BURHAN

Fonctions primitives : exercices, niveau examen

2ème Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-experimentales/mathematiques/fonctions-primitives/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Fonctions primitives	Niveau examen	5

Exercice 1 3 pts

Une primitive pour trouver un minimum

Soit h la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $h(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2}$.

1. 0,5 pts

Calcule $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$.

INDICE

Peux-tu écrire $h(x)$ comme une différence de deux termes plus simples ?

CORRIGÉ

Écriture utile. Pour tout $x>0$:

$$h(x)=1-\frac{4}{x^2}.$$

Limite en 0. Quand $x\to 0^+$, $x^2\to 0^+$, donc $\dfrac{4}{x^2}\to+\infty$ et :

$$\lim_{x\to 0^+} h(x)=-\infty.$$

Limite en $+\infty$. Quand $x\to+\infty$, $\dfrac{4}{x^2}\to 0$, donc :

$$\lim_{x\to+\infty} h(x)=1.$$

Conclusion. $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=1$.

2. 0,5 pts

Étudie le signe de $h(x)$ sur $]0,+\infty[$.

INDICE

Quel est le signe du dénominateur ? Le numérateur x^2-4 peut-il se factoriser ?

CORRIGÉ

Factorisation. Pour tout $x>0$:

$$h(x)=\frac{(x-2)(x+2)}{x^2}.$$

Signe. Pour $x>0$, $x^2>0$ et $x+2>0$: $h(x)$ a le signe de $x-2$.

x	$]0,2[$	2	$]2,+\infty[$
$h(x)$	$-$	0	$+$

Conclusion. $h(x)<0$ sur $]0,2[$, $h(2)=0$ et $h(x)>0$ sur $]2,+\infty[$.

3. 0,5 pts

Montre que la fonction H définie sur $]0,+\infty[$ par $H(x)=x+\dfrac{4}{x}$ est une primitive de h sur $]0,+\infty[$.

INDICE

Que faut-il établir pour qu'une fonction soit une primitive de h sur un intervalle ? Après avoir dérivé, réduis $H'(x)$ au même dénominateur que $h(x)$.

CORRIGÉ

Il suffit de montrer que H est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que $H'=h$ sur cet intervalle.

Dérivabilité. H est la somme des fonctions $x\mapsto x$ et $x\mapsto\dfrac{4}{x}$, toutes deux dérivables sur $]0,+\infty[$ (le dénominateur x ne s'y annule pas). Donc H est dérivable sur $]0,+\infty[$.

Calcul. Pour tout $x>0$:

$$\begin{aligned}H'(x)&=1-\frac{4}{x^2}\\&=\frac{x^2-4}{x^2}\\&=h(x).\end{aligned}$$

Conclusion. $H'=h$ sur $]0,+\infty[$, donc H est une primitive de h sur $]0,+\infty[$.

4. 0,75 pts

Déduis des questions 2 et 3 le sens de variation de H sur $]0,+\infty[$ (les limites de H ne sont pas demandées), puis le minimum de H sur cet intervalle.

INDICE

D'après la question 3, quelle est la dérivée de H ? Que t'apprend alors la question 2 ?

CORRIGÉ

Signe de H'. D'après la question 3, $H'=h$. La question 2 donne donc : $H'(x)<0$ sur $]0,2[$, $H'(2)=0$ et $H'(x)>0$ sur $]2,+\infty[$.

Tableau de variations. Avec $H(2)=2+\dfrac{4}{2}=4$:

x	$]0,2[$	2	$]2,+\infty[$
$H'(x)=h(x)$	$-$	0	$+$
H	décroissante	4	croissante

Conclusion. H est strictement décroissante sur $]0,2]$ et strictement croissante sur $[2,+\infty[$. Elle admet donc en 2 un **minimum égal à** 4 sur $]0,+\infty[$.

5. 0,75 pts

Détermine la primitive G de h sur $]0,+\infty[$ qui s'annule en 2, puis montre que $G(x) \geq 0$ pour tout $x > 0$.

INDICE

Comment s'écrivent toutes les primitives de h sur $]0,+\infty[$ à partir de H ? Pour le signe, que t'apprend la question 4 sur les valeurs de H ?

CORRIGÉ

Toutes les primitives. $]0,+\infty[$ est un intervalle et H est une primitive de h sur cet intervalle. Les primitives de h sur $]0,+\infty[$ sont donc les fonctions $H + c$, où c est un réel.

Condition. $G(2) = H(2) + c = 4 + c$, donc $G(2) = 0 \iff c = -4$. Pour tout $x > 0$:

$$G(x) = x + \frac{4}{x} - 4.$$

Signe. D'après la question 4, $H(x) \geq 4$ pour tout $x > 0$, donc $G(x) = H(x) - 4 \geq 0$.

On peut aussi le voir directement : pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} G(x) &= \frac{x^2 - 4x + 4}{x} \\ &= \frac{(x-2)^2}{x}, \end{aligned}$$

quotient d'un carré par un réel strictement positif.

Conclusion. La primitive de h qui s'annule en 2 est la fonction G définie par $G(x) = x + \frac{4}{x} - 4$, et $G(x) \geq 0$ pour tout $x > 0$.

Exercice 2 1,75 pts

Une puissance composée et sa primitive

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 6x\left(x^2-3\right)^2$.

1. 0,75 pts

Montre que h est impaire, calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$, puis déduis-en $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)$.

INDICE

Calcule $h(-x)$. Pour la limite en $+\infty$, quelle est la limite de chacun des deux facteurs ? Comment la parité relie-t-elle les deux limites ?

CORRIGÉ

Parité. $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} h(-x) &= -6x\left((-x)^2-3\right)^2 \\ &= -6x\left(x^2-3\right)^2 \\ &= -h(x). \end{aligned}$$

Donc h est impaire.

Limite en $+\infty$. Quand $x\to+\infty$, $6x\to+\infty$ et $x^2-3\to+\infty$, donc $\left(x^2-3\right)^2\to+\infty$. Par produit :

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty.$$

Limite en $-\infty$. Pour tout réel x, $h(x) = -h(-x)$. Quand $x\to-\infty$, $-x\to+\infty$, donc $h(-x)\to+\infty$ et :

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = -\infty.$$

Conclusion. h est impaire, $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = -\infty$.

2. 0,5 pts

Soit H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $H(x) = \left(x^2-3\right)^3$. Montre que H est une primitive de h sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Que faut-il établir ? H est de la forme u^3 : quelle est la dérivée de u^3 ?

CORRIGÉ

Il suffit de montrer que H est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $H' = h$ sur $\mathbb{R}$.

Dérivabilité. H est une fonction polynôme : elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Calcul. Posons $u(x) = x^2-3$, de sorte que $u'(x) = 2x$. D'après la dérivée d'une puissance, $\left(u^3\right)' = 3u'u^2$. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} H'(x) &= 3\times 2x\left(x^2-3\right)^2 \\ &= 6x\left(x^2-3\right)^2 \\ &= h(x). \end{aligned}$$

Conclusion. $H' = h$ sur $\mathbb{R}$, donc H est une primitive de h sur $\mathbb{R}$.

3. 0,5 pts

Soit k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = 3x\left(x^2-3\right)^2 + 2x$. Déduis de la question 2 une primitive K de k sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Peux-tu écrire $3x\left(x^2-3\right)^2$ à l'aide de $h(x)$? Que donne alors la linéarité ?

CORRIGÉ

Lien avec h. Pour tout réel x, $3x\left(x^2-3\right)^2 = \frac{1}{2}\times 6x\left(x^2-3\right)^2 = \frac{1}{2}\,h(x)$, donc :

$$k(x) = \frac{1}{2}\,h(x) + 2x.$$

Primitive de chaque terme. D'après la question 2, une primitive de $\frac{1}{2}\,h$ est $\frac{1}{2}\,H$; une primitive de $x \mapsto 2x$ est $x \mapsto x^2$.

Conclusion. Par linéarité, une primitive de k sur $\mathbb{R}$ est la fonction K définie par :

$$K(x) = \frac{1}{2}\left(x^2-3\right)^3 + x^2.$$

Contrôle. $K'(x) = \frac{1}{2}\times 6x\left(x^2-3\right)^2 + 2x = k(x)$.

Exercice 3 — 2 pts

Asymptotes d'une fonction rationnelle, puis une primitive

Soit h la fonction définie sur $I = \left]-\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$ par $h(x) = x - 1 + \dfrac{2}{(2x+1)^2}$, et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. — 0,5 pts

Calcule la limite de $h(x)$ quand x tend vers $-\dfrac{1}{2}$ par la droite, puis interprète graphiquement le résultat.

INDICE

Quand $x \to -\dfrac{1}{2}$ avec $x > -\dfrac{1}{2}$, vers quoi tend $(2x+1)^2$, et avec quel signe ?

CORRIGÉ

Limite. Quand x tend vers $-\dfrac{1}{2}$ par la droite, $2x+1 \to 0$ avec $2x+1 > 0$, donc $(2x+1)^2 \to 0^+$ et $\dfrac{2}{(2x+1)^2} \to +\infty$. Comme $x - 1 \to -\dfrac{3}{2}$, par somme :

$$\lim_{x \to \left(-\frac{1}{2}\right)^+} h(x) = +\infty.$$

Conclusion. La limite de $h(x)$ quand x tend vers $-\dfrac{1}{2}$ par la droite est $+\infty$: la droite d'équation $x = -\dfrac{1}{2}$ est asymptote verticale à $(\mathcal{C})$.

2. 0,5 pts

Montre que la droite (Δ) d'équation $y = x - 1$ est asymptote à $(\mathcal{C})$ au voisinage de $+\infty$, et précise la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à (Δ) sur I.

INDICE

Que vaut $h(x) - (x-1)$? Étudie sa limite en $+\infty$, puis son signe.

CORRIGÉ

Écart entre $(\mathcal{C})$ et (Δ). Pour tout $x \in I$:

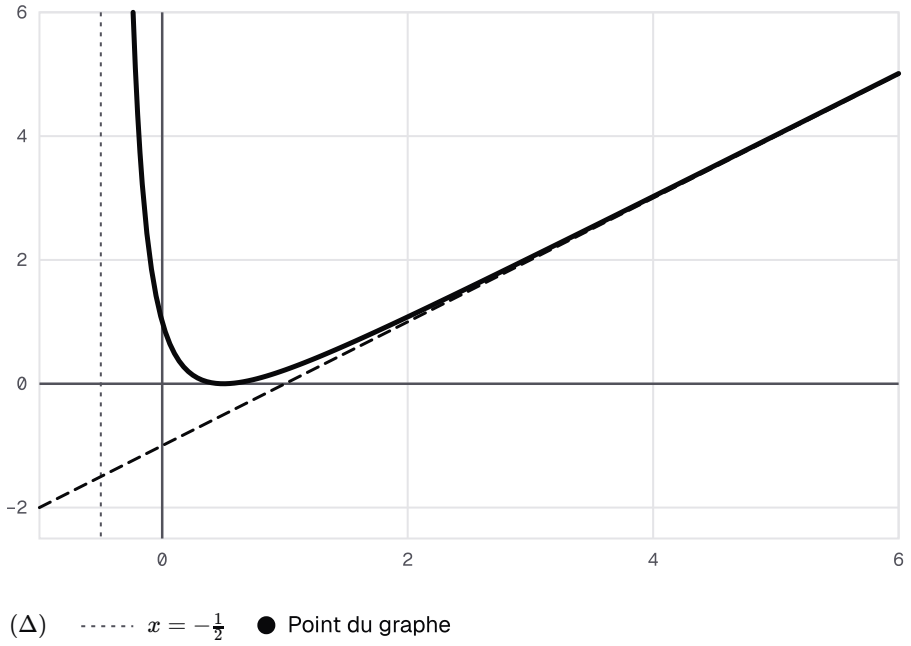
$$h(x) - (x-1) = \frac{2}{(2x+1)^2}.$$

Asymptote. Quand $x \to +\infty$, $(2x+1)^2 \to +\infty$, donc :

$$\lim_{x \to +\infty} \big(h(x) - (x-1)\big) = 0.$$

Position. Pour tout $x \in I$, $\dfrac{2}{(2x+1)^2} > 0$, donc $h(x) > x - 1$.

Conclusion. (Δ) est asymptote oblique à $(\mathcal{C})$ au voisinage de $+\infty$, et $(\mathcal{C})$ est **au-dessus** de (Δ) sur tout l'intervalle I.



La courbe de h(x) = x − 1 + 2/(2x + 1)² avec l'asymptote verticale x = −1/2 et l'asymptote oblique (Δ) : y = x − 1, sous laquelle elle ne passe jamais.

3. 0,5 pts

Soit k la fonction définie sur I par $k(x) = \dfrac{2}{(2x+1)^2}$. Montre que la fonction K définie sur I par $K(x) = \dfrac{2x}{2x+1}$ est une primitive de k sur I.

INDICE

Que faut-il établir ? K est un quotient : quelle formule de dérivation utilises-tu, et son dénominateur s'annule-t-il sur I ?

CORRIGÉ

Il suffit de montrer que K est dérivable sur I et que $K' = k$ sur I.

Dérivabilité. K est le quotient de deux polynômes, et $2x+1 \neq 0$ sur I car $x > -\dfrac{1}{2}$. Donc K est dérivable sur I.

Calcul. Soit $x \in I$. D'après la dérivée d'un quotient :

$$\begin{aligned} K'(x) &= \frac{2(2x+1) - 2x \times 2}{(2x+1)^2} \\ &= \frac{4x + 2 - 4x}{(2x+1)^2} \\ &= \frac{2}{(2x+1)^2} = k(x). \end{aligned}$$

Conclusion. $K' = k$ sur I, donc K est une primitive de k sur I.

4. 0,5 pts

Déduis de la question 3 une primitive H de h sur I.

INDICE

Écris $h(x)$ à l'aide de $k(x)$. Il ne te reste qu'un terme à primitiver : lequel ?

CORRIGÉ

Décomposition. Pour tout $x \in I$, $h(x) = (x-1) + k(x)$.

Primitive de chaque terme. Une primitive de $x \mapsto x - 1$ est $x \mapsto \dfrac{x^2}{2} - x$ et, d'après la question 3, K est une primitive de k sur I.

Conclusion. Par linéarité, une primitive de h sur I est la fonction H définie par :

$$H(x) = \frac{x^2}{2} - x + \frac{2x}{2x+1}.$$

Exercice 4 2,25 pts

Une racine, sa primitive et les tangentes

Soit h la fonction définie sur $I =]1, +\infty[$ par $h(x) = \dfrac{3x}{2\sqrt{x-1}}$, et H la fonction définie sur I par $H(x) = (x+2)\sqrt{x-1}$. On note (Γ) la courbe représentative de H dans un repère orthonormé.

1. 0,5 pts

Montre que H est une primitive de h sur I.

INDICE

Que faut-il établir pour qu'une fonction soit une primitive de h sur I ? H est un produit : pourquoi $x \mapsto \sqrt{x-1}$ est-elle dérivable sur I, et quelle est sa dérivée ?

CORRIGÉ

Il suffit de montrer que H est dérivable sur I et que $H' = h$ sur I.

Dérivabilité. Pour $x \in I$, $x - 1 > 0$. La fonction $x \mapsto \sqrt{x-1}$ est donc dérivable sur I, de dérivée $x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$. H est le produit de cette fonction et de la fonction polynôme $x \mapsto x + 2$: H est dérivable sur I.

Calcul. Soit $x \in I$. D'après la dérivée d'un produit :

$$\begin{aligned} H'(x) &= \sqrt{x-1} \\ &\quad + \frac{x+2}{2\sqrt{x-1}} \\ &= \frac{2(x-1) + x + 2}{2\sqrt{x-1}} \\ &= \frac{3x}{2\sqrt{x-1}} = h(x). \end{aligned}$$

Conclusion. $H' = h$ sur I, donc H est une primitive de h sur I.

2. 0,5 pts

Déduis de la question 1 toutes les primitives de h sur I. Justifie ensuite que, en deux points de même abscisse $a \in I$, les courbes de deux primitives de h ont des tangentes parallèles.

INDICE

Comment s'écrivent toutes les primitives à partir de l'une d'elles ? Quel est le coefficient directeur de la tangente à la courbe d'une primitive F au point d'abscisse a ?

CORRIGÉ

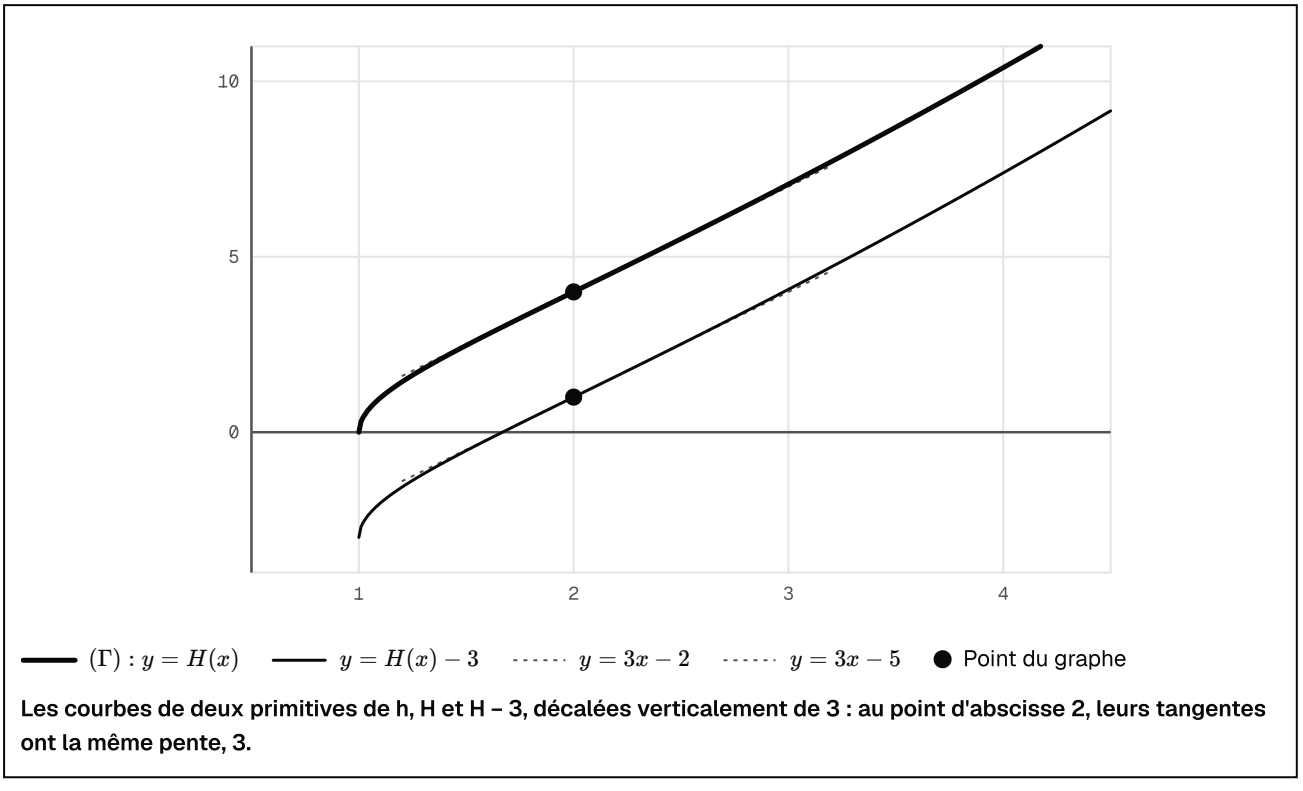
Toutes les primitives. I est un intervalle et H est une primitive de h sur I (question 1). Les primitives de h sur I sont donc les fonctions

$$x \mapsto (x+2)\sqrt{x-1} + c,$$

où c est un réel.

Tangentes. Soit F_1 et F_2 deux primitives de h sur I, et $a \in I$. La tangente à la courbe de F_1 au point d'abscisse a a pour coefficient directeur $F_1'(a) = h(a)$. De même, la tangente à la courbe de F_2 en ce point a pour coefficient directeur $F_2'(a) = h(a)$.

Conclusion. Les deux coefficients directeurs sont égaux à $h(a)$: ces tangentes sont parallèles (confondues lorsque $F_1 = F_2$).



Les courbes de deux primitives de h, H et H − 3, décalées verticalement de 3 : au point d'abscisse 2, leurs tangentes ont la même pente, 3.

3. 0,5 pts

Donne une équation de la tangente (T) à (Γ) au point d'abscisse 2.

INDICE

Le coefficient directeur de (T) est $H'(2)$: que vaut-il d'après la question 1 ? Calcule aussi $H(2)$.

CORRIGÉ

Valeurs en 2. D'après la question 1 :

$$H'(2) = h(2) = \frac{3 \times 2}{2\sqrt{1}} = 3.$$

De plus, $H(2) = 4\sqrt{1} = 4$.

Équation. Une équation de (T) est $y = H'(2)(x - 2) + H(2)$, soit :

$$y = 3(x - 2) + 4 = 3x - 2.$$

Conclusion. La tangente (T) à (Γ) au point d'abscisse 2 a pour équation $y = 3x - 2$.

4. `0,75 pts`

Montre que, pour tout $x \in I$:

$$h(x) - 3 = \frac{3\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2}{2\sqrt{x-1}}.$$

Déduis-en que (T) est la seule tangente à (Γ) de coefficient directeur 3, et que toute tangente à (Γ) a un coefficient directeur supérieur ou égal à 3.

INDICE

Réduis $h(x) - 3$ au même dénominateur, puis écris $x = \left(\sqrt{x-1}\right)^2 + 1$ dans le numérateur : quelle identité remarquable reconnais-tu ? Pour les tangentes, que vaut le coefficient directeur de la tangente à (Γ) au point d'abscisse a ?

CORRIGÉ

Même dénominateur. Soit $x \in I$:

$$\begin{aligned} h(x) - 3 &= \frac{3x - 6\sqrt{x-1}}{2\sqrt{x-1}} \\ &= \frac{3\left(x - 2\sqrt{x-1}\right)}{2\sqrt{x-1}}. \end{aligned}$$

Identité remarquable. Comme $x = \left(\sqrt{x-1}\right)^2 + 1$:

$$\begin{aligned} &x - 2\sqrt{x-1} \\ &= \left(\sqrt{x-1}\right)^2 - 2\sqrt{x-1} + 1 \\ &= \left(\sqrt{x-1} - 1\right)^2. \end{aligned}$$

On obtient l'égalité demandée.

Tangentes. La tangente à (Γ) au point d'abscisse $a \in I$ a pour coefficient directeur $H'(a) = h(a)$.

- $h(a) - 3$ est le quotient d'un carré par $2\sqrt{a-1} > 0$, donc $h(a) - 3 \geq 0$, c'est-à-dire $h(a) \geq 3$.
- $h(a) = 3$ si et seulement si $\sqrt{a-1} - 1 = 0$, c'est-à-dire $\sqrt{a-1} = 1$, soit $a = 2$.

Conclusion. L'égalité est établie pour tout $x \in I$. Toute tangente à (Γ) a un coefficient directeur supérieur ou égal à 3, et la tangente au point d'abscisse 2, c'est-à-dire (T), est la seule de coefficient directeur 3.

Exercice 5 2,5 pts

Une fonction impaire et la parité de ses primitives

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \dfrac{6x}{\left(x^2+3\right)^2}$.

1. 0,5 pts

Montre que la fonction H définie sur $\mathbb{R}$ par $H(x) = \dfrac{x^2}{x^2+3}$ est une primitive de h sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Que faut-il établir ? H est un quotient : son dénominateur s'annule-t-il sur $\mathbb{R}$?

CORRIGÉ

Il suffit de montrer que H est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $H' = h$ sur $\mathbb{R}$.

Dérivabilité. H est le quotient de deux polynômes, et $x^2+3 \geq 3 > 0$ pour tout réel x : H est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Calcul. Soit x un réel. D'après la dérivée d'un quotient, le numérateur de $H'(x)$ vaut :

$$\begin{aligned} &2x\left(x^2+3\right) - x^2 \times 2x \\ &= 2x^3 + 6x - 2x^3 \\ &= 6x. \end{aligned}$$

Donc :

$$H'(x) = \frac{6x}{\left(x^2+3\right)^2} = h(x).$$

Conclusion. $H' = h$ sur $\mathbb{R}$, donc H est une primitive de h sur $\mathbb{R}$.

2. 0,75 pts

Écris $h(x)$ sous la forme $a\,\dfrac{u'(x)}{u(x)^2}$, en précisant le réel a et la fonction u, puis déduis-en une primitive K de h sur $\mathbb{R}$. Calcule enfin $H(x) - K(x)$: le résultat était-il prévisible ?

INDICE

Quelle fonction u a pour dérivée $2x$? Une primitive de $\dfrac{u'}{u^2}$ est $-\dfrac{1}{u}$ lorsque u ne s'annule pas. Que sais-tu de deux primitives d'une même fonction sur un intervalle ?

CORRIGÉ

Forme. Posons $u(x) = x^2 + 3$. Alors $u'(x) = 2x$ et $u(x) \geq 3$: u ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} h(x) &= 3 \times \frac{2x}{\left(x^2+3\right)^2} \\ &= 3\,\frac{u'(x)}{u(x)^2}. \end{aligned}$$

Primitive K. Une primitive de $\dfrac{u'}{u^2}$ sur $\mathbb{R}$ est $-\dfrac{1}{u}$. Par produit par le réel 3, une primitive de h sur $\mathbb{R}$ est la fonction K définie par :

$$K(x) = -\frac{3}{x^2+3}.$$

Différence. Pour tout réel x :

$$H(x) - K(x) = \frac{x^2+3}{x^2+3} = 1.$$

Conclusion. $h = 3\,\dfrac{u'}{u^2}$ avec $a = 3$ et $u : x \mapsto x^2 + 3$, et $H - K = 1$ sur $\mathbb{R}$. Ce résultat était prévisible : H et K sont deux primitives de h sur l'intervalle $\mathbb{R}$, elles diffèrent donc d'une constante.

3. 0,5 pts

Vérifie que h est impaire. Soit F une primitive quelconque de h sur $\mathbb{R}$ et L la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $L(x) = F(-x)$. Justifie que L est, elle aussi, une primitive de h sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Calcule $h(-x)$. L est la composée de $x \mapsto -x$ suivie de F : quelle est sa dérivée ?

CORRIGÉ

Parité. $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0 et, pour tout réel x :

$$h(-x) = \frac{-6x}{\left(x^2+3\right)^2} = -h(x).$$

Donc h est impaire.

Dérivée de L. La fonction $x \mapsto -x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et F est dérivable sur $\mathbb{R}$. D'après la dérivée d'une fonction composée, L est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} L'(x) &= -F'(-x) \\ &= -h(-x) \\ &= h(x). \end{aligned}$$

La dernière égalité vient de l'imparité de h.

Conclusion. h est impaire, et L est une primitive de h sur $\mathbb{R}$.

4. 0,75 pts

Déduis de la question 3 que toute primitive de h sur $\mathbb{R}$ est une fonction paire, puis contrôle ce résultat sur H et sur K.

INDICE

F et L sont deux primitives de h sur $\mathbb{R}$: que sais-tu de $L - F$? Pour trouver cette constante, choisis une valeur de x qui simplifie $F(-x) - F(x)$.

CORRIGÉ

Constante. D'après la question 3, F et L sont deux primitives de h sur l'intervalle $\mathbb{R}$. Il existe donc un réel c tel que, pour tout réel x :

$$F(-x) = F(x) + c.$$

Pour $x = 0$, on obtient $F(0) = F(0) + c$, donc $c = 0$.

Parité de F. Ainsi $F(-x) = F(x)$ pour tout réel x : F est paire. Ceci vaut pour toute primitive F de h sur $\mathbb{R}$.

Contrôle sur H et K. Pour tout réel x :

$$H(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)^2 + 3} = H(x)$$

et

$$\begin{aligned} K(-x) &= -\frac{3}{(-x)^2 + 3} \\ &= K(x). \end{aligned}$$

Conclusion. Toute primitive de h sur $\mathbb{R}$ est paire ; H et K le sont bien.