BURHAN

Fonctions primitives

2ème Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-experimentales/mathematiques/fonctions-primitives/cours

Chapitre	Semestre
Fonctions primitives	Semestre 1

Remonter de la dérivée à la fonction

Le chariot du TP de physique

En TP de physique, un chariot roule sur un rail droit. Le capteur affiche sa **vitesse** à chaque instant : $v(t) = 2t$, en mètres par seconde, pour $t \geq 0$.

Tu sais que la vitesse est la dérivée de la position $p(t)$: $p'(t) = v(t)$. Mais le capteur de position est en panne. Peux-tu retrouver la position à partir de la vitesse ?

Devine : Quelle position pour cette vitesse ?

La vitesse du chariot est $v(t) = 2t$. Laquelle de ces fonctions peut donner sa position, c'est-à-dire vérifier $p'(t) = 2t$?

A. $p(t) = 2$

Faux.

Tu as dérivé v : 2 est la dérivée de $2t$. Ici, on cherche la fonction dont la dérivée vaut $2t$, pas l'inverse.

B. $p(t) = t^2$

Juste.

La dérivée de t^2 est bien $2t$.

C. $p(t) = 2t^2$

Faux.

La dérivée de $2t^2$ vaut $4t$: deux fois trop.

D. $p(t) = 4t$

Faux.

La dérivée de $4t$ est la constante 4, pas $2t$.

Correction

La fonction $t \mapsto t^2$ convient, car pour tout $t \geq 0$, $(t^2)' = 2t$.

Remarque : $t \mapsto t^2 + 3$ convient aussi, puisque la dérivée d'une constante est nulle. Tu verras plus loin comment choisir entre ces fonctions.

Tu viens de **remonter** de la dérivée à la fonction : c'est le geste de tout ce chapitre.

En SVT, on fait pareil : connaissant le débit d'une perfusion, on retrouve le volume injecté.

Donnons un nom à la fonction retrouvée.

Ce qu'est une primitive

Définition : Primitive d'une fonction sur un intervalle

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On appelle **primitive de f sur I** toute fonction F dérivable sur I telle que, pour tout $x \in I$:

$$F'(x) = f(x).$$

En clair. F est une **primitive** de f sur I quand, en dérivant F, tu retrouves f en chaque point de I. Annonce toujours l'intervalle : « F est une primitive de f sur I ».

Exemple : Un premier exemple

Sur $\mathbb{R}$, la fonction F définie par $F(x) = x^3 + 2x$ est une primitive de la fonction f définie par $f(x) = 3x^2 + 2$.

En effet, F est un polynôme, donc dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x, $F'(x) = 3x^2 + 2$.

Pour le chariot, la position $t \mapsto t^2$ est dérivable sur $[0, +\infty[$ (à droite en 0) : c'est une primitive de la vitesse $t \mapsto 2t$ sur $[0, +\infty[$.

Vérifier une primitive

Méthode : Vérifier qu'une fonction est une primitive

Pour prouver que F est une primitive de f sur I, avance en trois temps.

1. **Dérivabilité** : explique pourquoi F est dérivable sur I (somme, produit, quotient ou composée de fonctions dérivables).
2. **Calcul** : calcule $F'(x)$ pour $x \in I$, puis simplifie.
3. **Conclusion** : constate que $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$, et écris « donc F est une primitive de f sur I ».

Ici, tu ne cherches pas F : on te la donne, et tu la contrôles.

Exemple : Un quotient (guidé)

Montrons que la fonction F définie par $F(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$ est une primitive de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{3}{(x+1)^2}$ sur $I =]-1, +\infty[$.

Dérivabilité. F est un quotient de fonctions dérivables sur I, et $x+1 \neq 0$ pour tout $x \in I$.

Calcul. D'après la dérivée d'un quotient, pour tout $x \in I$, le numérateur de $F'(x)$ vaut $2(x+1) - (2x-1) \times 1 = 3$. Donc :

$$F'(x) = \frac{3}{(x+1)^2}.$$

Conclusion. Pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$: F est une primitive de f sur $]-1, +\infty[$.

Vérifie : Laquelle convient ?

Sur $]0, +\infty[$, laquelle de ces fonctions est une primitive de $f : x \mapsto 1 - \dfrac{1}{x^2}$?

A. $x \mapsto x - \dfrac{1}{x}$

Faux.
La dérivée de $-\dfrac{1}{x}$ est $+\dfrac{1}{x^2}$: on obtient $1 + \dfrac{1}{x^2}$. Attention au signe.

B. $x \mapsto \dfrac{2}{x^3}$

Faux.
C'est la dérivée de f, pas une primitive : tu es descendu au lieu de remonter.

C. $x \mapsto x + \dfrac{1}{x}$

Juste.
Sa dérivée est $1 - \dfrac{1}{x^2}$ pour tout $x > 0$.

D. $x \mapsto x + \dfrac{2}{x^3}$

Faux.
La dérivée de $\dfrac{2}{x^3}$ vaut $-\dfrac{6}{x^4}$: on ne retrouve pas $-\dfrac{1}{x^2}$.

Correction

On dérive chaque proposition.

La fonction $x \mapsto x + \dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et, pour tout $x > 0$, sa dérivée en x vaut $1 - \dfrac{1}{x^2}$, c'est-à-dire $f(x)$.

C'est donc une primitive de f sur $]0, +\infty[$.

À toi : Un produit à dériver

Montre que la fonction $F : x \mapsto \sin x - x\cos x$ est une primitive de $f : x \mapsto x \sin x$ sur $\mathbb{R}$.

Indice 1
Suis les trois temps de la méthode : dérivabilité, calcul, conclusion.
Indice 2
Dérive $x \cos x$ comme un produit : $(uv)' = u'v + uv'$.
Indice 3
Attention au signe moins devant $x \cos x$: il s'applique à toute sa dérivée.

Réponse
Dérivabilité. F est dérivable sur $\mathbb{R}$, comme somme et produit de fonctions dérivables.

Calcul. D'après la dérivée d'un produit, la dérivée de $x \mapsto x \cos x$ est $x \mapsto \cos x - x \sin x$. Donc, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} &F'(x) \\ &= \cos x \\ &\quad - (\cos x - x \sin x) \\ &= x \sin x. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel x, $F'(x) = f(x)$: F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Combien de primitives ?

Existe-t-il toujours une primitive

Première question : une fonction a-t-elle **toujours** une primitive ?

Pour une fonction continue sur un intervalle, la réponse est oui. Ce théorème est **admis** : sa preuve dépasse le niveau du bac.

Théorème : Existence de primitives d'une fonction continue

Toute fonction **continue sur un intervalle** I admet des primitives sur I.

En clair. Une fonction continue sur un intervalle possède des primitives, même quand tu ne sais pas les écrire.

Les polynômes, les fonctions rationnelles, les racines et les fonctions trigonométriques sont continus sur chaque intervalle où ils sont définis.

Exemple : Un cas concret

La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ est continue sur $]0, +\infty[$: elle y admet donc des primitives.

La fonction $x \mapsto -\dfrac{1}{x}$ en est une, car pour tout $x > 0$, sa dérivée en x vaut $\dfrac{1}{x^2}$.

Toutes les primitives

Devine : Une ou plusieurs ?

Sur $\mathbb{R}$, lesquelles de ces fonctions sont des primitives de $x \mapsto 2x$: $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^2 + 5$ et $x \mapsto x^2 - \sqrt{2}$?

A. Seulement x^2

Faux.
La dérivée de $x^2 + 5$ vaut aussi $2x$: la constante disparaît en dérivant.

B. x^2 et $x^2 + 5$, mais pas $x^2 - \sqrt{2}$

Faux.
$\sqrt{2}$ est aussi une constante : sa dérivée est nulle.

C. Les trois

Juste.
Chacune a pour dérivée $2x$: elles ne diffèrent que d'une constante.

D. Aucune, car une fonction n'a qu'une seule primitive

Faux.
Dès qu'une fonction a une primitive, elle en a d'autres : ajoute une constante.

Correction
Les trois fonctions ont pour dérivée $x \mapsto 2x$ sur $\mathbb{R}$.

Ajouter une constante ne change pas la dérivée : une primitive en donne donc une infinité d'autres.

Soit F une primitive de f sur I. Alors $F + 5$, $F - 1$ et, pour tout réel c, $F + c$ en sont aussi.

Reste à savoir s'il en existe d'**autres**. La réponse est non, et la preuve tient en trois lignes.

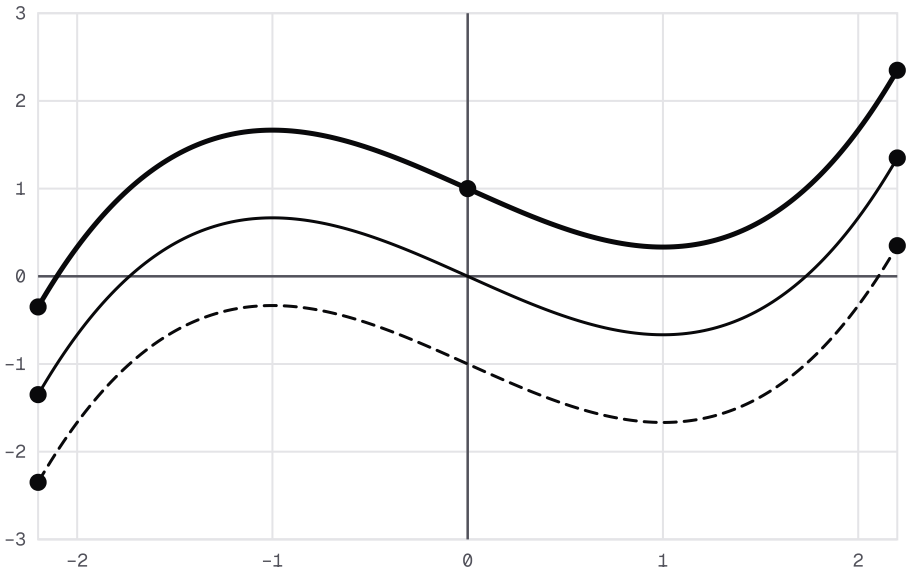
Propriété : Ensemble des primitives d'une fonction

Soit F une primitive de f sur un intervalle I. Les primitives de f sur I sont exactement les fonctions

$$x \mapsto F(x) + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Deux primitives de f sur I diffèrent donc d'une constante.

Démonstration
Pour tout réel c, $(F + c)' = F' = f$ sur I : $F + c$ est une primitive de f. Réciproquement, si G est une primitive de f sur I, alors $(G - F)' = f - f = 0$ sur I. Comme I est un intervalle, $G - F$ est constante sur I : il existe un réel c tel que $G = F + c$.



Trois primitives de f(x) = x² − 1 sur $\mathbb{R}$: F(x) = x³/3 − x + c pour c = −1, 0 et 1. Chaque courbe se déduit d'une autre par une translation verticale ; à abscisse égale, leurs tangentes sont parallèles, de pente f(x). Une seule passe par le point (0, 1) : c'est celle de c = 1.

Attention : Une primitive, pas la primitive

Sans condition, une fonction continue sur un intervalle a une **infinité** de primitives. Dis donc « **une** primitive ».

Tu diras « **la** primitive » seulement quand une condition, comme $G(0) = 1$, en désigne une seule.

Écrire « la primitive de $\cos x$ est $\sin x$ » est inexact : $\sin x + 2$ en est une autre.

Pourquoi un intervalle

La preuve précédente utilise une propriété du chapitre de dérivation : sur un **intervalle**, une fonction de dérivée nulle est constante.

Hors d'un intervalle, cette propriété tombe.

Exemple : Deux morceaux, deux constantes

L'ensemble $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ n'est pas un intervalle. On y définit la fonction G par :

$$G(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x} & \text{si } x < 0 \\ -\dfrac{1}{x} + 3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Pour tout $x \neq 0$, $G'(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

Pourtant, l'écart entre $G(x)$ et $-\dfrac{1}{x}$ vaut 0 pour $x < 0$ et 3 pour $x > 0$: il n'est pas constant.

Attention : Toujours annoncer l'intervalle

Les primitives se cherchent **sur un intervalle**. Pour $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$, on travaille séparément sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.

Écris par exemple : « sur $]0, +\infty[$, une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ est $x \mapsto -\dfrac{1}{x}$ ».

Vérifie : L'écart entre deux primitives

F et G sont deux primitives d'une même fonction f sur $]0, +\infty[$, avec $F(1) = 2$ et $G(1) = 5$. Que vaut $G(x) - F(x)$ pour $x > 0$?

A. 3, pour tout $x > 0$

Juste.
$G - F$ est constante sur l'intervalle, et vaut $G(1) - F(1) = 3$.

B. On ne peut pas savoir : cela dépend de x.

Faux.
Sur un intervalle, deux primitives diffèrent d'une constante : l'écart ne dépend pas de x.

C. 7

Faux.
$7 = 2 + 5$: il faut la différence, pas la somme.

D. -3

Faux.
C'est $F(x) - G(x)$. L'ordre compte : $G(1) - F(1) = 5 - 2$.

Correction
F et G sont deux primitives de f sur l'intervalle $]0, +\infty[$: il existe un réel c tel que, pour tout $x > 0$, $G(x) = F(x) + c$.

En $x = 1$: $5 = 2 + c$, donc $c = 3$.

Conclusion. Pour tout $x > 0$, $G(x) - F(x) = 3$.

Lire le tableau des dérivées à l'envers

Les puissances

Tu connais la dérivée de $x \mapsto x^3$: c'est $x \mapsto 3x^2$. Donc $x \mapsto x^3$ est une primitive de $x \mapsto 3x^2$, et $x \mapsto \dfrac{x^3}{3}$ une primitive de $x \mapsto x^2$.

Chaque ligne du tableau des dérivées, lue de droite à gauche, donne une primitive.

Devine : La puissance quatre

Sur $\mathbb{R}$, quelle fonction est une primitive de $x \mapsto x^4$?

A. x^5

Faux.
La dérivée de x^5 est $5x^4$: il y a un facteur 5 en trop.

B. $4x^3$

Faux.
$4x^3$ est la dérivée de x^4 : tu es descendu au lieu de remonter.

C. $\dfrac{x^5}{4}$

Faux.
Sa dérivée vaut $\dfrac{5x^4}{4}$: on divise par le **nouvel** exposant, 5.

D. $\dfrac{x^5}{5}$

Juste.
Sa dérivée est $\dfrac{5x^4}{5} = x^4$.

Correction

On augmente l'exposant de 1, puis on divise par le nouvel exposant : une primitive est $x \mapsto \dfrac{x^5}{5}$.

Contrôle : pour tout réel x,

$$\left(\frac{x^5}{5}\right)' = \frac{5x^4}{5} = x^4.$$

Propriété : Primitives des fonctions usuelles

Chaque ligne se lit dans le tableau des dérivées usuelles : la dérivée de F est f sur l'intervalle indiqué.

Fonction $f(x)$	Une primitive $F(x)$	Intervalle
a (a réel)	ax	$\mathbb{R}$
x^n ($n \in \mathbb{N}$)	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x^2}$	$-\dfrac{1}{x}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$\dfrac{1}{x^n}$ ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$)	$-\dfrac{1}{(n-1)\,x^{n-1}}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$]0, +\infty[$

Fonction $f(x)$	Une primitive $F(x)$	Intervalle
x^r $(r \in \mathbb{Q}, r \neq -1)$	$\dfrac{x^{r+1}}{r+1}$	$]0, +\infty[$

En clair. Pour une puissance, ajoute 1 à l'exposant et divise par ce nouvel exposant.

Deux lignes se retiennent à part : $\dfrac{1}{x^2}$ donne $-\dfrac{1}{x}$, et $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ donne $2\sqrt{x}$.

Dans le doute, dérive ton résultat : tu dois retrouver la fonction de départ.

Exemple : Deux lectures du tableau

- Sur $\mathbb{R}$, une primitive de $x \mapsto x^7$ est $x \mapsto \dfrac{x^8}{8}$.
- Pour tout $x > 0$, $\sqrt{x} = x^{1/2}$. Sur $]0, +\infty[$, une primitive de $x \mapsto \sqrt{x}$ est donc $x \mapsto \dfrac{x^{3/2}}{3/2}$, soit $x \mapsto \dfrac{2}{3}x^{3/2}$.

Sinus, cosinus, tangente

Même lecture pour la trigonométrie : sur $\mathbb{R}$, $\sin' = \cos$ et $\cos' = -\sin$; sur chaque intervalle où $\tan$ est définie, $\tan' = 1 + \tan^2$.

Le seul piège est le signe moins.

Propriété : Primitives des fonctions trigonométriques usuelles

Soit a un réel non nul et b un réel.

Fonction $f(x)$	Une primitive $F(x)$	Intervalle
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
$1 + \tan^2 x$	$\tan x$	$\left]-\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right[, k \in \mathbb{Z}$
$\cos(ax + b)$	$\dfrac{1}{a}\sin(ax + b)$	$\mathbb{R}$
$\sin(ax + b)$	$-\dfrac{1}{a}\cos(ax + b)$	$\mathbb{R}$

À toi : Vérifier une ligne du tableau

Soit a un réel non nul et b un réel. Vérifie que $x \mapsto \frac{1}{a}\sin(ax+b)$ a pour dérivée $\cos(ax+b)$ sur $\mathbb{R}$. Explique ensuite le rôle du facteur $\frac{1}{a}$.

Indice 1

Dérive $\sin(ax+b)$ comme une composée.

Indice 2

La dérivée de $\sin(ax+b)$ est $a\cos(ax+b)$.

Indice 3

Multiplie par $\frac{1}{a}$: que reste-t-il ?

Réponse

D'après la dérivée d'une fonction composée, la dérivée de $x \mapsto \sin(ax+b)$ est $x \mapsto a\cos(ax+b)$, car la dérivée de $x \mapsto ax+b$ vaut a. Donc, pour tout réel x :

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{a}\sin(ax+b)\right)'\\&= \frac{1}{a} \times a\cos(ax+b)\\&= \cos(ax+b).\end{aligned}$$

Le facteur $\frac{1}{a}$ compense le a produit par la dérivation.

Sommes et coefficients

Une dérivée se calcule terme à terme, en gardant les coefficients. Une primitive aussi.

Propriété : Primitives d'une somme et du produit par un réel

Soit F et G des primitives de f et g sur un intervalle I, et k un réel. Alors, sur I :

- $F+G$ est une primitive de $f+g$;
- kF est une primitive de kf.

Méthode : Trouver une primitive d'une somme

1. **Découpe** f en une somme de termes de la forme « coefficient × fonction du tableau ».
2. **Lis** une primitive de chaque fonction dans les tableaux.
3. **Additionne**, en gardant chaque coefficient.
4. **Contrôle** en dérivant, et annonce l'intervalle.

Exemple : Un polynôme (guidé)

Cherchons une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par $f(x) = 4x^3 - 6x + 5$.

Découpe. Pour tout réel x, $f(x) = 4 \times x^3 - 6 \times x + 5$.

Lecture. $x^3 \to \dfrac{x^4}{4}$, $x \to \dfrac{x^2}{2}$ et $5 \to 5x$.

Somme. Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est la fonction F définie par :

$$\begin{aligned} F(x) &= 4 \times \frac{x^4}{4} - 6 \times \frac{x^2}{2} \\ &\quad + 5x \\ &= x^4 - 3x^2 + 5x. \end{aligned}$$

Contrôle. Pour tout réel x, $F'(x) = 4x^3 - 6x + 5$: on retrouve bien $f(x)$.

Vérifie : Une somme de deux termes

Sur $]0, +\infty[$, quelle fonction est une primitive de $f : x \mapsto 3x^2 + \dfrac{1}{x^2}$?

A. $x^3 + \dfrac{1}{x}$

Faux.

Une primitive de $\dfrac{1}{x^2}$ est $-\dfrac{1}{x}$: le signe moins manque.

B. $x^3 - \dfrac{1}{x}$

Juste.

Sa dérivée est $3x^2 + \dfrac{1}{x^2}$.

C. $6x - \dfrac{2}{x^3}$

Faux.

C'est la dérivée de f, pas une primitive.

D. $x^3 - \dfrac{1}{3x^3}$

Faux.

Pour $\dfrac{1}{x^2} = x^{-2}$, le nouvel exposant est -1, pas -3.

Correction

Terme à terme : $x \mapsto x^3$ est une primitive de $x \mapsto 3x^2$, et $x \mapsto -\dfrac{1}{x}$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ sur $]0, +\infty[$.

Donc la fonction F définie par $F(x) = x^3 - \dfrac{1}{x}$ convient : pour tout $x > 0$, $F'(x) = 3x^2 + \dfrac{1}{x^2}$.

Transformer avant de primitiver

Méthode : Quand aucune ligne ne s'applique

Si l'expression ne ressemble à aucune ligne, change d'abord son écriture :

- **développe** un produit de polynômes ;
- **sépare** une fraction dont le dénominateur est un seul terme : $\dfrac{x^2+1}{x^2} = 1 + \dfrac{1}{x^2}$ pour $x \neq 0$;
- **écris une racine comme une puissance** : $\dfrac{x}{\sqrt{x}} = x^{1/2}$ pour $x > 0$.

Applique ensuite la méthode de la somme.

Exemple : Développer ou écrire une puissance

- Pour tout réel x, $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$. Une primitive sur $\mathbb{R}$ est donc $x \mapsto \dfrac{x^3}{3} + x^2 + x$.
- Pour tout $x > 0$, $x\sqrt{x} = x^{3/2}$. Une primitive sur $]0, +\infty[$ est donc $x \mapsto \dfrac{x^{5/2}}{5/2}$, soit $x \mapsto \dfrac{2}{5}x^2\sqrt{x}$.

Attention : Le produit n'est pas une somme

Les primitives respectent les sommes et les coefficients, **pas les produits**.

Prends $x \times x^2 = x^3$: une primitive de $x \mapsto x^3$ est $x \mapsto \dfrac{x^4}{4}$.

Le produit des primitives, $\dfrac{x^2}{2} \times \dfrac{x^3}{3} = \dfrac{x^5}{6}$, a pour dérivée $\dfrac{5x^4}{6}$, qui n'est pas x^3.

Développe d'abord, ou cherche une forme composée (section suivante).

Attention : Le trou du tableau

La règle des puissances exige un exposant différent de -1. Pour $\dfrac{1}{x} = x^{-1}$, elle ferait diviser par 0.

Pourtant $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $]0, +\infty[$: elle y **admet des primitives**, mais aucune ligne du tableau ne la donne.

Le chapitre des fonctions logarithmiques comble ce trou : il définit une nouvelle fonction, la primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$ qui s'annule en 1. Les formes $\dfrac{u'}{u}$ attendront aussi ce chapitre.

Trouve l'erreur

Un élève écrit : « sur $]0, +\infty[$, une primitive de $\dfrac{1}{x^3}$ est $-\dfrac{1}{4x^4}$ ». Où est l'erreur ?

A. Il n'y a pas d'erreur.

Faux.

Dérive : $\left(-\dfrac{1}{4}x^{-4}\right)' = x^{-5} = \dfrac{1}{x^5}$, et non $\dfrac{1}{x^3}$.

B. Le signe moins est en trop.

Faux.

Le signe moins est juste : il vient de la division par un exposant négatif.

C. L'intervalle devait être $\mathbb{R}$.

Faux.

$\dfrac{1}{x^3}$ n'est pas définie en 0 : on travaille sur $]0,+\infty[$ ou sur $]-\infty,0[$.

D. L'exposant devait passer de -3 à -2, pas à -4.

Juste.

x^{-3} devient $\dfrac{x^{-2}}{-2}$: on **ajoute** 1 à l'exposant.

Correction

Pour tout $x>0$, $\dfrac{1}{x^3}=x^{-3}$. L'exposant augmente de 1 : $-3+1=-2$. Or

$$\frac{x^{-2}}{-2}=-\frac{1}{2x^2}.$$

Une primitive sur $]0,+\infty[$ est donc $x\mapsto -\dfrac{1}{2x^2}$.

Contrôle : pour tout $x>0$, $\left(-\dfrac{1}{2}x^{-2}\right)'=x^{-3}$.

Reconnaître u et u′

Une dérivée de composée à l'envers

Au chapitre de dérivation, tu as appris à dériver une puissance de fonction : si u est dérivable, $(u^n)'=n\,u'\,u^{n-1}$.

Le facteur u' est la **signature** d'une composée. Le repérer, c'est la clé de cette section.

Devine : Une puissance avec sa signature

Sur $\mathbb{R}$, quelle fonction est une primitive de $x\mapsto 8x(x^2+1)^3$?

A. $\dfrac{(x^2+1)^4}{4}$

Faux.

Sa dérivée vaut $2x(x^2+1)^3$: il manque un facteur 4.

B. $4x^2\times\dfrac{(x^2+1)^4}{4}$

Faux.

On ne primitive pas un produit facteur par facteur.

C. $(x^2+1)^4$

Juste.

Sa dérivée est $4\times 2x\times(x^2+1)^3=8x(x^2+1)^3$.

Correction

Posons $u(x) = x^2 + 1$; alors $u'(x) = 2x$ et, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} &8x(x^2+1)^3 \\ &= 4\,u'(x)\,u(x)^3. \end{aligned}$$

Or $(u^4)' = 4\,u'\,u^3$: une primitive sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto (x^2+1)^4$.

Le tableau des formes composées

Propriété : Primitives des formes composées usuelles

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.

Fonction	Une primitive	Condition sur I
$u'\,u^n$ $(n \in \mathbb{N})$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$	aucune
$\dfrac{u'}{u^2}$	$-\dfrac{1}{u}$	u ne s'annule pas
$\dfrac{u'}{u^n}$ $(n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$	$-\dfrac{1}{(n-1)\,u^{n-1}}$	u ne s'annule pas
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$u > 0$
$u'\,u^r$ $(r \in \mathbb{Q}, r \neq -1)$	$\dfrac{u^{r+1}}{r+1}$	$u > 0$
$u'\cos u$	$\sin u$	aucune
$u'\sin u$	$-\cos u$	aucune

En clair. Si tu vois u' en facteur devant une puissance, une racine, un cosinus ou un sinus de u, lis la ligne correspondante du tableau des formes composées usuelles (tableau F09).

Avant tout, **nomme** u et **calcule** u'.

Méthode : Reconnaître une forme composée

1. **Repère** u : la base d'une puissance, le dénominateur, ou ce qui est sous la racine.
2. **Calcule** u', puis cherche-le dans l'expression, à un coefficient près.
3. **Ajuste** ce coefficient : multiplie et divise par le même nombre.
4. **Applique** la ligne du tableau, vérifie la condition sur u, puis dérive pour contrôler.

Exemple : Ajuster un coefficient (guidé)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x(x^2+1)^3$.

Repère. On pose $u(x) = x^2 + 1$.

Calcule. $u'(x) = 2x$. L'expression contient x, pas $2x$.

Ajuste. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} \times 2x\,(x^2+1)^3 \\ &= \frac{1}{2}\,u'(x)\,u(x)^3. \end{aligned}$$

Applique. Une primitive de $u'u^3$ est $\dfrac{u^4}{4}$. Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est donc la fonction F définie par :

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2} \times \frac{(x^2+1)^4}{4} \\ &= \frac{(x^2+1)^4}{8}. \end{aligned}$$

Contrôle. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{4 \times 2x\,(x^2+1)^3}{8} \\ &= x(x^2+1)^3. \end{aligned}$$

On retrouve bien $f(x)$.

Exemple : Sous une racine

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}$.

On pose $u(x) = x^2 + 4$: u est strictement positive sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = 2x$. Pour tout réel x :

$$f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}.$$

Une primitive de $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ est $2\sqrt{u}$. Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est donc la fonction F définie par :

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2} \times 2\sqrt{x^2+4} \\ &= \sqrt{x^2+4}. \end{aligned}$$

Vérifie : Un carré au dénominateur

Sur $\mathbb{R}$, quelle fonction est une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$?

A. $-\dfrac{1}{x^2+1}$

Juste.

Avec $u(x) = x^2 + 1$, $f = \dfrac{u'}{u^2}$, dont une primitive est $-\dfrac{1}{u}$.

B. $\dfrac{1}{x^2+1}$

Faux.

Sa dérivée est $-\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$: le signe est faux.

C. $-\dfrac{1}{3(x^2+1)^3}$

Faux.

L'exposant de u est passé de -2 à -3 : il fallait l'augmenter, et u^{-2} devient $\dfrac{u^{-1}}{-1} = -\dfrac{1}{u}$.

D. $-\dfrac{2x}{x^2+1}$

Faux.

Le facteur $2x$ est u' : la remontée l'absorbe, il ne reste pas dans la primitive.

Correction

On pose $u(x) = x^2+1$: u ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = 2x$.

Sur $\mathbb{R}$, $f = \dfrac{u'}{u^2}$, dont une primitive est $-\dfrac{1}{u}$.

Donc la fonction F définie par $F(x) = -\dfrac{1}{x^2+1}$ convient. Contrôle : pour tout réel x, $F'(x) = \dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$.

À toi : Une racine affine

Trouve une primitive sur $\left]-\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$ de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$.

Indice 1

Nomme u : c'est ce qui est sous la racine.

Indice 2

$u(x) = 2x+1$ et $u'(x) = 2$: écris $f = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{u'}{\sqrt{u}}$.

Indice 3

Une primitive de $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ est $2\sqrt{u}$; vérifie que $u > 0$ sur l'intervalle.

Réponse

On pose $u(x) = 2x+1$. Pour tout $x > -\dfrac{1}{2}$, $u(x) > 0$ et $u'(x) = 2$, donc :

$$f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}.$$

Une primitive de f sur $\left]-\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$ est donc la fonction F définie par :

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2x+1} \\ &= \sqrt{2x+1}. \end{aligned}$$

Contrôle : pour tout $x > -\dfrac{1}{2}$,

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{2}{2\sqrt{2x+1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2x+1}}. \end{aligned}$$

Attention : Une puissance sans sa signature

Dans $(x^2+1)^2$, la dérivée $2x$ de $u(x) = x^2+1$ n'est pas en facteur.

Alors $x \mapsto \dfrac{(x^2+1)^3}{3}$ n'est **pas** une primitive : sa dérivée est $x \mapsto 2x(x^2+1)^2$. Diviser par $2x$ pour « corriger » ne marche pas non plus.

On développe : pour tout réel x, $(x^2+1)^2 = x^4 + 2x^2 + 1$. Une primitive sur $\mathbb{R}$ est donc

$$x \mapsto \frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x.$$

Trigonométrie et argument affine

Propriété : Primitive de x ↦ f(ax + b)

Soit f une fonction admettant une primitive F sur un intervalle J, a un réel non nul et b un réel. Sur tout intervalle I tel que $ax+b \in J$ pour tout $x \in I$, la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{a}\,F(ax+b)$$

est une primitive de $x \mapsto f(ax+b)$.

Méthode : Reconnaître une forme trigonométrique

1. **Nomme** u l'argument du cosinus ou du sinus.
2. Si $u(x) = ax+b$, **divise par** a : une primitive de $\sin(ax+b)$ est $-\dfrac{1}{a}\cos(ax+b)$.
3. Sinon, **cherche** u' en facteur, à un coefficient près : $u'\cos u$ donne $\sin u$, et $u'\sin u$ donne $-\cos u$.
4. **Contrôle** le signe en dérivant.

Exemple : Deux arguments affines

Cherchons une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par :

$$f(x) = \cos(3x) - 2\sin\left(\frac{x}{2}\right).$$

- Pour $x \mapsto \cos(3x)$, $a = 3$: une primitive est $x \mapsto \dfrac{1}{3}\sin(3x)$.
- Pour $x \mapsto \sin\left(\dfrac{x}{2}\right)$, $a = \dfrac{1}{2}$: une primitive est $x \mapsto -2\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

Par linéarité, une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est la fonction F définie par :

$$F(x) = \frac{1}{3}\sin(3x) + 4\cos\left(\frac{x}{2}\right).$$

Contrôle : pour tout réel x, $F'(x) = f(x)$, car la dérivée de $x \mapsto 4\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$ est $x \mapsto -2\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

Attention : Le coefficient oublié

Une primitive de $x \mapsto (3x+1)^2$ n'est pas $x \mapsto \dfrac{(3x+1)^3}{3}$: la dérivée de cette fonction est $x \mapsto 3(3x+1)^2$.

Ici $u'(x) = 3$, donc on divise encore par 3 : une primitive sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto \dfrac{(3x+1)^3}{9}$.

De même, une primitive de $x \mapsto \sin(2x)$ est $x \mapsto -\dfrac{1}{2}\cos(2x)$, pas $x \mapsto -\cos(2x)$. Dériver ton résultat révèle cette erreur.

Trouve l'erreur

Pour trouver une primitive sur $\mathbb{R}$ de $f : x \mapsto 2x\sin(x^2)$, un élève écrit : « $u(x) = x^2$, $u'(x) = 2x$, donc une primitive est $\cos(x^2)$ ». Où est l'erreur ?

A. Dans le choix de u : il fallait $u(x) = 2x$.

Faux.
u est l'argument du sinus, ici x^2 ; et $2x$ est bien sa dérivée.

B. Il faut garder le facteur $2x$: $2x\cos(x^2)$.

Faux.
Le facteur $2x$ est u' : la remontée l'absorbe, il ne reste pas.

C. Il fallait $\sin(x^2)$.

Faux.
La dérivée de $\sin(x^2)$ est $2x\cos(x^2)$, pas $2x\sin(x^2)$.

D. Dans le signe : une primitive de $u'\sin u$ est $-\cos u$.

Juste.
La dérivée de $\cos(x^2)$ est $-2x\sin(x^2)$: il manque un signe moins.

Correction

Avec $u(x) = x^2$ et $u'(x) = 2x$, on a $f = u'\sin u$ sur $\mathbb{R}$, dont une primitive est $-\cos u$.

Donc la fonction F définie par $F(x) = -\cos(x^2)$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

> Contrôle : pour tout réel x, $F'(x) = 2x\sin(x^2)$.

Bonus : l'énoncé général

Remarque : Bonus : un seul énoncé derrière le tableau

Bonus. Tu peux sauter ce passage sans perdre le fil.

Chaque ligne du tableau F09 (formes composées usuelles) remonte la dérivée d'une composée $v \circ u$, avec à chaque fois une fonction v différente : une puissance, une racine, un sinus ou un cosinus. L'énoncé qui suit les réunit toutes.

Propriété : Primitive d'une fonction de la forme u′ × (v′ ∘ u)

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et v une fonction dérivable sur un intervalle J tel que $u(x) \in J$ pour tout $x \in I$. Alors $v \circ u$ est une primitive sur I de la fonction

$$x \mapsto u'(x)\, v'\big(u(x)\big).$$

Choisir la bonne primitive

Retour au chariot

Revenons au chariot du début. Sa vitesse est $v(t) = 2t$, et toutes les fonctions $t \mapsto t^2 + c$, avec c réel, ont pour dérivée $t \mapsto 2t$.

Il manque une information : au départ, à $t = 0$, le chariot est à 3 mètres du bout du rail.

Devine : La position du chariot

Quelle fonction donne la position du chariot, sachant que $p'(t) = 2t$ et $p(0) = 3$?

A. $p(t) = t^2$
Faux.
$p(0) = 0$: la condition de départ n'est pas respectée.

B. $p(t) = 3t^2$
Faux.
Sa dérivée est $6t$, et $p(0) = 0$.

C. $p(t) = t^2 - 3$
Faux.
$p(0) = -3$, pas 3.

D. $p(t) = t^2 + 3$
Juste.

$p'(t) = 2t$ et $p(0) = 0 + 3 = 3$.

Correction
Les positions possibles sont les fonctions $t \mapsto t^2 + c$, avec c réel.

La condition $p(0) = 3$ donne $0 + c = 3$, donc $c = 3$.

Une seule fonction convient : pour tout $t \geq 0$, $p(t) = t^2 + 3$.

Propriété : Primitive prenant une valeur donnée en un point

Soit f une fonction qui admet des primitives sur un intervalle I, x_0 un élément de I et y_0 un réel. Il existe **une unique** primitive G de f sur I telle que

$$G(x_0) = y_0.$$

Si F est une primitive de f sur I, c'est $G(x) = F(x) + y_0 - F(x_0)$.

Démonstration
D'après F03, les primitives de f sur I sont les fonctions $F + c$. La condition $F(x_0) + c = y_0$ équivaut à $c = y_0 - F(x_0)$: elle détermine une seule valeur de c, donc une seule primitive.

En clair. Parmi toutes les primitives, une condition « $G(x_0) = y_0$ » en choisit **une seule**. On dit alors « **la** primitive qui prend la valeur y_0 en x_0 ».

Ce geste te servira en calcul intégral et pour les équations différentielles.

La méthode en quatre temps

Méthode : Trouver la primitive qui vérifie une condition

1. **Une primitive** : trouve une primitive F de f sur I.
2. **Toutes** : écris $G(x) = F(x) + c$, avec $c \in \mathbb{R}$.
3. **La condition** : calcule $G(x_0)$, écris $G(x_0) = y_0$, puis résous cette équation d'inconnue c.
4. **Conclusion** : écris $G(x)$ et vérifie que $G(x_0) = y_0$.

Exemple : Un polynôme (guidé)

Cherchons la primitive G sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$, telle que $G(1) = 2$.

1. **Une primitive** : la fonction F définie par $F(x) = x^3 - 2x^2 + x$.
2. **Toutes** : il existe un réel c tel que, pour tout réel x, $G(x) = x^3 - 2x^2 + x + c$.
3. **La condition** : $G(1) = 1 - 2 + 1 + c = c$, donc $c = 2$.

4. **Conclusion** : pour tout réel x, $G(x) = x^3 - 2x^2 + x + 2$, et l'on a bien $G(1) = 2$.

À toi : Avec un sinus

Détermine la primitive G sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto 2\sin x$ telle que $G(\pi) = 1$.

Indice 1
Une primitive de $\sin x$ est $-\cos x$.
Indice 2
Toutes les primitives : $G(x) = -2\cos x + c$.
Indice 3
$\cos \pi = -1$: attention au double signe moins.

Réponse
Toutes les primitives. Une primitive de f est $x \mapsto -2\cos x$. Il existe donc un réel c tel que, pour tout réel x, $G(x) = -2\cos x + c$.

La condition.

$$\begin{aligned} G(\pi) &= -2\cos \pi + c \\ &= 2 + c. \end{aligned}$$

La condition $G(\pi) = 1$ donne $2 + c = 1$, donc $c = -1$.

Conclusion. Pour tout réel x, $G(x) = -2\cos x - 1$.

Signe de f, variations de F

Devine : Le sens de variation d'une primitive

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 1$, et F une primitive de f sur $\mathbb{R}$. Sur $[-1, 1]$, que peut-on dire de F ?

A. F est croissante.
Faux.
Sur $[-1, 1]$, $x^2 \leq 1$: f est négative, pas positive.

B. F est négative.
Faux.
Le signe de f renseigne sur les **variations** de F, pas sur son signe : $F + 10$ est aussi une primitive.

C. F est décroissante.
Juste.
$F' = f \leq 0$ sur $[-1, 1]$, et f ne s'annule qu'en -1 et en 1.

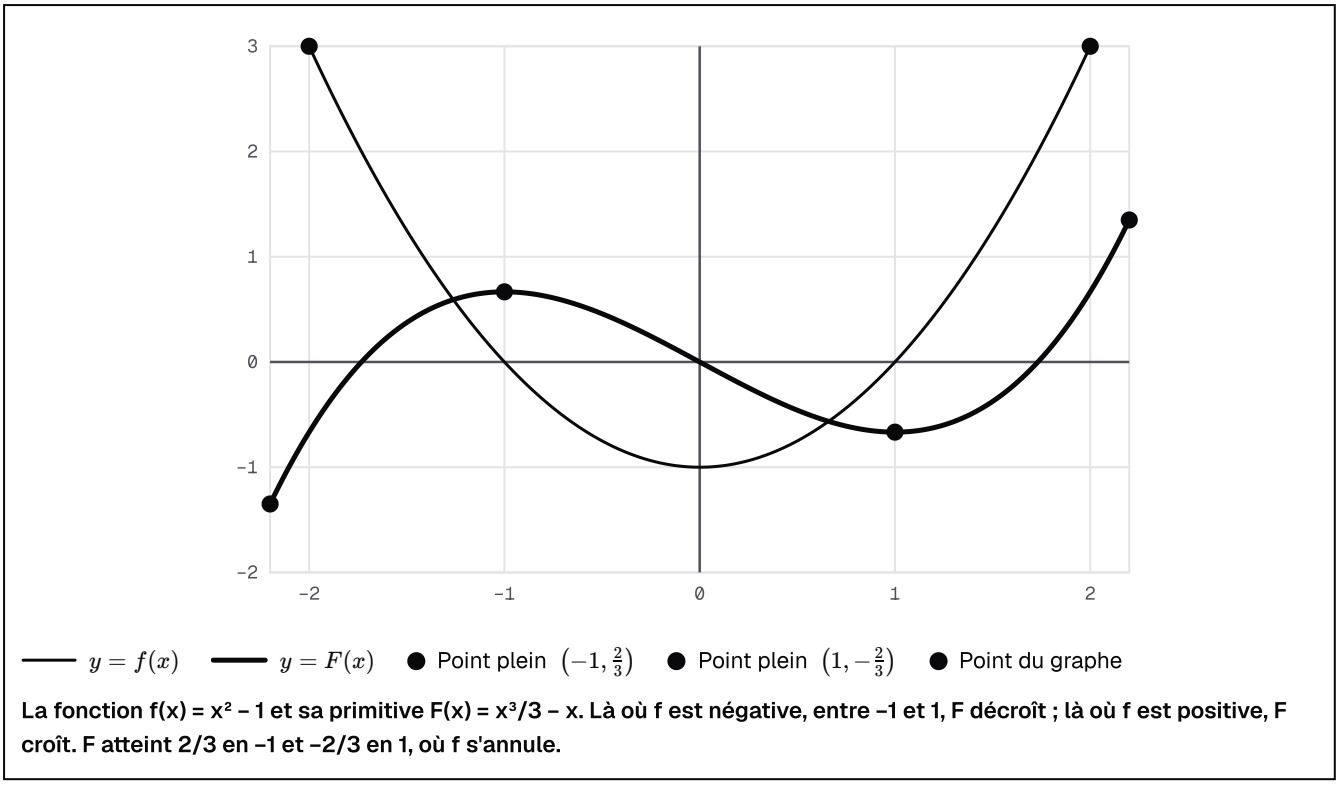
D. On ne peut rien dire sans connaître F.

Faux.
On connaît F', qui est f : son signe suffit.

Correction
F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $F'(x) = f(x) = x^2 - 1$.

Pour tout $x \in [-1, 1]$, $x^2 - 1 \leq 0$, avec égalité seulement en -1 et en 1.

Donc F est décroissante sur $[-1, 1]$, quelle que soit la primitive choisie.



La fonction f(x) = x² – 1 et sa primitive F(x) = x³/3 – x. Là où f est négative, entre –1 et 1, F décroît ; là où f est positive, F croît. F atteint 2/3 en –1 et –2/3 en 1, où f s'annule.

À retenir. Comme $F' = f$, le **signe de** f donne le **sens de variation de** F : F croît là où f est positive, et décroît là où f est négative.

Au bac : les primitives dans un problème

Ce qu'il faut retenir

À retenir : L'essentiel en cinq lignes

- F est une primitive de f sur un intervalle I quand $F' = f$ sur I.
- Une fonction continue sur un intervalle y admet des primitives (résultat admis).
- Si F en est une, les primitives de f sur I sont les $F + c$, avec $c \in \mathbb{R}$.
- On lit les primitives dans le tableau des dérivées, terme à terme ; pour une composée, on nomme u et u'.

- Une condition $G(x_0) = y_0$ désigne une seule primitive.

Puissance, n entier naturel, sur $\mathbb{R}$

$$x^n \to \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Puissance, r rationnel ≠ −1, sur]0, +∞[

$$x^r \to \frac{x^{r+1}}{r+1}$$

Inverse du carré, sur]−∞, 0[ou]0, +∞[

$$\frac{1}{x^2} \to -\frac{1}{x}$$

Inverse de la racine, sur]0, +∞[

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \to 2\sqrt{x}$$

Cosinus d'argument affine, a non nul

$$\cos(ax+b) \to \frac{1}{a}\sin(ax+b)$$

Sinus d'argument affine, a non nul

$$\sin(ax+b) \to -\frac{1}{a}\cos(ax+b)$$

Forme u′uⁿ, n entier naturel

$$u'u^n \to \frac{u^{n+1}}{n+1}$$

Forme u′/u², u ne s'annule pas

$$\frac{u'}{u^2} \to -\frac{1}{u}$$

Forme u′/√u, avec u > 0

$$\frac{u'}{\sqrt{u}} \to 2\sqrt{u}$$

Une question type

Dans les 15 sujets consultés, les primitives n'ont jamais d'exercice à elles. Elles apparaissent pourtant dans 14 des 15 sujets consultés par BURHAN, à l'intérieur d'un exercice ou d'un problème.

La question la plus fréquente, dans 10 des 15 sujets, te donne une fonction et te demande de **vérifier** que c'est une primitive. Elle vaut $0{,}5$ point dans 8 de ces 10 sujets.

Dans ces sujets, la fonction à vérifier contient toujours un logarithme ou une exponentielle : tu les étudieras dans les prochains chapitres. La méthode, elle, ne change pas.

Le barème de la session normale 2023 accorde même un quart de point au simple rappel de la définition : $H' = h$ sur l'intervalle.

Retiens aussi que la primitive à vérifier est notée H dans 6 de ces 10 sujets.

Exemple **: Coin examen : la rédaction attendue**

Énoncé. Pour $x > -1$, on pose $h(x) = \dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}$ et $H(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$.

1. Montre que H est une primitive de h sur $]-1, +\infty[$.
2. Étudie le signe de $h(x)$, puis déduis-en les variations de H.

Rédaction.

1. Par définition, il suffit de montrer deux choses : H est dérivable sur $I =]-1, +\infty[$, et $H' = h$ sur I.

H est dérivable sur I, comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas sur I. Pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned} H'(x) &= \frac{2x(x+1) - x^2}{(x+1)^2} \\ &= \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} = h(x). \end{aligned}$$

Donc H est une primitive de h sur $]-1, +\infty[$.

2. Pour tout $x \in I$, $h(x) = \dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2}$, avec $x + 2 > 0$ et $(x+1)^2 > 0$: $h(x)$ a le signe de x.

Comme $H' = h$ sur I, H est décroissante sur $]-1, 0]$ et croissante sur $[0, +\infty[$.

Vérifie : Une seule est vraie

Parmi ces affirmations, laquelle est vraie ?

A. Une primitive de $x \mapsto \cos(2x)$ sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto 2\sin(2x)$.

Faux.

La dérivée de $2\sin(2x)$ vaut $4\cos(2x)$. Il faut $\dfrac{1}{2}\sin(2x)$.

B. Deux primitives distinctes d'une même fonction sur un intervalle peuvent avoir un point commun.

Faux.

Elles diffèrent d'une constante non nulle : leurs courbes n'ont aucun point commun.

C. Si f est positive sur un intervalle I, toute primitive de f sur I y est croissante.

Juste.

$F' = f \geq 0$ sur I : F est croissante sur I.

D. Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ sur $]0, +\infty[$ est $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

Faux.

La dérivée de $\dfrac{1}{x}$ vaut $-\dfrac{1}{x^2}$: il manque un signe moins. Une primitive de $\dfrac{1}{x^2}$ sur $]0, +\infty[$ est $-\dfrac{1}{x}$.

Correction

Si $f \geq 0$ sur I et $F' = f$ sur I, alors F est croissante sur I : c'est la seule affirmation vraie.

Les autres sont fausses :

- une primitive de $x \mapsto \cos(2x)$ est $x \mapsto \dfrac{1}{2}\sin(2x)$;
- deux primitives distinctes diffèrent d'une constante non nulle, donc leurs courbes ne se rencontrent pas ;

- $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ a pour dérivée $x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$: une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ sur $]0, +\infty[$ est $x \mapsto -\dfrac{1}{x}$.

Le mot du prof. Tu sais maintenant remonter d'une dérivée à une fonction, et choisir la bonne.

Dans 7 des 15 sujets consultés, c'est toi qui dois trouver une primitive usuelle pour calculer une intégrale : ce chapitre t'y prépare.

Le chapitre des fonctions logarithmiques part d'ailleurs d'une primitive, celle de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Fonctions primitives » (2bac · sciences-experimentales · mathematiques)