BURHAN

Fonctions primitives : exercices, application

2ème Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-experimentales/mathematiques/fonctions-primitives/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Fonctions primitives	Application	6

Exercice 1

Contrôler une primitive en dérivant

On te donne chaque fois deux fonctions et un intervalle. Ton travail : contrôler le lien entre elles par un calcul de dérivée, sans chercher toi-même la primitive.

1.

Montre que la fonction F définie par $F(x) = \dfrac{5x+2}{x-3}$ est une primitive sur $]3, +\infty[$ de la fonction f définie par $f(x) = -\dfrac{17}{(x-3)^2}$.

INDICE

Dérive le quotient avec $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, puis compare le résultat à $f(x)$.

2.

Vérifie que la fonction G définie par $G(x) = (2x+1)\sqrt{x}$ est une primitive sur $]0, +\infty[$ de la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{6x+1}{2\sqrt{x}}$.

INDICE

C'est un produit : $(uv)' = u'v + uv'$, avec $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Réduis ensuite au dénominateur $2\sqrt{x}$.

3.

Montre que la fonction H définie par $H(x) = x\sin x$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction h définie par $h(x) = \sin x + x\cos x$.

INDICE

Encore un produit : $u(x) = x$ et $v(x) = \sin x$, avec $\sin' = \cos$.

4.

Sans calculer de dérivée, justifie que la fonction K définie par $K(x) = \dfrac{9x-10}{x-3}$ est, elle aussi, une primitive sur $]3, +\infty[$ de la fonction f de la question 1.

INDICE

Calcule $K(x) - F(x)$ en réduisant au même dénominateur. Que sais-tu de deux primitives d'une même fonction sur un intervalle ?

Exercice 2

Le tableau des dérivées lu à l'envers

Pour chaque fonction, donne une primitive sur l'intervalle indiqué. Contrôle ensuite ton résultat en le dérivant.

1.

$f(x) = 6x^5 - 7x^2 + 4x - 3$ sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Une primitive de x^n est $\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$. Traite chaque terme séparément en gardant son coefficient.

2.

$g(x) = \dfrac{3}{x^4} - 2x$ sur $]0, +\infty[$.

INDICE

Une primitive de $\dfrac{1}{x^n}$ ($n \geq 2$) est $-\dfrac{1}{(n-1)x^{n-1}}$. Ici $n = 4$.

3.

$h(x) = \dfrac{7}{\sqrt{x}} + x^{\frac{2}{3}}$ sur $]0, +\infty[$.

INDICE

Une primitive de $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ est $2\sqrt{x}$. Pour x^r avec $r \neq -1$, utilise $\dfrac{x^{r+1}}{r+1}$.

4.

$k(x) = 5\cos x - 3\sin x$ sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Lis les dérivées à l'envers : $\sin' = \cos$ et $(-\cos)' = \sin$. Attention au signe.

Exercice 3

Transformer l'écriture d'abord

Aucune de ces fonctions ne se lit telle quelle dans le tableau des primitives. Change d'abord son écriture, puis cherche une primitive.

1.

$f(x) = (x+3)(2x-1)$ sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Développe le produit : tu obtiens un polynôme du second degré.

2.

Un camarade affirme : « une primitive de $x \mapsto (x+3)(2x-1)$ est la fonction P définie par $P(x) = \left(\frac{x^2}{2} + 3x\right)\left(x^2 - x\right)$, produit d'une primitive de chaque facteur ». Montre qu'il se trompe.

INDICE

Un seul contre-exemple suffit : compare $P'(1)$ et $f(1)$.

3.

$g(x) = \dfrac{6x^4 - 5}{x^2}$ sur $]0, +\infty[$.

INDICE

Le dénominateur est un monôme : divise chaque terme du numérateur par x^2.

4.

$h(x) = \dfrac{x^2 + 4}{\sqrt{x}}$ sur $]0, +\infty[$.

INDICE

Écris $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ et sépare la fraction en deux termes.

Exercice 4

Formes composées : la fonction u est donnée

Dans chaque question, la fonction u est indiquée. Calcule u', reconnais une ligne du tableau des formes composées, puis donne une primitive.

1.

$f(x) = 6x\left(3x^2 - 1\right)^4$ sur $\mathbb{R}$, avec $u : x \mapsto 3x^2 - 1$.

INDICE

Compare $u'(x)$ au facteur placé devant la puissance.

2.

$g(x) = \dfrac{2x + 3}{\left(x^2 + 3x + 4\right)^2}$ sur $\mathbb{R}$, avec $u : x \mapsto x^2 + 3x + 4$.

INDICE

Vérifie d'abord que u ne s'annule jamais (discriminant), puis reconnais $\dfrac{u'}{u^2}$.

3.

$h(x) = \dfrac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 6}}$ sur $\mathbb{R}$, avec $u : x \mapsto x^2 + 2x + 6$.

INDICE

Que vaut $u'(x)$? Compare-le au numérateur $x + 1$: quel nombre faut-il faire apparaître pour reconnaître $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$?

4.

$k(x) = \sqrt{4x + 1}$ sur $\left]-\dfrac{1}{4}, +\infty\right[$, avec $u : x \mapsto 4x + 1$.

INDICE

Peux-tu écrire k comme une puissance de u ? Que vaut u', et par quel nombre faut-il multiplier et diviser pour faire apparaître une forme $u'u^r$?

Exercice 5

Cosinus, sinus et tangente

Donne une primitive de chaque fonction sur l'intervalle indiqué. Dérive ta réponse : c'est le moyen le plus sûr de contrôler le signe et le coefficient.

1.

$f(x) = \sin(5x)$ sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Une primitive de $\sin(ax+b)$ est $-\dfrac{1}{a}\cos(ax+b)$.

2.

$g(x) = 6\cos\left(4x - \dfrac{\pi}{3}\right)$ sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Une primitive de $\cos(ax+b)$ est $\dfrac{1}{a}\sin(ax+b)$; garde le coefficient 6.

3.

$h(x) = x\cos\left(x^2\right)$ sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Nomme $u(x) = x^2$: cherche u' devant le cosinus, à une constante près.

4.

$k(x) = 3 + 3\tan^2 x$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

INDICE

Factorise par 3 : tu reconnais $1+\tan^2 x$, dérivée de $\tan x$.

Exercice 6

La primitive qui passe par un point

Pour chaque fonction, détermine la primitive G qui vérifie la condition indiquée.

1.

$f(x) = 9x^2 + 2x - 7$ sur $\mathbb{R}$, avec $G(2) = 1$.

INDICE

Quelle est une primitive de chaque terme de f ? Comment écris-tu alors toutes les primitives de f ? Que devient la condition $G(2) = 1$?

2.

$g(x) = 4 - \dfrac{8}{x^3}$ sur $]-\infty, 0[$, avec $G(-1) = 3$.

INDICE

Une primitive de $\dfrac{1}{x^3}$ est $-\dfrac{1}{2x^2}$. Le point -1 appartient bien à l'intervalle $]-\infty, 0[$.

3.

$h(x) = \cos x - 2\sin x$ sur $\mathbb{R}$, avec $G\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$.

INDICE

Quelle fonction a pour dérivée $\sin x$? Attention au signe. Utilise ensuite $\sin\dfrac{\pi}{2} = 1$ et $\cos\dfrac{\pi}{2} = 0$.