BURHAN

Fonctions primitives : exercices, application

2ème Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-experimentales/mathematiques/fonctions-primitives/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Fonctions primitives	Application	6

Exercice 1

Contrôler une primitive en dérivant

On te donne chaque fois deux fonctions et un intervalle. Ton travail : contrôler le lien entre elles par un calcul de dérivée, sans chercher toi-même la primitive.

1.

Montre que la fonction F définie par $F(x) = \dfrac{5x+2}{x-3}$ est une primitive sur $]3, +\infty[$ de la fonction f définie par $f(x) = -\dfrac{17}{(x-3)^2}$.

INDICE

Dérive le quotient avec $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, puis compare le résultat à $f(x)$.

CORRIGÉ

Dérivabilité. F est le quotient de deux fonctions polynômes. Son dénominateur $x-3$ ne s'annule pas sur $]3, +\infty[$, donc F est dérivable sur cet intervalle.

Calcul. Soit $x > 3$. On applique la dérivée d'un quotient $\dfrac{u}{v}$, où u et v sont les fonctions polynômes du numérateur et du dénominateur : $u'(x) = 5$ et $v'(x) = 1$. Le numérateur de $F'(x)$ vaut :

$$\begin{aligned} & u'(x)v(x) - u(x)v'(x) \\ &= 5(x-3) - (5x+2) \\ &= 5x - 15 - 5x - 2 \\ &= -17. \end{aligned}$$

Le dénominateur est $v(x)^2 = (x-3)^2$, donc :

$$F'(x) = -\frac{17}{(x-3)^2} = f(x).$$

Conclusion. Pour tout $x \in]3, +\infty[$, $F'(x) = f(x)$: F est une primitive de f sur $]3, +\infty[$.

2.

Vérifie que la fonction G définie par $G(x) = (2x+1)\sqrt{x}$ est une primitive sur $]0, +\infty[$ de la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{6x+1}{2\sqrt{x}}$.

INDICE

C'est un produit : $(uv)' = u'v + uv'$, avec $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Réduis ensuite au dénominateur $2\sqrt{x}$.

CORRIGÉ

Dérivabilité. La fonction $x \mapsto 2x+1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et la fonction racine carrée est dérivable sur $]0, +\infty[$. Leur produit G est donc dérivable sur $]0, +\infty[$.

Calcul. Soit $x > 0$. D'après la dérivée d'un produit :

$$\begin{aligned} G'(x) &= 2\sqrt{x} + \frac{2x+1}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{4x + 2x + 1}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{6x+1}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Pour passer à la deuxième ligne, on a écrit $2\sqrt{x} = \dfrac{4x}{2\sqrt{x}}$.

Conclusion. Pour tout $x \in]0, +\infty[$, $G'(x) = g(x)$: G est une primitive de g sur $]0, +\infty[$.

3.

Montre que la fonction H définie par $H(x) = x\sin x$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction h définie par $h(x) = \sin x + x\cos x$.

INDICE

Encore un produit : $u(x) = x$ et $v(x) = \sin x$, avec $\sin' = \cos$.

CORRIGÉ

Dérivabilité. H est le produit des fonctions $x \mapsto x$ et $\sin$, toutes deux dérivables sur $\mathbb{R}$: H est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Calcul. Soit x un réel. La dérivée de $x \mapsto x$ vaut 1 et $\sin' = \cos$. D'après la dérivée d'un produit :

$$H'(x) = \sin x + x\cos x.$$

Conclusion. Pour tout réel x, $H'(x) = h(x)$: H est une primitive de h sur $\mathbb{R}$.

4.

Sans calculer de dérivée, justifie que la fonction K définie par $K(x) = \dfrac{9x-10}{x-3}$ est, elle aussi, une primitive sur $]3, +\infty[$ de la fonction f de la question 1.

INDICE

Calcule $K(x) - F(x)$ en réduisant au même dénominateur. Que sais-tu de deux primitives d'une même fonction sur un intervalle ?

CORRIGÉ

Différence $K - F$. Soit $x > 3$. Les deux fractions ont le même dénominateur, et leur différence a pour numérateur $(9x-10) - (5x+2) = 4x - 12 = 4(x-3)$. Donc :

$$K(x) - F(x) = \frac{4(x-3)}{x-3} = 4.$$

Ainsi $K = F + 4$ sur $]3, +\infty[$.

Ensemble des primitives. D'après la question 1, F est une primitive de f sur l'intervalle $]3, +\infty[$. Les primitives de f sur cet intervalle sont donc les fonctions $F + c$, où c est un réel.

Conclusion. K s'obtient avec $c = 4$: K est une primitive de f sur $]3, +\infty[$.

À retenir. Sur un intervalle, une fonction admet une infinité de primitives, et deux d'entre elles diffèrent d'une constante.

Exercice 2

Le tableau des dérivées lu à l'envers

Pour chaque fonction, donne une primitive sur l'intervalle indiqué. Contrôle ensuite ton résultat en le dérivant.

1.

$f(x) = 6x^5 - 7x^2 + 4x - 3$ sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Une primitive de x^n est $\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$. Traite chaque terme séparément en gardant son coefficient.

CORRIGÉ

On cherche une primitive terme à terme, en gardant chaque coefficient (linéarité) :

- $6x^5$ donne $6 \times \dfrac{x^6}{6} = x^6$;
- $-7x^2$ donne $-7 \times \dfrac{x^3}{3} = -\dfrac{7x^3}{3}$;
- $4x$ donne $4 \times \dfrac{x^2}{2} = 2x^2$;
- -3 donne $-3x$.

Conclusion. Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est la fonction F définie par :

$$F(x) = x^6 - \frac{7x^3}{3} + 2x^2 - 3x.$$

Contrôle. Pour tout réel x, $F'(x) = 6x^5 - 7x^2 + 4x - 3 = f(x)$.

2.

$g(x) = \dfrac{3}{x^4} - 2x$ sur $]0, +\infty[$.

INDICE

Une primitive de $\dfrac{1}{x^n}$ ($n \geq 2$) est $-\dfrac{1}{(n-1)x^{n-1}}$. Ici $n = 4$.

CORRIGÉ

Premier terme. Sur $]0, +\infty[$, une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x^4}$ est $x \mapsto -\dfrac{1}{3x^3}$. Pour le terme $\dfrac{3}{x^4}$, on multiplie par 3 :

$$3 \times \left(-\frac{1}{3x^3}\right) = -\frac{1}{x^3}.$$

Second terme. Une primitive de $x \mapsto -2x$ est $x \mapsto -x^2$.

Conclusion. Une primitive de g sur $]0, +\infty[$ est la fonction G définie par :

$$G(x) = -\frac{1}{x^3} - x^2.$$

Contrôle. Pour $x > 0$, $G(x) = -x^{-3} - x^2$, donc $G'(x) = 3x^{-4} - 2x = \dfrac{3}{x^4} - 2x = g(x)$.

3.

$h(x) = \dfrac{7}{\sqrt{x}} + x^{\frac{2}{3}}$ sur $]0, +\infty[$.

INDICE

Une primitive de $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ est $2\sqrt{x}$. Pour x^r avec $r \neq -1$, utilise $\dfrac{x^{r+1}}{r+1}$.

CORRIGÉ

Premier terme. Sur $]0, +\infty[$, une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ est $x \mapsto 2\sqrt{x}$. Une primitive de $x \mapsto \dfrac{7}{\sqrt{x}}$ est donc $x \mapsto 14\sqrt{x}$.

Second terme. Ici $r = \dfrac{2}{3}$, donc $r \neq -1$ et $r + 1 = \dfrac{5}{3}$. Une primitive de $x \mapsto x^{\frac{2}{3}}$ est $x \mapsto \dfrac{3}{5}\, x^{\frac{5}{3}}$, car :

$$\frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5}\, x^{\frac{5}{3}}.$$

Conclusion. Une primitive de h sur $]0, +\infty[$ est la fonction H définie par :

$$H(x) = 14\sqrt{x} + \frac{3}{5}\, x^{\frac{5}{3}}.$$

Contrôle. Pour $x > 0$:

$$\begin{aligned} H'(x) &= \frac{14}{2\sqrt{x}} + \frac{3}{5} \times \frac{5}{3}\, x^{\frac{2}{3}} \\ &= \frac{7}{\sqrt{x}} + x^{\frac{2}{3}}. \end{aligned}$$

4.

$k(x) = 5\cos x - 3\sin x$ sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Lis les dérivées à l'envers : $\sin' = \cos$ et $(-\cos)' = \sin$. Attention au signe.

CORRIGÉ

Une primitive de $\cos$ est $\sin$, et une primitive de $\sin$ est $-\cos$. Par linéarité, une primitive de $x \mapsto -3\sin x$ est $x \mapsto -3 \times (-\cos x)$, c'est-à-dire $x \mapsto 3\cos x$.

Conclusion. Une primitive de k sur $\mathbb{R}$ est la fonction K définie par :

$$K(x) = 5\sin x + 3\cos x.$$

Contrôle. Pour tout réel x, $K'(x) = 5\cos x - 3\sin x = k(x)$.

Piège. Écrire $-3\cos x$ serait faux : la dérivée de $x \mapsto -3\cos x$ est $x \mapsto 3\sin x$, et non $x \mapsto -3\sin x$.

Exercice 3

Transformer l'écriture d'abord

Aucune de ces fonctions ne se lit telle quelle dans le tableau des primitives. Change d'abord son écriture, puis cherche une primitive.

1.

$f(x) = (x+3)(2x-1)$ sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Développe le produit : tu obtiens un polynôme du second degré.

CORRIGÉ

Développement. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 - x + 6x - 3 \\ &= 2x^2 + 5x - 3. \end{aligned}$$

Primitive. Terme à terme, $2x^2$ donne $\dfrac{2x^3}{3}$, $5x$ donne $\dfrac{5x^2}{2}$ et -3 donne $-3x$.

Conclusion. Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est la fonction F définie par :

$$F(x) = \frac{2x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 3x.$$

Contrôle. Pour tout réel x, $F'(x) = 2x^2 + 5x - 3 = f(x)$.

2.

Un camarade affirme : « une primitive de $x \mapsto (x+3)(2x-1)$ est la fonction P définie par $P(x) = \left(\frac{x^2}{2} + 3x\right)\left(x^2 - x\right)$, produit d'une primitive de chaque facteur ». Montre qu'il se trompe.

INDICE

Un seul contre-exemple suffit : compare $P'(1)$ et $f(1)$.

CORRIGÉ

Un contre-exemple suffit : une valeur de x pour laquelle $P'(x) \neq f(x)$.

Dérivée de P. P est un produit de deux polynômes, donc dérivable sur $\mathbb{R}$. D'après la dérivée d'un produit, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} &P'(x) \\ &= (x+3)\left(x^2 - x\right) \\ &\quad + \left(\frac{x^2}{2} + 3x\right)(2x-1). \end{aligned}$$

Valeur en 1. On remplace x par 1 :

$$\begin{aligned} P'(1) &= 4 \times 0 + \frac{7}{2} \times 1 \\ &= \frac{7}{2}. \end{aligned}$$

Or $f(1) = 4 \times 1 = 4$.

Conclusion. $P'(1) \neq f(1)$, donc P n'est pas une primitive de f : le camarade se trompe. La linéarité vaut pour une somme et pour le produit par un réel, **jamais pour le produit de deux fonctions**.

3.

$g(x) = \dfrac{6x^4 - 5}{x^2}$ sur $]0, +\infty[$.

INDICE

Le dénominateur est un monôme : divise chaque terme du numérateur par x^2.

CORRIGÉ

Simplification. Pour $x > 0$, on divise chaque terme du numérateur par x^2 :

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{6x^4}{x^2} - \frac{5}{x^2} \\ &= 6x^2 - \frac{5}{x^2}. \end{aligned}$$

Primitive. Une primitive de $x \mapsto 6x^2$ est $x \mapsto 2x^3$. Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ est $x \mapsto -\dfrac{1}{x}$, donc une primitive de $x \mapsto -\dfrac{5}{x^2}$ est $x \mapsto \dfrac{5}{x}$.

Conclusion. Une primitive de g sur $]0, +\infty[$ est la fonction G définie par :

$$G(x) = 2x^3 + \frac{5}{x}.$$

Contrôle. Pour $x > 0$, $G'(x) = 6x^2 - \dfrac{5}{x^2} = g(x)$.

4.

$h(x) = \dfrac{x^2 + 4}{\sqrt{x}}$ sur $]0, +\infty[$.

INDICE

Écris $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ et sépare la fraction en deux termes.

CORRIGÉ

Transformation. Pour $x > 0$, $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, donc :

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{x^2}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{4}{\sqrt{x}} \\ &= x^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Primitive de chaque terme.

- Avec $r = \dfrac{3}{2}$, on a $r + 1 = \dfrac{5}{2}$: une primitive de $x \mapsto x^{\frac{3}{2}}$ est $x \mapsto \dfrac{2}{5}\, x^{\frac{5}{2}}$.
- Une primitive de $x \mapsto \dfrac{4}{\sqrt{x}}$ est $x \mapsto 4 \times 2\sqrt{x}$, soit $x \mapsto 8\sqrt{x}$.

Conclusion. Une primitive de h sur $]0, +\infty[$ est la fonction H définie par :

$$H(x) = \frac{2}{5}\, x^{\frac{5}{2}} + 8\sqrt{x}.$$

Contrôle. Pour $x > 0$, $H'(x) = x^{\frac{3}{2}} + \dfrac{4}{\sqrt{x}} = h(x)$.

Exercice 4

Formes composées : la fonction u est donnée

Dans chaque question, la fonction u est indiquée. Calcule u', reconnais une ligne du tableau des formes composées, puis donne une primitive.

1.

$f(x) = 6x\left(3x^2-1\right)^4$ sur $\mathbb{R}$, avec $u : x \mapsto 3x^2-1$.

INDICE

Compare $u'(x)$ au facteur placé devant la puissance.

CORRIGÉ

Forme. u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = 6x$. Pour tout réel x :

$$f(x) = u'(x)\,u(x)^4.$$

C'est la forme $u'u^n$ avec $n = 4$, dont une primitive est $\dfrac{u^{n+1}}{n+1} = \dfrac{u^5}{5}$.

Conclusion. Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est la fonction F définie par :

$$F(x) = \frac{\left(3x^2-1\right)^5}{5}.$$

Contrôle. D'après la dérivée de u^5, $F'(x) = \dfrac{5 \times 6x\left(3x^2-1\right)^4}{5} = f(x)$.

2.

$g(x) = \dfrac{2x+3}{\left(x^2+3x+4\right)^2}$ sur $\mathbb{R}$, avec $u : x \mapsto x^2+3x+4$.

INDICE

Vérifie d'abord que u ne s'annule jamais (discriminant), puis reconnais $\dfrac{u'}{u^2}$.

CORRIGÉ

u **ne s'annule pas.** Le discriminant du trinôme x^2+3x+4 vaut $9-16 = -7$. Il est négatif et le coefficient de x^2 est positif, donc $u(x) > 0$ pour tout réel x.

Forme. $u'(x) = 2x+3$, donc, pour tout réel x :

$$g(x) = \frac{u'(x)}{u(x)^2}.$$

Comme u ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, une primitive de $\dfrac{u'}{u^2}$ est $-\dfrac{1}{u}$.

Conclusion. Une primitive de g sur $\mathbb{R}$ est la fonction G définie par :

$$G(x) = -\frac{1}{x^2+3x+4}.$$

Contrôle. Pour tout réel x, $G'(x) = \dfrac{2x+3}{\left(x^2+3x+4\right)^2} = g(x)$.

3.

$h(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+6}}$ sur $\mathbb{R}$, avec $u : x \mapsto x^2+2x+6$.

INDICE

Que vaut $u'(x)$? Compare-le au numérateur $x+1$: quel nombre faut-il faire apparaître pour reconnaître $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$?

CORRIGÉ

u **est strictement positive.** Pour tout réel x, $u(x) = (x+1)^2 + 5$, donc $u(x) \geq 5 > 0$.

Forme. $u'(x) = 2x+2 = 2(x+1)$. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{1}{2} \times \frac{2(x+1)}{\sqrt{x^2+2x+6}} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}. \end{aligned}$$

Primitive. Une primitive de $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ est $2\sqrt{u}$. Une primitive de h est donc $\dfrac{1}{2} \times 2\sqrt{u}$, c'est-à-dire $\sqrt{u}$.

Conclusion. Une primitive de h sur $\mathbb{R}$ est la fonction H définie par :

$$H(x) = \sqrt{x^2+2x+6}.$$

Contrôle. Pour tout réel x, $H'(x) = \dfrac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+6}} = h(x)$.

4.

$k(x) = \sqrt{4x+1}$ sur $\left]-\dfrac{1}{4}, +\infty\right[$, avec $u : x \mapsto 4x+1$.

INDICE

Peux-tu écrire k comme une puissance de u ? Que vaut u', et par quel nombre faut-il multiplier et diviser pour faire apparaître une forme $u'u^r$?

CORRIGÉ

Forme. Sur $\left]-\dfrac{1}{4}, +\infty\right[$, $u(x) = 4x+1 > 0$ et $u'(x) = 4$. On fait apparaître u' :

$$\begin{aligned} k(x) &= (4x+1)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{4} \times 4(4x+1)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{4}\, u'(x)\, u(x)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Primitive. Avec $r = \dfrac{1}{2}$, une primitive de $u'u^r$ est $\dfrac{u^{r+1}}{r+1} = \dfrac{2}{3}\, u^{\frac{3}{2}}$. Une primitive de k est donc $\dfrac{1}{4} \times \dfrac{2}{3}\, u^{\frac{3}{2}} = \dfrac{1}{6}\, u^{\frac{3}{2}}$.

Conclusion. Une primitive de k sur $\left]-\dfrac{1}{4}, +\infty\right[$ est la fonction K définie par :

$$\begin{aligned} K(x) &= \frac{1}{6}(4x+1)^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{1}{6}(4x+1)\sqrt{4x+1}. \end{aligned}$$

Contrôle. $K'(x) = \dfrac{1}{6} \times \dfrac{3}{2} \times 4(4x+1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4x+1}$.

Exercice 5

Cosinus, sinus et tangente

Donne une primitive de chaque fonction sur l'intervalle indiqué. Dérive ta réponse : c'est le moyen le plus sûr de contrôler le signe et le coefficient.

1.

$f(x) = \sin(5x)$ sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Une primitive de $\sin(ax+b)$ est $-\dfrac{1}{a}\cos(ax+b)$.

CORRIGÉ

Pour $a \neq 0$, une primitive de $x \mapsto \sin(ax+b)$ est $x \mapsto -\dfrac{1}{a}\cos(ax+b)$. On l'applique avec $a = 5$ et $b = 0$.

Conclusion. Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est la fonction F définie par :

$$F(x) = -\frac{1}{5}\cos(5x).$$

Contrôle. $F'(x) = -\dfrac{1}{5} \times (-5\sin(5x)) = \sin(5x)$.

2.

$g(x) = 6\cos\left(4x - \dfrac{\pi}{3}\right)$ sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Une primitive de $\cos(ax+b)$ est $\dfrac{1}{a}\sin(ax+b)$; garde le coefficient 6.

CORRIGÉ

Pour $a \neq 0$, une primitive de $x \mapsto \cos(ax+b)$ est $x \mapsto \dfrac{1}{a}\sin(ax+b)$. Ici $a = 4$ et $b = -\dfrac{\pi}{3}$, et le coefficient 6 se conserve par linéarité : une primitive de g est $x \mapsto 6 \times \dfrac{1}{4}\sin\left(4x - \dfrac{\pi}{3}\right)$.

Conclusion. Une primitive de g sur $\mathbb{R}$ est la fonction G définie par :

$$G(x) = \frac{3}{2}\sin\left(4x - \frac{\pi}{3}\right).$$

Contrôle. $G'(x) = \dfrac{3}{2} \times 4\cos\left(4x - \dfrac{\pi}{3}\right) = g(x)$.

3.

$h(x) = x\cos\left(x^2\right)$ sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Nomme $u(x) = x^2$: cherche u' devant le cosinus, à une constante près.

CORRIGÉ

Forme. Posons $u(x) = x^2$, de sorte que $u'(x) = 2x$. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{1}{2} \times 2x\cos\left(x^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\,u'(x)\cos\big(u(x)\big). \end{aligned}$$

Primitive. Une primitive de $u'\cos u$ est $\sin u$.

Conclusion. Une primitive de h sur $\mathbb{R}$ est la fonction H définie par :

$$H(x) = \frac{1}{2}\sin\left(x^2\right).$$

Contrôle. $H'(x) = \frac{1}{2} \times 2x\cos\left(x^2\right) = h(x)$.

4.

$k(x) = 3 + 3\tan^2 x$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

INDICE

Factorise par 3 : tu reconnais $1 + \tan^2 x$, dérivée de $\tan x$.

CORRIGÉ

Pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $k(x) = 3\left(1 + \tan^2 x\right)$. Sur cet intervalle, une primitive de $x \mapsto 1 + \tan^2 x$ est $\tan$.

Conclusion. Une primitive de k sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ est la fonction K définie par :

$$K(x) = 3\tan x.$$

Contrôle. $K'(x) = 3\left(1 + \tan^2 x\right) = k(x)$. L'intervalle compte : $\tan$ n'est définie ni en $-\frac{\pi}{2}$ ni en $\frac{\pi}{2}$.

Exercice 6

La primitive qui passe par un point

Pour chaque fonction, détermine la primitive G qui vérifie la condition indiquée.

1.

$f(x) = 9x^2 + 2x - 7$ sur $\mathbb{R}$, avec $G(2) = 1$.

INDICE

Quelle est une primitive de chaque terme de f ? Comment écris-tu alors toutes les primitives de f ? Que devient la condition $G(2) = 1$?

CORRIGÉ

Toutes les primitives. Terme à terme, une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto 3x^3 + x^2 - 7x$. Comme $\mathbb{R}$ est un intervalle, les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions G définies par :

$$G(x) = 3x^3 + x^2 - 7x + c,$$

où c est un réel.

Condition. $G(2) = 3 \times 8 + 4 - 14 + c = 14 + c$. Donc :

$$\begin{aligned} G(2) = 1 &\iff 14 + c = 1 \\ &\iff c = -13. \end{aligned}$$

Conclusion. La primitive de f sur $\mathbb{R}$ telle que $G(2) = 1$ est la fonction G définie par :

$$G(x) = 3x^3 + x^2 - 7x - 13.$$

Vérification. $G(2) = 24 + 4 - 14 - 13 = 1$.

2.

$g(x) = 4 - \dfrac{8}{x^3}$ sur $]-\infty, 0[$, avec $G(-1) = 3$.

INDICE

Une primitive de $\dfrac{1}{x^3}$ est $-\dfrac{1}{2x^2}$. Le point -1 appartient bien à l'intervalle $]-\infty, 0[$.

CORRIGÉ

Toutes les primitives. Sur $]-\infty, 0[$, une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x^3}$ est $x \mapsto -\dfrac{1}{2x^2}$. Une primitive de $x \mapsto -\dfrac{8}{x^3}$ est donc $x \mapsto -8 \times \left(-\dfrac{1}{2x^2}\right)$, soit $x \mapsto \dfrac{4}{x^2}$. Les primitives de g sur $]-\infty, 0[$ sont les fonctions G définies par :

$$G(x) = 4x + \frac{4}{x^2} + c,$$

où c est un réel.

Condition. $G(-1) = -4 + 4 + c = c$, donc $G(-1) = 3$ équivaut à $c = 3$.

Conclusion. La primitive cherchée est la fonction G définie sur $]-\infty, 0[$ par :

$$G(x) = 4x + \frac{4}{x^2} + 3.$$

Vérification. $G(-1) = -4 + 4 + 3 = 3$. On travaille sur $]-\infty, 0[$ parce que g n'est pas définie en 0 et que -1 est négatif.

3.

$h(x) = \cos x - 2\sin x$ sur $\mathbb{R}$, avec $G\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$.

INDICE

Quelle fonction a pour dérivée $\sin x$? Attention au signe. Utilise ensuite $\sin\dfrac{\pi}{2} = 1$ et $\cos\dfrac{\pi}{2} = 0$.

CORRIGÉ

Toutes les primitives. Une primitive de $\cos$ est $\sin$, et une primitive de $x \mapsto -2\sin x$ est $x \mapsto 2\cos x$. Les primitives de h sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions G définies par :

$$G(x) = \sin x + 2\cos x + c,$$

où c est un réel.

Condition. Comme $\sin\dfrac{\pi}{2} = 1$ et $\cos\dfrac{\pi}{2} = 0$:

$$G\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + c.$$

Donc $G\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0 \iff c = -1$.

Conclusion. La primitive cherchée est la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$G(x) = \sin x + 2\cos x - 1.$$

Vérification. $G\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1 + 0 - 1 = 0$, et $G'(x) = \cos x - 2\sin x = h(x)$ pour tout réel x.