = 0$, donc $\delta = -2$. Ainsi (ABC) : $2x - 2y + z - 2 = 0$.

Autre rédaction acceptée : justifier que les points ne sont pas alignés, puis vérifier que A, B et C satisfont l'équation.

Questions 3 et 4

À toi : Question 3

Rédige la question 3 comme sur ta copie : l'énoncé donne le centre et le rayon, à toi de les justifier.

Indice 1
Complète un carré en x, un en y et un en z.
Indice 2
Fais passer toutes les constantes dans le second membre.
Indice 3
Conclus par le signe du second membre, puis donne le centre et le rayon séparément.

Réponse
On complète les carrés :

$$x^2 - 6x = (x-3)^2 - 9$$
$$y^2 + 2y = (y+1)^2 - 1$$
$$z^2 - 6z = (z-3)^2 - 9$$

L'équation devient :

$$\begin{aligned}(x-3)^2 + (y+1)^2 \\ + (z-3)^2 \\ = 9 + 1 + 9 + 6 = 25.\end{aligned}$$

Comme $25 > 0$, (S') est une sphère, de centre $\Omega'(3;-1;3)$ ($0{,}25$ pt) et de rayon $\sqrt{25} = 5$ ($0{,}25$ pt).

Dans les barèmes consultés, le centre et le rayon valent souvent $0{,}25$ point chacun.

Méthode : Question 4, rédigée

Formule ($0{,}25$ pt) :

$$\begin{aligned}&d(\Omega', (ABC)) \\ &= \frac{|2 \times 3 - 2 \times (-1) + 3 - 2|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}}.\end{aligned}$$

Valeur ($0{,}25$ pt) : $d(\Omega', (ABC)) = \dfrac{9}{3} = 3$.

Position ($0{,}25$ pt) : $3 < 5$, donc $d(\Omega', (ABC)) < R$. Le plan (ABC) coupe (S') selon un cercle (Γ').

Écris la formule **avant** la valeur : dans les barèmes consultés, elle est souvent notée à part.

Questions 5 à 7

Vérifie : Question 5 : le rayon du cercle

On a $R = 5$ et $d = 3$. Quel est le rayon de (Γ') ?

A. 2

Faux.
C'est $R - d$. Le rayon du cercle se calcule avec Pythagore.

B. 4

Juste.
$\sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$.

C. 16

Faux.
C'est $R^2 - d^2$, sans la racine.

D. $\sqrt{34}$

Faux.
C'est $\sqrt{R^2 + d^2}$. Or R est l'hypoténuse : il faut soustraire.

Correction

Le rayon de (Γ') vaut :

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{R^2 - d^2} \\ &= \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4. \end{aligned}$$

Réponse : 4.

À toi : Questions 6 et 7

Rédige les questions 6 et 7 : la droite (Δ'), puis le centre H' de (Γ').

Indice 1

(Δ') est orthogonale à (ABC) : son vecteur directeur est un vecteur normal du plan.

Indice 2

Pour H', reporte la représentation de (Δ') dans l'équation de (ABC).

Indice 3

Contrôle : H' doit vérifier l'équation de (ABC).

Réponse

6. (Δ') passe par $\Omega'(3;-1;3)$ et a pour vecteur directeur $\vec{n}(2;-2;1)$:

$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -1 - 2t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 3 + t \end{cases}$$

7. Le centre H' de (Γ') est le projeté orthogonal de Ω' sur (ABC). C'est donc le point commun à (Δ') et à (ABC). On reporte :

$$\begin{aligned} &2(3 + 2t) - 2(-1 - 2t) \\ &\quad + (3 + t) - 2 = 0, \end{aligned}$$

soit $9 + 9t = 0$, donc $t = -1$.

D'où $H'(1;1;2)$. Contrôle : $2 - 2 + 2 - 2 = 0$.

Ta copie

À retenir : Cinq réflexes

1. **Rappelle** que le repère est orthonormé direct avant un produit vectoriel.
2. **Justifie** le non-alignement par un produit vectoriel non nul.
3. **Écris** la formule de distance avant sa valeur.
4. **Compare** d et R dans une phrase, avant de chercher le rayon ou le centre du cercle.

5. **Contrôle** chaque point trouvé dans l'équation qu'il doit vérifier.

Remarque : Et si le plan était tangent ?

Dans 5 des 13 sujets, le plan est **tangent** à la sphère : on trouve $d = R$. La rédaction change peu. On conclut que le plan est tangent, puis la droite orthogonale donne le **point de contact**, au lieu du centre du cercle.

Exemple : le plan $2x - 2y + z + 4 = 0$ est tangent à (S'), car sa distance à Ω' vaut $\dfrac{|6 + 2 + 3 + 4|}{3} = 5$, le rayon.
Son point de contact est $\left(-\dfrac{1}{3}; \dfrac{7}{3}; \dfrac{4}{3}\right)$.

Tu sais maintenant enchaîner les gestes de l'exercice d'espace. Dans les sujets consultés, chaque question vaut de $0{,}25$ à 1 point, et chacune se rédige presque mot pour mot. Refais ce sujet sans regarder les réponses : c'est le meilleur entraînement.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Géométrie dans l'espace » (2bac · sciences-experimentales · mathematiques)