BURHAN

Fonctions primitives : fiche de révision

2ème Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-experimentales/mathematiques/fonctions-primitives/resume

Chapitre	Semestre
Fonctions primitives	Semestre 1

L'essentiel du chapitre

Primitiver, c'est **dériver à l'envers** : tu cherches une fonction F dont la dérivée redonne f. Tout le chapitre tient dans ce va-et-vient, et un seul contrôle suffit toujours : dérive ta réponse.

À retenir : Quatre réflexes

- **Annonce l'intervalle et dis « une » primitive** : une primitive se cherche sur un intervalle I ; il y en a une infinité, et « la » primitive exige une condition.
- **La somme et le coefficient passent, le produit non** : pour un produit, cherche une forme composée ou développe.
- **Nomme u et calcule u'** avant toute forme composée, puis ajuste la constante.
- **Contrôle en dérivant** : c'est aussi la question de primitive la plus fréquente, présente dans 10 des 15 sujets consultés.

Définition, sur un intervalle I

$$F'(x) = f(x) \text{ pour tout } x \in I$$

Toutes les primitives

$$x \mapsto F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Celle qui vaut y_0 en x_0

$$G(x) = F(x) + y_0 - F(x_0)$$

Linéarité, a et b réels

$$af + bg \longrightarrow aF + bG$$

Puissance, r rationnel, r ≠ −1, x > 0

$$x^r \longrightarrow \frac{x^{r+1}}{r+1}$$

Forme composée, n entier naturel

$$u'\,u^n \longrightarrow \frac{u^{n+1}}{n+1}$$

Primitive d'une fonction

Définition : Primitive d'une fonction sur un intervalle

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On appelle **primitive de f sur I** toute fonction F dérivable sur I telle que, pour tout $x \in I$:

$$F'(x) = f(x).$$

Théorème : Existence de primitives d'une fonction continue

Toute fonction **continue sur un intervalle** I admet des primitives sur I.

Propriété : Ensemble des primitives d'une fonction

Soit F une primitive de f sur un intervalle I. Les primitives de f sur I sont exactement les fonctions

$$x \mapsto F(x) + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Deux primitives de f sur I diffèrent donc d'une constante.

En clair. F est une primitive de f sur I quand dériver F redonne exactement f, en chaque réel de I.

Une fonction continue sur un intervalle en possède toujours (résultat admis), même quand aucune formule ne l'écrit.

Dès que tu en tiens une, tu les as toutes : ajoute une constante réelle c.

Méthode : prouver qu'une fonction donnée est une primitive

Dans 10 des 15 sujets consultés, la fonction à contrôler est fournie ; elle est nommée H dans 6 : tu ne la cherches pas, tu la testes.

1. **Dérivabilité** : dis pourquoi H est dérivable sur l'intervalle (somme, produit, quotient, racine d'une quantité strictement positive).
2. **Calcul** : dérive H, puis simplifie jusqu'à reconnaître $h(x)$.
3. **Conclusion** : écris l'égalité $H'(x) = h(x)$ pour tout x de l'intervalle, suivie de « donc H est une primitive de h » et du nom de l'intervalle.

Exemple : une racine dans un produit

Sur $]0, +\infty[$, on considère les fonctions h et H définies par $h(x) = \dfrac{3x-1}{2\sqrt{x}}$ et $H(x) = (x-1)\sqrt{x}$.

H est le produit de deux fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$ et, pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} H'(x) &= 1 \times \sqrt{x} \\ &\quad + (x-1) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{2x + x - 1}{2\sqrt{x}} = h(x). \end{aligned}$$

Donc H est une primitive de h sur $]0, +\infty[$; $H + 7$ en est une autre.

La primitive qui vérifie une condition

Propriété : Primitive prenant une valeur donnée en un point

Soit f une fonction qui admet des primitives sur un intervalle I, x_0 un élément de I et y_0 un réel. Il existe **une unique** primitive G de f sur I telle que

$$G(x_0) = y_0.$$

Si F est une primitive de f sur I, alors, pour tout $x \in I$:

$$G(x) = F(x) + y_0 - F(x_0).$$

Méthode : trouver la constante

1. **Une primitive** F d'abord, sans constante.
2. **Toutes** : écris $G(x) = F(x) + c$, avec c réel.
3. **La condition** $G(x_0) = y_0$ devient une équation du premier degré d'inconnue c : résous-la.
4. **Contrôle** : remplace x par x_0 dans l'expression finale et retrouve y_0.

Exemple : une valeur imposée en 2

On cherche la primitive G sur $\mathbb{R}$ de la fonction g définie par $g(x) = 4x^3 - 2x$, telle que $G(2) = 5$.

Il existe un réel c tel que, pour tout réel x, $G(x) = x^4 - x^2 + c$.

La condition donne $16 - 4 + c = 5$, donc $c = -7$. Pour tout réel x :

$$G(x) = x^4 - x^2 - 7.$$

Contrôle : $G(2) = 16 - 4 - 7 = 5$.

Primitives usuelles : le tableau des dérivées lu à l'envers

Propriété : Primitives des fonctions usuelles

Chaque ligne se lit dans le tableau des dérivées usuelles : la dérivée de F est f sur l'intervalle indiqué.

Fonction $f(x)$	Une primitive $F(x)$	Intervalle
a (a réel)	ax	$\mathbb{R}$
x^n ($n \in \mathbb{N}$)	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x^2}$	$-\dfrac{1}{x}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$\dfrac{1}{x^n}$ ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$)	$-\dfrac{1}{(n-1)\,x^{n-1}}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$]0, +\infty[$
x^r ($r \in \mathbb{Q}, r \neq -1$)	$\dfrac{x^{r+1}}{r+1}$	$]0, +\infty[$

Propriété : Primitives des fonctions trigonométriques usuelles

Soit a un réel non nul et b un réel.

Fonction $f(x)$	Une primitive $F(x)$	Intervalle
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
$1+\tan^2 x$	$\tan x$	$\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[, k\in\mathbb{Z}$
$\cos(ax+b)$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b)$	$\mathbb{R}$
$\sin(ax+b)$	$-\frac{1}{a}\cos(ax+b)$	$\mathbb{R}$

Propriété : Primitives d'une somme et du produit par un réel

Soit F et G des primitives de f et g sur un intervalle I, et k un réel. Alors, sur I :

- $F+G$ est une primitive de $f+g$;
- kF est une primitive de kf.

Chaque ligne de ces tableaux se lit dans le tableau des dérivées, à l'envers : pour tout $x>0$, $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, donc une primitive de $\frac{1}{\sqrt{x}}$ est $2\sqrt{x}$ sur $]0,+\infty[$.

Le nombre qui « tombe » en dérivant doit être compensé en primitivant : voilà pourquoi on divise.

Le cas de $\frac{1}{x}$. Avec $r=-1$, le dénominateur $r+1$ vaut 0 : aucune ligne ne donne de primitive de $\frac{1}{x}$. Elle en a pourtant sur $]0,+\infty[$, puisqu'elle y est continue : c'est le chapitre des fonctions logarithmiques qui la construit.

Les primitives de $\frac{u'}{u}$, puis celles des formes liées à l'exponentielle, viendront dans les chapitres suivants.

Méthode : une somme de termes usuels

1. **Réécris** f en somme de termes « nombre × fonction du tableau » : développe un produit, coupe une fraction dont le dénominateur est une puissance de x, remplace $\sqrt{x}$ par $x^{\frac{1}{2}}$.
2. **Primitive terme à terme**, en gardant chaque nombre devant.
3. **Additionne**, annonce l'intervalle, puis dérive pour contrôler.

Exemple : une racine et une puissance négative

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=3\sqrt{x}+\dfrac{2}{x^3}$.

Premier terme. Pour tout $x>0$, $3\sqrt{x}=3x^{\frac{1}{2}}$, qui a pour primitive $3\times\dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}=2x\sqrt{x}$.

Second terme. $\dfrac{2}{x^3}$ a pour primitive $2\times\left(-\dfrac{1}{2x^2}\right)=-\dfrac{1}{x^2}$.

Somme. Une primitive de f sur $]0,+\infty[$ est la fonction F définie par :

$$F(x)=2x\sqrt{x}-\frac{1}{x^2}.$$

Contrôle. Pour tout $x>0$:

$$\begin{aligned}F'(x)&=2\sqrt{x}+2x\times\frac{1}{2\sqrt{x}}\\&\quad+\frac{2}{x^3}\\&=3\sqrt{x}+\frac{2}{x^3}.\end{aligned}$$

Reconnaître une forme composée

Propriété : Primitives des formes composées usuelles

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.

Fonction	Une primitive	Condition sur I
$u'\,u^n$ $(n\in\mathbb{N})$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$	aucune
$\dfrac{u'}{u^2}$	$-\dfrac{1}{u}$	u ne s'annule pas
$\dfrac{u'}{u^n}$ $(n\in\mathbb{N},n\geq 2)$	$-\dfrac{1}{(n-1)\,u^{n-1}}$	u ne s'annule pas
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$u>0$
$u'\,u^r$ $(r\in\mathbb{Q},r\neq-1)$	$\dfrac{u^{r+1}}{r+1}$	$u>0$
$u'\cos u$	$\sin u$	aucune
$u'\sin u$	$-\cos u$	aucune

Propriété : Primitive de x ↦ f(ax + b)

Soit f une fonction admettant une primitive F sur un intervalle J, a un réel non nul et b un réel. Sur tout intervalle I tel que $ax+b\in J$ pour tout $x\in I$, la fonction

$$x\mapsto\frac{1}{a}\,F(ax+b)$$

est une primitive de $x\mapsto f(ax+b)$.

Fiche : reconnaître la forme. Avant d'appliquer une ligne du tableau, remplis quatre cases : u, u', la constante à ajuster, la condition sur u.

Expression	u	u'	Constante	Condition	Une primitive
$(3x-1)^4$	$3x-1$	3	$\frac{1}{3}$	aucune	$\frac{(3x-1)^5}{15}$
$\cos x \, \sin^2 x$	$\sin x$	$\cos x$	1	aucune	$\frac{\sin^3 x}{3}$
$\frac{x}{(x^2+3)^2}$	x^2+3	$2x$	$\frac{1}{2}$	$u \neq 0$, vraie sur $\mathbb{R}$	$-\frac{1}{2(x^2+3)}$
$\frac{1}{\sqrt{2x+5}}$	$2x+5$	2	$\frac{1}{2}$	$u > 0$, soit $x > -\frac{5}{2}$	$\sqrt{2x+5}$
$x \sin\left(x^2\right)$	x^2	$2x$	$\frac{1}{2}$	aucune	$-\frac{1}{2}\cos\left(x^2\right)$

Méthode : de l'expression à la forme

1. **Cherche ce qui est enfermé** : sous une puissance, au dénominateur, sous la racine, dans le cosinus ou le sinus. Appelle-le u.
2. **Dérive** u et repère u' dans l'expression, éventuellement multipliée par un nombre.
3. **Ajuste** : fais apparaître le nombre qui manque, et compense-le par son inverse placé devant.
4. **Vérifie la condition** sur u dans l'intervalle, applique la ligne, puis dérive pour contrôler.

Si u' ne figure pas, même à un nombre près, ce n'est pas une forme composée : développe ou réécris.

Exemple : une racine au dénominateur

Sur $]-1, +\infty[$, soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}$.

Posons $u(x) = x^3 + 1$. Pour tout $x > -1$, $u(x) > 0$ et $u'(x) = 3x^2$, donc :

$$f(x) = \frac{1}{3} \times \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}.$$

Une primitive de f sur cet intervalle est la fonction F définie par :

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{3} \times 2\sqrt{u(x)} \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{x^3+1}. \end{aligned}$$

Bonus : l'énoncé général des formes composées

Bonus, pour aller plus loin. L'énoncé ci-dessous explique d'un seul coup toutes les lignes du tableau des formes composées.

Par exemple, avec $v(t) = \dfrac{t^{n+1}}{n+1}$, on a $v'(t) = t^n$ pour tout réel t, et l'on retrouve la ligne $u' \, u^n$.

Les calculs de cette fiche s'en passent.

Propriété : Primitive d'une fonction de la forme u′ × (v′ ∘ u)

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et v une fonction dérivable sur un intervalle J tel que $u(x) \in J$ pour tout $x \in I$. Alors $v \circ u$ est une primitive sur I de la fonction

$$x \mapsto u'(x)\, v'\big(u(x)\big).$$

Quatre pièges à éviter

Attention : Un produit ne se primitive pas facteur par facteur

Pour $x \mapsto (x+1)(x-1)$, le produit des primitives des deux facteurs vaut :

$$\left(\frac{x^2}{2} + x\right)\left(\frac{x^2}{2} - x\right) = \frac{x^4}{4} - x^2$$

Il a pour dérivée $x^3 - 2x$: ce n'est pas la fonction de départ.

Développe d'abord : pour tout réel x, $(x+1)(x-1) = x^2 - 1$, qui a pour primitive $\dfrac{x^3}{3} - x$.

Attention : Un intervalle, et « une » primitive

$\dfrac{1}{x^3}$ n'est pas définie en 0 : travaille sur $]0, +\infty[$ **ou** sur $]-\infty, 0[$, jamais sur leur réunion, où la constante pourrait changer d'un morceau à l'autre.

Écris par exemple : « sur $]0, +\infty[$, une primitive de $\dfrac{1}{x^3}$ est $-\dfrac{1}{2x^2}$ ».

Et dis « une » : x^3 et $x^3 - 2$ sont deux primitives de $3x^2$ sur $\mathbb{R}$; « la » ne convient que si l'énoncé impose une valeur, comme $G(x_0) = y_0$.

Attention : Le coefficient de x à l'intérieur

La dérivée de $-\cos(4x)$ vaut $4\sin(4x)$, pas $\sin(4x)$. Une primitive de $\sin(4x)$ est donc $-\dfrac{1}{4}\cos(4x)$.

De même, une primitive de $(3x-1)^4$ demande de diviser par 5 **et** par 3.

Une dérivation de contrôle repère cet oubli tout de suite.

Attention : Une puissance sans u′ devant

Dans $(x^2-2)^2$, le facteur $2x$ manque : $\dfrac{(x^2-2)^3}{3}$ a pour dérivée $2x(x^2-2)^2$, ce n'est pas la bonne fonction.

Développe : pour tout réel x, $(x^2-2)^2 = x^4 - 4x^2 + 4$, dont une primitive est $\dfrac{x^5}{5} - \dfrac{4x^3}{3} + 4x$.

Au bac

Constats sur **15 sujets nationaux** 2BAC SE (option française) : **14** contiennent au moins une question de primitive, et **12** barèmes ont été lus. Ces fréquences décrivent ces sujets-là, pas le prochain examen.

Question	Sujets, sur 15	Barème lu
montrer qu'une fonction donnée est une primitive	10	0,25 à 0,75
trouver une primitive usuelle pour calculer une intégrale ou une aire	7	0,25 à 0,5
calculer une intégrale avec la primitive fournie	6	0,5 à 0,75 quand elle est notée à part
variations d'une primitive tirées du signe de la fonction	1	0,75

Remarque : La forme des questions

- Les primitives ne forment jamais un exercice à part dans ces 15 sujets : elles servent dans le bloc d'intégrale, qui clôt le problème d'analyse dans 12 des 15 sujets consultés.
- L'intervalle est toujours précisé, et l'énoncé dit « une primitive », jamais « la primitive ».
- Les 10 fonctions à vérifier comportent toutes le logarithme ou l'exponentielle : tu retrouveras ce geste dans les chapitres suivants.
- Formes composées polynomiales, fonctions trigonométriques et primitive avec condition ne figurent dans aucun des 15 sujets consultés, ce qui ne veut pas dire « jamais demandé » : le calcul intégral s'en sert.

Méthode : Rédiger la vérification

1. **Rappelle la définition** : tu dois prouver $H'(x) = h(x)$ pour tout x de l'intervalle ; un barème lu accorde $0{,}25$ à ce seul rappel.
2. **Justifie la dérivabilité**, puis dérive et simplifie.
3. **Conclus** par la phrase complète, avec l'intervalle.

Cette vérification est notée à part dans les barèmes lus des sessions 2017 (rattrapage), 2018 (normale) et 2023 (normale) : même si la suite te résiste, ces premiers points sont à ta portée.

Checklist avant le devoir

> **À retenir : Je sais…**
>
> - prouver par dérivation qu'une fonction donnée est une primitive, et conclure avec l'intervalle ;

- écrire toutes les primitives d'une fonction à partir d'une seule ;
- trouver la primitive qui prend une valeur donnée, puis la contrôler ;
- lire le tableau des dérivées à l'envers pour les fonctions usuelles ;
- réécrire une fonction en somme de termes usuels avant de primitiver ;
- nommer u et u', ajuster la constante et vérifier la condition sur u ;
- expliquer pourquoi $\frac{1}{x}$ échappe à la formule des puissances.