BURHAN

Fonctions primitives : exercices, entraînement

2ème Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-experimentales/mathematiques/fonctions-primitives/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Fonctions primitives	Entraînement	5

Exercice 1

Trouver seul la bonne forme

Cette fois, personne ne te dit qui est u. Pour chaque fonction, choisis la méthode : forme composée, en ajustant une constante, ou développement. Donne une primitive sur l'intervalle indiqué.

1.

$f(x) = (x-2)\left(x^2-4x+7\right)^3$ sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Dérive la base de la puissance : $u(x) = x^2-4x+7$. Compare $u'(x)$ avec $x-2$.

CORRIGÉ

Forme. Posons $u(x) = x^2-4x+7$. Alors $u'(x) = 2x-4 = 2(x-2)$ et, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} \times 2(x-2)\,u(x)^3 \\ &= \frac{1}{2}\,u'(x)\,u(x)^3. \end{aligned}$$

Primitive. Une primitive de $u'u^3$ est $\dfrac{u^4}{4}$, donc une primitive de f est $\dfrac{1}{2} \times \dfrac{u^4}{4} = \dfrac{u^4}{8}$.

Conclusion. Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est la fonction F définie par :

$$F(x) = \frac{\left(x^2-4x+7\right)^4}{8}.$$

Contrôle. D'après la dérivée de u^4, $F'(x) = \dfrac{4\,u'(x)\,u(x)^3}{8} = \dfrac{1}{2}\,u'(x)\,u(x)^3 = f(x)$.

2.

$g(x) = \dfrac{3x}{\left(x^2+5\right)^3}$ sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Avec $u(x) = x^2 + 5$, tu reconnais $\dfrac{u'}{u^n}$ pour $n = 3$, à une constante près.

CORRIGÉ

Forme. Posons $u(x) = x^2 + 5$. Pour tout réel x, $u(x) \geq 5 > 0$ et $u'(x) = 2x$, donc :

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{3}{2} \times \frac{2x}{\left(x^2+5\right)^3} \\ &= \frac{3}{2} \times \frac{u'(x)}{u(x)^3}. \end{aligned}$$

Primitive. Comme u ne s'annule pas, une primitive de $\dfrac{u'}{u^3}$ est $-\dfrac{1}{2u^2}$. Une primitive de g est donc $\dfrac{3}{2} \times \left(-\dfrac{1}{2u^2}\right) = -\dfrac{3}{4u^2}$.

Conclusion. Une primitive de g sur $\mathbb{R}$ est la fonction G définie par :

$$G(x) = -\frac{3}{4\left(x^2+5\right)^2}.$$

Contrôle. $G(x) = -\dfrac{3}{4}\left(x^2+5\right)^{-2}$, donc $G'(x) = -\dfrac{3}{4} \times (-2) \times 2x \left(x^2+5\right)^{-3}$, c'est-à-dire $G'(x) = \dfrac{3x}{\left(x^2+5\right)^3} = g(x)$.

3.

$h(x) = x^2\sqrt{x^3+8}$ sur $]-2,+\infty[$.

INDICE

Écris la racine comme une puissance. Quelle est la dérivée de l'expression sous la racine, et pourquoi cette expression est-elle strictement positive sur $]-2,+\infty[$?

CORRIGÉ

Signe de u. Posons $u(x) = x^3+8$. La fonction cube est strictement croissante ; pour $x > -2$, on a donc $x^3 > (-2)^3 = -8$, c'est-à-dire $u(x) > 0$.

Forme. $u'(x) = 3x^2$. Pour tout $x > -2$:

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{1}{3} \times 3x^2 \left(x^3+8\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{3}\, u'(x)\, u(x)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Primitive. Avec $r = \dfrac{1}{2}$, une primitive de $u'u^r$ est $\dfrac{u^{r+1}}{r+1} = \dfrac{2}{3}\,u^{\frac{3}{2}}$. Une primitive de h est donc $\dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{3}\,u^{\frac{3}{2}} = \dfrac{2}{9}\,u^{\frac{3}{2}}$.

Conclusion. Une primitive de h sur $]-2,+\infty[$ est la fonction H définie par :

$$H(x) = \frac{2}{9}\left(x^3+8\right)^{\frac{3}{2}},$$

c'est-à-dire $H(x) = \dfrac{2}{9}\left(x^3+8\right)\sqrt{x^3+8}$.

Contrôle. $H'(x) = \dfrac{2}{9} \times \dfrac{3}{2} \times 3x^2\left(x^3+8\right)^{\frac{1}{2}} = x^2\sqrt{x^3+8}$.

4.

$k(x) = \left(x^2+3\right)^2$ sur $\mathbb{R}$.

INDICE

La dérivée $2x$ de x^2+3 n'apparaît pas en facteur. Une forme $u'u^n$ est-elle possible ? Sinon, développe.

CORRIGÉ

Pas de forme composée. Avec $u(x) = x^2+3$, la dérivée $u'(x) = 2x$ n'apparaît pas en facteur : k n'est **pas** de la forme $u'u^2$. Le réflexe $x \mapsto \dfrac{\left(x^2+3\right)^3}{3}$ est faux, car sa dérivée est $x \mapsto 2x\left(x^2+3\right)^2$, différente de k.

Développement. Pour tout réel x, $k(x) = x^4+6x^2+9$.

Conclusion. Une primitive de k sur $\mathbb{R}$ est la fonction K définie par :

$$K(x) = \frac{x^5}{5} + 2x^3 + 9x.$$

Contrôle. $K'(x) = x^4+6x^2+9 = \left(x^2+3\right)^2 = k(x)$.

Exercice 2

Trigonométrie, formes composées et condition

Les trois questions sont indépendantes.

1.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5\sin x \cos^4 x$. Détermine la primitive G de f sur $\mathbb{R}$ telle que $G\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$.

INDICE

Pose $u(x) = \cos x$: alors $u'(x) = -\sin x$. Fais apparaître $u'u^4$ en gérant le signe.

CORRIGÉ

Forme. Posons $u(x) = \cos x$, donc $u'(x) = -\sin x$. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f(x) &= -5 \times (-\sin x)\cos^4 x \\ &= -5\,u'(x)\,u(x)^4. \end{aligned}$$

Toutes les primitives. Une primitive de $u'u^4$ est $\frac{u^5}{5}$, donc une primitive de f est $x \mapsto -5 \times \frac{\cos^5 x}{5}$, soit $x \mapsto -\cos^5 x$. Les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto -\cos^5 x + c$, où c est un réel.

Condition. $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, donc $\cos^5\frac{\pi}{3} = \frac{1}{32}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} & G\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0 \\ \iff & -\frac{1}{32} + c = 0 \\ \iff & c = \frac{1}{32}. \end{aligned}$$

Conclusion. La primitive cherchée est la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$G(x) = \frac{1}{32} - \cos^5 x.$$

Contrôle. $G'(x) = -5\cos^4 x \times (-\sin x) = 5\sin x \cos^4 x = f(x)$.

2.

Soit g la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par $g(x) = \tan^2 x$. Écris $g(x)$ à l'aide de $1 + \tan^2 x$, puis détermine la primitive G de g sur cet intervalle telle que $G\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$.

INDICE

Ajoute et retranche 1 : $\tan^2 x = \left(1 + \tan^2 x\right) - 1$. Rappel : $\tan \frac{\pi}{4} = 1$.

CORRIGÉ

Réécriture. Pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$:

$$g(x) = \left(1 + \tan^2 x\right) - 1.$$

Toutes les primitives. Sur cet intervalle, une primitive de $x \mapsto 1 + \tan^2 x$ est $\tan$, et une primitive de $x \mapsto -1$ est $x \mapsto -x$. Les primitives de g sont donc les fonctions $x \mapsto \tan x - x + c$, où c est un réel.

Condition. $\tan \frac{\pi}{4} = 1$, donc :

$$\begin{aligned} & G\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \\ \iff & 1 - \frac{\pi}{4} + c = 1 \\ \iff & c = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Conclusion. La primitive cherchée est la fonction G définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par :

$$G(x) = \tan x - x + \frac{\pi}{4}.$$

Contrôle. $G'(x) = 1 + \tan^2 x - 1 = \tan^2 x = g(x)$.

3.

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (2x - 1)\cos\left(x^2 - x\right)$. Donne toutes les primitives de h sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Dérive l'argument du cosinus et compare avec le facteur $2x - 1$.

CORRIGÉ

Forme. Posons $u(x) = x^2 - x$, donc $u'(x) = 2x - 1$. Pour tout réel x, $h(x) = u'(x)\cos\left(u(x)\right)$: c'est la forme $u' \cos u$, dont une primitive est $\sin u$.

Conclusion. Les primitives de h sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions

$$x \mapsto \sin\left(x^2 - x\right) + c,$$

où c est un réel.

Contrôle. La dérivée de $x \mapsto \sin\left(x^2 - x\right)$ est $x \mapsto (2x - 1)\cos\left(x^2 - x\right)$, c'est-à-dire h.

Exercice 3

De l'accélération à la position d'un mobile

Un mobile se déplace sur un axe. À l'instant t, en secondes ($t \geq 0$), son accélération vaut $a(t) = 6t - 12$ (en $\mathrm{m/s^2}$). On note $v(t)$ sa vitesse (en $\mathrm{m/s}$) et $p(t)$ sa position (en m). On admet que v et p sont dérivables sur $[0, +\infty[$ (à droite en 0), avec $v' = a$ et $p' = v$.

1.

Le mobile est à l'arrêt à l'instant $t = 1$. Détermine $v(t)$.

INDICE

De quelle fonction v est-elle une primitive ? Écris toutes les primitives de cette fonction, puis demande-toi ce que vaut la vitesse d'un mobile « à l'arrêt ».

CORRIGÉ

Toutes les primitives. v est une primitive de a sur $[0, +\infty[$. Une primitive de $t \mapsto 6t - 12$ est $t \mapsto 3t^2 - 12t$, donc il existe un réel c tel que, pour tout $t \geq 0$:

$$v(t) = 3t^2 - 12t + c.$$

Condition. « À l'arrêt » signifie que la vitesse est nulle : $v(1) = 0$. Or $v(1) = 3 - 12 + c = c - 9$, donc $v(1) = 0 \iff c = 9$.

Conclusion. Pour tout $t \geq 0$, $v(t) = 3t^2 - 12t + 9$ (en $\mathrm{m/s}$).

2.

Vérifie que $v(t) = 3(t-1)(t-3)$, puis dresse le tableau de signes de $v(t)$ sur $[0, +\infty[$.

INDICE

Développe $3(t-1)(t-3)$. Un trinôme est du signe de son coefficient dominant à l'extérieur de ses racines.

CORRIGÉ

Factorisation. Pour tout $t \geq 0$:

$$\begin{aligned} v(t) &= 3t^2 - 12t + 9 \\ &= 3\left(t^2 - 4t + 3\right) \\ &= 3(t-1)(t-3). \end{aligned}$$

Signe. Le trinôme $v(t)$ a pour racines 1 et 3, et son coefficient dominant 3 est positif. Il est positif à l'extérieur des racines et négatif entre elles :

t	$[0, 1[$	1	$]1, 3[$	3	$]3, +\infty[$
$v(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Conclusion. Pour tout $t \geq 0$, $v(t) = 3(t-1)(t-3)$, et son signe est donné par le tableau ci-dessus.

3.

À l'instant $t = 2$, le mobile se trouve à la position 5. Détermine $p(t)$.

INDICE

De quelle fonction p est-elle une primitive ? Écris toutes les primitives de cette fonction, puis traduis l'information sur la position à l'instant 2.

CORRIGÉ

Toutes les primitives. p est une primitive de v sur $[0, +\infty[$. Une primitive de $t \mapsto 3t^2 - 12t + 9$ est $t \mapsto t^3 - 6t^2 + 9t$, donc il existe un réel c tel que, pour tout $t \geq 0$:

$$p(t) = t^3 - 6t^2 + 9t + c.$$

Condition. $p(2) = 8 - 24 + 18 + c = 2 + c$, donc $p(2) = 5 \iff c = 3$.

Conclusion. Pour tout $t \geq 0$, $p(t) = t^3 - 6t^2 + 9t + 3$ (en m).

Vérification. $p(2) = 8 - 24 + 18 + 3 = 5$.

4.

Déduis de la question 2 les variations de p sur $[0, +\infty[$. À quels instants le mobile change-t-il de sens, et en quelles positions ?

INDICE

$p' = v$: le signe de la vitesse donne directement le sens de variation de la position.

CORRIGÉ

Sens de variation. Comme $p' = v$ sur $[0, +\infty[$, le signe de $v(t)$ obtenu à la question 2 donne les variations de p.

Valeurs utiles. $p(0) = 3$, $p(1) = 1 - 6 + 9 + 3 = 7$ et $p(3) = 27 - 54 + 27 + 3 = 3$.

t	0	$]0, 1[$	1	$]1, 3[$	3	$]3, +\infty[$
$p'(t) = v(t)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
p	3	croissante	7	décroissante	3	croissante

Conclusion. p est croissante sur $[0, 1]$, décroissante sur $[1, 3]$, puis croissante sur $[3, +\infty[$. Le mobile avance jusqu'à $t = 1$ s (position 7 m), recule jusqu'à $t = 3$ s (position 3 m), puis avance de nouveau : il **change de sens aux instants 1 s et 3 s**, aux positions 7 m et 3 m.

Exercice 4

Débit d'une perfusion et volume reçu

Un patient reçoit une solution par perfusion ; on déclenche le chronomètre alors que la perfusion est déjà en cours. À l'instant t, en heures ($t \geq 0$), le débit de la perfusion vaut $q(t) = \dfrac{12}{(t+2)^2}$, en décilitres par heure. On note $V(t)$ le volume total de solution reçu par le patient depuis la pose de la perfusion, en décilitres. On admet que V est dérivable sur $[0, +\infty[$ (à droite en 0) et que $V' = q$.

1.

Justifie, sans calculer $V(t)$, que le volume reçu par le patient augmente au cours du temps.

INDICE

$V' = q$: quel est le signe de $q(t)$?

CORRIGÉ

Signe du débit. Pour tout $t \geq 0$, $(t+2)^2 > 0$, donc $q(t) = \dfrac{12}{(t+2)^2} > 0$.

Conclusion. $V' = q$ est strictement positive sur $[0, +\infty[$, donc V est strictement croissante sur cet intervalle : le volume reçu par le patient augmente au cours du temps.

2.

On mesure $V(2) = 7$. Détermine $V(t)$.

INDICE

Quelle est la dérivée de $t \mapsto \dfrac{1}{t+2}$? Compare-la à $q(t)$, puis écris toutes les primitives de q.

CORRIGÉ

Forme. Posons $u(t) = t + 2$. Sur $[0, +\infty[$, $u(t) \geq 2$, donc u ne s'annule pas ; de plus $u'(t) = 1$ et :

$$q(t) = 12 \times \frac{u'(t)}{u(t)^2}.$$

Toutes les primitives. Une primitive de $\dfrac{u'}{u^2}$ est $-\dfrac{1}{u}$. Il existe donc un réel c tel que, pour tout $t \geq 0$:

$$V(t) = -\frac{12}{t+2} + c.$$

Condition. $V(2) = -\dfrac{12}{4} + c = c - 3$, donc $V(2) = 7 \iff c = 10$.

Conclusion. Pour tout $t \geq 0$:

$$V(t) = 10 - \frac{12}{t+2}.$$

3.

Calcule $V(0)$, puis $\lim\limits_{t\to+\infty} V(t)$. Interprète ces deux résultats.

INDICE

Quand $t \to +\infty$, que devient $\dfrac{12}{t+2}$?

CORRIGÉ

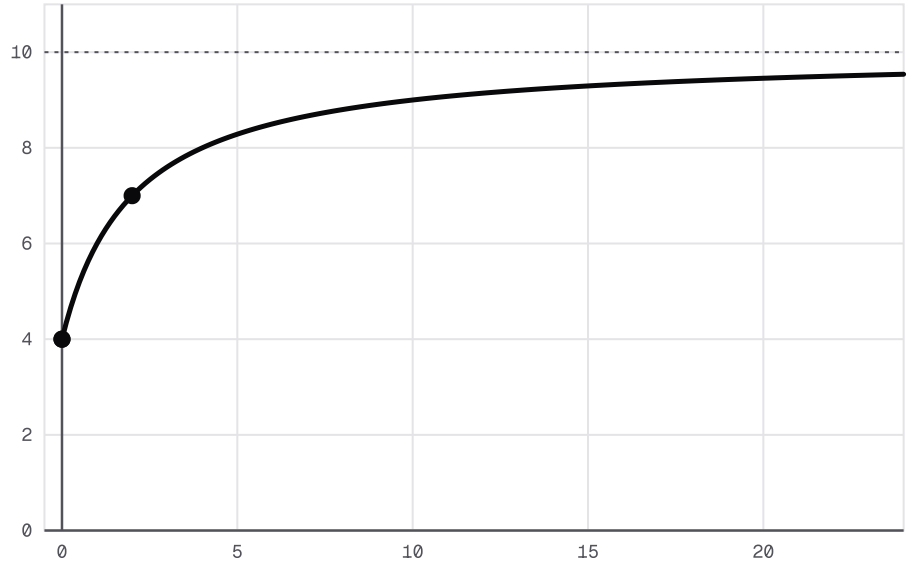
Valeur en 0. $V(0) = 10 - \dfrac{12}{2} = 4$: au déclenchement du chronomètre, le patient a déjà reçu 4 décilitres de solution.

Limite. Quand $t \to +\infty$, $t+2 \to +\infty$, donc $\dfrac{12}{t+2} \to 0$ et :

$$\lim_{t\to+\infty} V(t) = 10.$$

Interprétation. Pour tout $t \geq 0$, $\dfrac{12}{t+2} > 0$, donc $V(t) < 10$: le volume reçu augmente sans jamais atteindre 10 décilitres. La limite 10 vient du terme $\dfrac{12}{t+2}$, qui tend vers 0 : le volume se stabilise au voisinage de 10 décilitres, soit 1 litre.

Conclusion. $V(0) = 4$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} V(t) = 10$: le patient avait reçu 4 décilitres au départ du chronomètre, et le volume reçu se rapproche de 1 litre sans l'atteindre.



Le volume reçu V(t) = 10 − 12/(t + 2), en décilitres : 4 au déclenchement du chronomètre, puis une hausse qui ralentit sous le plafond de 10.

Exercice 5

Vérifier une primitive, puis la réutiliser

Sur l'intervalle $I = \left]-\frac{3}{2}, +\infty\right[$, on considère les fonctions h et k définies par $h(x) = \frac{3x+4}{\sqrt{2x+3}}$ et $k(x) = \frac{3x+9}{\sqrt{2x+3}}$.

1.

Montre que la fonction H définie sur I par $H(x) = (x+1)\sqrt{2x+3}$ est une primitive de h sur I.

INDICE

Quelle est la dérivée de $x \mapsto \sqrt{2x+3}$? H est un produit : quelle règle de dérivation utilises-tu ?

CORRIGÉ

Il suffit de montrer que H est dérivable sur I et que $H'(x) = h(x)$ pour tout $x \in I$.

Dérivabilité. Pour $x \in I$, $2x+3 > 0$. La fonction $x \mapsto \sqrt{2x+3}$ est donc dérivable sur I, de dérivée $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2x+3}}$ (car $\frac{2}{2\sqrt{2x+3}} = \frac{1}{\sqrt{2x+3}}$). Produit de deux fonctions dérivables sur I, H est dérivable sur I.

Calcul. Soit $x \in I$. D'après la dérivée d'un produit :

$$\begin{aligned} H'(x) &= \sqrt{2x+3} \\ &\quad + \frac{x+1}{\sqrt{2x+3}} \\ &= \frac{(2x+3)+(x+1)}{\sqrt{2x+3}} \\ &= \frac{3x+4}{\sqrt{2x+3}}. \end{aligned}$$

Pour réduire au même dénominateur, on a écrit $\sqrt{2x+3} = \frac{2x+3}{\sqrt{2x+3}}$.

Conclusion. Pour tout $x \in I$, $H'(x) = h(x)$: H est une primitive de h sur I.

2.

Vérifie que $k(x) = h(x) + \dfrac{5}{\sqrt{2x+3}}$ sur I, puis donne une primitive sur I de la fonction $x \mapsto \dfrac{5}{\sqrt{2x+3}}$.

INDICE

Compare les numérateurs $3x+9$ et $3x+4$. Pour la primitive, quelle fonction u se cache sous la racine, et que vaut u' ?

CORRIGÉ

Décomposition. Pour tout $x \in I$, les deux fractions ont le même dénominateur et $3x+9 = (3x+4)+5$, donc :

$$k(x) = h(x) + \frac{5}{\sqrt{2x+3}}.$$

Forme. Posons $u(x) = 2x+3$: $u(x) > 0$ sur I et $u'(x) = 2$. Ainsi :

$$\frac{5}{\sqrt{2x+3}} = \frac{5}{2} \times \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}.$$

Primitive. Une primitive de $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ est $2\sqrt{u}$, donc une primitive de $x \mapsto \dfrac{5}{\sqrt{2x+3}}$ est $\dfrac{5}{2} \times 2\sqrt{u}$, c'est-à-dire $x \mapsto 5\sqrt{2x+3}$.

Contrôle. La dérivée de $x \mapsto 5\sqrt{2x+3}$ est $x \mapsto 5 \times \dfrac{2}{2\sqrt{2x+3}}$, soit $x \mapsto \dfrac{5}{\sqrt{2x+3}}$.

Conclusion. Pour tout $x \in I$, $k(x) = h(x) + \dfrac{5}{\sqrt{2x+3}}$, et la fonction $x \mapsto 5\sqrt{2x+3}$ est une primitive sur I de $x \mapsto \dfrac{5}{\sqrt{2x+3}}$.

3.

Déduis des questions 1 et 2 une primitive K de k sur I, écrite sous la forme $K(x) = (x+a)\sqrt{2x+3}$ avec a réel.

INDICE

Que donne la linéarité pour une somme de deux fonctions dont tu connais une primitive ? Quel facteur commun peux-tu ensuite mettre en évidence ?

CORRIGÉ

D'après les questions 1 et 2, H est une primitive de h sur I, et $x \mapsto 5\sqrt{2x+3}$ est une primitive sur I de $x \mapsto \dfrac{5}{\sqrt{2x+3}}$. Par linéarité, une primitive de k sur I est la fonction K définie par $K(x) = (x+1)\sqrt{2x+3} + 5\sqrt{2x+3}$.

En mettant $\sqrt{2x+3}$ en facteur, pour tout $x \in I$:

$$K(x) = (x+6)\sqrt{2x+3}.$$

Conclusion. K est une primitive de k sur I de la forme demandée, avec $a = 6$.

4.

Détermine la primitive G de k sur I telle que $G(3) = 0$.

INDICE

Comment s'écrivent toutes les primitives de k sur I à partir de K ? Que vaut $\sqrt{2 \times 3 + 3}$?

CORRIGÉ

Toutes les primitives. I est un intervalle et K est une primitive de k sur I. Les primitives de k sur I sont donc les fonctions $x \mapsto (x+6)\sqrt{2x+3} + c$, où c est un réel.

Condition. En $x = 3$, $\sqrt{2 \times 3 + 3} = \sqrt{9} = 3$, donc $G(3) = 9 \times 3 + c = 27 + c$. Ainsi $G(3) = 0 \iff c = -27$.

Conclusion. La primitive cherchée est la fonction G définie sur I par :

$$G(x) = (x+6)\sqrt{2x+3} - 27.$$