BURHAN

Fonctions primitives : exercices, entraînement

2ème Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-experimentales/mathematiques/fonctions-primitives/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Fonctions primitives	Entraînement	5

Exercice 1

Trouver seul la bonne forme

Cette fois, personne ne te dit qui est u. Pour chaque fonction, choisis la méthode : forme composée, en ajustant une constante, ou développement. Donne une primitive sur l'intervalle indiqué.

1.

$f(x) = (x-2)\left(x^2-4x+7\right)^3$ sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Dérive la base de la puissance : $u(x) = x^2-4x+7$. Compare $u'(x)$ avec $x-2$.

2.

$g(x) = \dfrac{3x}{\left(x^2+5\right)^3}$ sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Avec $u(x) = x^2+5$, tu reconnais $\dfrac{u'}{u^n}$ pour $n=3$, à une constante près.

3.

$h(x) = x^2\sqrt{x^3+8}$ sur $]-2,+\infty[$.

INDICE

Écris la racine comme une puissance. Quelle est la dérivée de l'expression sous la racine, et pourquoi cette expression est-elle strictement positive sur $]-2,+\infty[$?

4.

$k(x) = \left(x^2+3\right)^2$ sur $\mathbb{R}$.

INDICE

La dérivée $2x$ de x^2+3 n'apparaît pas en facteur. Une forme $u'u^n$ est-elle possible ? Sinon, développe.

Exercice 2

Trigonométrie, formes composées et condition

Les trois questions sont indépendantes.

1.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5\sin x \cos^4 x$. Détermine la primitive G de f sur $\mathbb{R}$ telle que $G\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$.

INDICE

Pose $u(x) = \cos x$: alors $u'(x) = -\sin x$. Fais apparaître $u'u^4$ en gérant le signe.

2.

Soit g la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par $g(x) = \tan^2 x$. Écris $g(x)$ à l'aide de $1 + \tan^2 x$, puis détermine la primitive G de g sur cet intervalle telle que $G\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$.

INDICE

Ajoute et retranche 1 : $\tan^2 x = \left(1 + \tan^2 x\right) - 1$. Rappel : $\tan\frac{\pi}{4} = 1$.

3.

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (2x - 1)\cos\left(x^2 - x\right)$. Donne toutes les primitives de h sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Dérive l'argument du cosinus et compare avec le facteur $2x - 1$.

Exercice 3

De l'accélération à la position d'un mobile

Un mobile se déplace sur un axe. À l'instant t, en secondes ($t \geq 0$), son accélération vaut $a(t) = 6t - 12$ (en $\mathrm{m/s^2}$). On note $v(t)$ sa vitesse (en $\mathrm{m/s}$) et $p(t)$ sa position (en m). On admet que v et p sont dérivables sur $[0, +\infty[$ (à droite en 0), avec $v' = a$ et $p' = v$.

1.

Le mobile est à l'arrêt à l'instant $t = 1$. Détermine $v(t)$.

INDICE

De quelle fonction v est-elle une primitive ? Écris toutes les primitives de cette fonction, puis demande-toi ce que vaut la vitesse d'un mobile « à l'arrêt ».

2.

Vérifie que $v(t) = 3(t-1)(t-3)$, puis dresse le tableau de signes de $v(t)$ sur $[0, +\infty[$.

INDICE

Développe $3(t-1)(t-3)$. Un trinôme est du signe de son coefficient dominant à l'extérieur de ses racines.

3.

À l'instant $t = 2$, le mobile se trouve à la position 5. Détermine $p(t)$.

INDICE

De quelle fonction p est-elle une primitive ? Écris toutes les primitives de cette fonction, puis traduis l'information sur la position à l'instant 2.

4.

Déduis de la question 2 les variations de p sur $[0, +\infty[$. À quels instants le mobile change-t-il de sens, et en quelles positions ?

INDICE

$p' = v$: le signe de la vitesse donne directement le sens de variation de la position.

Exercice 4

Débit d'une perfusion et volume reçu

Un patient reçoit une solution par perfusion ; on déclenche le chronomètre alors que la perfusion est déjà en cours. À l'instant t, en heures ($t \geq 0$), le débit de la perfusion vaut $q(t) = \dfrac{12}{(t+2)^2}$, en décilitres par heure. On note $V(t)$ le volume total de solution reçu par le patient depuis la pose de la perfusion, en décilitres. On admet que V est dérivable sur $[0, +\infty[$ (à droite en 0) et que $V' = q$.

1.

Justifie, sans calculer $V(t)$, que le volume reçu par le patient augmente au cours du temps.

INDICE

$V' = q$: quel est le signe de $q(t)$?

2.

On mesure $V(2) = 7$. Détermine $V(t)$.

INDICE

Quelle est la dérivée de $t \mapsto \dfrac{1}{t+2}$? Compare-la à $q(t)$, puis écris toutes les primitives de q.

3.

Calcule $V(0)$, puis $\lim\limits_{t \to +\infty} V(t)$. Interprète ces deux résultats.

INDICE

Quand $t \to +\infty$, que devient $\dfrac{12}{t+2}$?

Exercice 5

Vérifier une primitive, puis la réutiliser

Sur l'intervalle $I = \left]-\frac{3}{2}, +\infty\right[$, on considère les fonctions h et k définies par $h(x) = \frac{3x+4}{\sqrt{2x+3}}$ et $k(x) = \frac{3x+9}{\sqrt{2x+3}}$.

1.

Montre que la fonction H définie sur I par $H(x) = (x+1)\sqrt{2x+3}$ est une primitive de h sur I.

INDICE

Quelle est la dérivée de $x \mapsto \sqrt{2x+3}$? H est un produit : quelle règle de dérivation utilises-tu ?

2.

Vérifie que $k(x) = h(x) + \frac{5}{\sqrt{2x+3}}$ sur I, puis donne une primitive sur I de la fonction $x \mapsto \frac{5}{\sqrt{2x+3}}$.

INDICE

Compare les numérateurs $3x+9$ et $3x+4$. Pour la primitive, quelle fonction u se cache sous la racine, et que vaut u' ?

3.

Déduis des questions 1 et 2 une primitive K de k sur I, écrite sous la forme $K(x) = (x+a)\sqrt{2x+3}$ avec a réel.

INDICE

Que donne la linéarité pour une somme de deux fonctions dont tu connais une primitive ? Quel facteur commun peux-tu ensuite mettre en évidence ?

4.

Détermine la primitive G de k sur I telle que $G(3) = 0$.

INDICE

Comment s'écrivent toutes les primitives de k sur I à partir de K ? Que vaut $\sqrt{2 \times 3 + 3}$?