BURHAN

Fonctions primitives : exercices, niveau examen

2ème Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-experimentales/mathematiques/fonctions-primitives/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Fonctions primitives	Niveau examen	5

Exercice 1 — 3 pts

Une primitive pour trouver un minimum

Soit h la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $h(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2}$.

1. — 0,5 pts

Calcule $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$.

INDICE

Peux-tu écrire $h(x)$ comme une différence de deux termes plus simples ?

2. — 0,5 pts

Étudie le signe de $h(x)$ sur $]0,+\infty[$.

INDICE

Quel est le signe du dénominateur ? Le numérateur x^2-4 peut-il se factoriser ?

3. — 0,5 pts

Montre que la fonction H définie sur $]0,+\infty[$ par $H(x)=x+\dfrac{4}{x}$ est une primitive de h sur $]0,+\infty[$.

INDICE

Que faut-il établir pour qu'une fonction soit une primitive de h sur un intervalle ? Après avoir dérivé, réduis $H'(x)$ au même dénominateur que $h(x)$.

4. — 0,75 pts

Déduis des questions 2 et 3 le sens de variation de H sur $]0,+\infty[$ (les limites de H ne sont pas demandées), puis le minimum de H sur cet intervalle.

INDICE

D'après la question 3, quelle est la dérivée de H ? Que t'apprend alors la question 2 ?

5. — 0,75 pts

Détermine la primitive G de h sur $]0,+\infty[$ qui s'annule en 2, puis montre que $G(x)\geq 0$ pour tout $x>0$.

INDICE

Comment s'écrivent toutes les primitives de h sur $]0,+\infty[$ à partir de H ? Pour le signe, que t'apprend la question 4 sur les valeurs de H ?

Exercice 2 — 1,75 pts

Une puissance composée et sa primitive

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 6x\left(x^2-3\right)^2$.

1. — 0,75 pts

Montre que h est impaire, calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$, puis déduis-en $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)$.

INDICE

Calcule $h(-x)$. Pour la limite en $+\infty$, quelle est la limite de chacun des deux facteurs ? Comment la parité relie-t-elle les deux limites ?

2. — 0,5 pts

Soit H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $H(x) = \left(x^2-3\right)^3$. Montre que H est une primitive de h sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Que faut-il établir ? H est de la forme u^3 : quelle est la dérivée de u^3 ?

3. — 0,5 pts

Soit k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = 3x\left(x^2-3\right)^2 + 2x$. Déduis de la question 2 une primitive K de k sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Peux-tu écrire $3x\left(x^2-3\right)^2$ à l'aide de $h(x)$? Que donne alors la linéarité ?

Exercice 3 — 2 pts

Asymptotes d'une fonction rationnelle, puis une primitive

Soit h la fonction définie sur $I = \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ par $h(x) = x - 1 + \frac{2}{(2x+1)^2}$, et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. — 0,5 pts

Calcule la limite de $h(x)$ quand x tend vers $-\frac{1}{2}$ par la droite, puis interprète graphiquement le résultat.

INDICE

Quand $x \to -\frac{1}{2}$ avec $x > -\frac{1}{2}$, vers quoi tend $(2x+1)^2$, et avec quel signe ?

2. — 0,5 pts

Montre que la droite (Δ) d'équation $y = x - 1$ est asymptote à $(\mathcal{C})$ au voisinage de $+\infty$, et précise la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à (Δ) sur I.

INDICE

Que vaut $h(x) - (x-1)$? Étudie sa limite en $+\infty$, puis son signe.

3. — 0,5 pts

Soit k la fonction définie sur I par $k(x) = \frac{2}{(2x+1)^2}$. Montre que la fonction K définie sur I par $K(x) = \frac{2x}{2x+1}$ est une primitive de k sur I.

INDICE

Que faut-il établir ? K est un quotient : quelle formule de dérivation utilises-tu, et son dénominateur s'annule-t-il sur I ?

4. — 0,5 pts

Déduis de la question 3 une primitive H de h sur I.

INDICE

Écris $h(x)$ à l'aide de $k(x)$. Il ne te reste qu'un terme à primitiver : lequel ?

Exercice 4 2,25 pts

Une racine, sa primitive et les tangentes

Soit h la fonction définie sur $I =]1, +\infty[$ par $h(x) = \dfrac{3x}{2\sqrt{x-1}}$, et H la fonction définie sur I par $H(x) = (x+2)\sqrt{x-1}$. On note (Γ) la courbe représentative de H dans un repère orthonormé.

1. 0,5 pts

Montre que H est une primitive de h sur I.

INDICE

Que faut-il établir pour qu'une fonction soit une primitive de h sur I ? H est un produit : pourquoi $x \mapsto \sqrt{x-1}$ est-elle dérivable sur I, et quelle est sa dérivée ?

2. 0,5 pts

Déduis de la question 1 toutes les primitives de h sur I. Justifie ensuite que, en deux points de même abscisse $a \in I$, les courbes de deux primitives de h ont des tangentes parallèles.

INDICE

Comment s'écrivent toutes les primitives à partir de l'une d'elles ? Quel est le coefficient directeur de la tangente à la courbe d'une primitive F au point d'abscisse a ?

3. 0,5 pts

Donne une équation de la tangente (T) à (Γ) au point d'abscisse 2.

INDICE

Le coefficient directeur de (T) est $H'(2)$: que vaut-il d'après la question 1 ? Calcule aussi $H(2)$.

4. 0,75 pts

Montre que, pour tout $x \in I$:

$$h(x) - 3 = \frac{3\left(\sqrt{x-1} - 1\right)^2}{2\sqrt{x-1}}.$$

Déduis-en que (T) est la seule tangente à (Γ) de coefficient directeur 3, et que toute tangente à (Γ) a un coefficient directeur supérieur ou égal à 3.

INDICE

Réduis $h(x) - 3$ au même dénominateur, puis écris $x = \left(\sqrt{x-1}\right)^2 + 1$ dans le numérateur : quelle identité remarquable reconnais-tu ? Pour les tangentes, que vaut le coefficient directeur de la tangente à (Γ) au point d'abscisse a ?

Exercice 5 2,5 pts

Une fonction impaire et la parité de ses primitives

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \dfrac{6x}{\left(x^2+3\right)^2}$.

1. 0,5 pts

Montre que la fonction H définie sur $\mathbb{R}$ par $H(x) = \dfrac{x^2}{x^2+3}$ est une primitive de h sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Que faut-il établir ? H est un quotient : son dénominateur s'annule-t-il sur $\mathbb{R}$?

2. 0,75 pts

Écris $h(x)$ sous la forme $a\,\dfrac{u'(x)}{u(x)^2}$, en précisant le réel a et la fonction u, puis déduis-en une primitive K de h sur $\mathbb{R}$. Calcule enfin $H(x) - K(x)$: le résultat était-il prévisible ?

INDICE

Quelle fonction u a pour dérivée $2x$? Une primitive de $\dfrac{u'}{u^2}$ est $-\dfrac{1}{u}$ lorsque u ne s'annule pas. Que sais-tu de deux primitives d'une même fonction sur un intervalle ?

3. 0,5 pts

Vérifie que h est impaire. Soit F une primitive quelconque de h sur $\mathbb{R}$ et L la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $L(x) = F(-x)$. Justifie que L est, elle aussi, une primitive de h sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Calcule $h(-x)$. L est la composée de $x \mapsto -x$ suivie de F : quelle est sa dérivée ?

4. 0,75 pts

Déduis de la question 3 que toute primitive de h sur $\mathbb{R}$ est une fonction paire, puis contrôle ce résultat sur H et sur K.

INDICE

F et L sont deux primitives de h sur $\mathbb{R}$: que sais-tu de $L - F$? Pour trouver cette constante, choisis une valeur de x qui simplifie $F(-x) - F(x)$.