BURHAN

Fonctions logarithmiques : fiche de révision

2ème Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-experimentales/mathematiques/fonctions-logarithmiques/resume

Chapitre	Semestre
Fonctions logarithmiques	Semestre 1

L'essentiel du chapitre

À retenir : Cinq réflexes

- **Le domaine passe avant le calcul** : $\ln A$ n'existe que pour $A > 0$. Pose les conditions, résous, puis trie les solutions.
- **Un produit devient une somme** : la propriété porte sur des facteurs strictement positifs, et sur rien d'autre.
- **Comparer les $\ln$, c'est comparer les nombres** : $\ln$ est strictement croissante.
- **Les puissances de x gagnent** : en $+\infty$ comme en 0^+, face à $\ln x$. Cite la limite de référence par son nom.
- **Dériver** $\ln(u)$: $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$ quand $u > 0$; le signe est celui de u'.

Chaque affirmation s'appuie sur une justification précise.

Pour affirmer…	tu cites…
$\ln(u(x))$ existe	$u(x) > 0$
$\ln a < \ln b$	$0 < a < b$ et la stricte croissance de $\ln$
$\ln(ab) = \ln a + \ln b$	$a > 0$ et $b > 0$
$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$	la croissance comparée de référence
la droite $x = 0$ est asymptote verticale	une limite infinie en 0^+
branche parabolique de direction (Ox)	une limite infinie et $\dfrac{f(x)}{x} \to 0$
$(\ln(u(x)))' = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$	u dérivable et strictement positive sur l'intervalle

La fonction ln : définition, variations, signe

Définition : Fonction logarithme népérien

La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $]0, +\infty[$: elle y admet des primitives. La **fonction logarithme népérien**, notée $\ln$, est la primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$ qui s'annule en 1.

Ainsi $\ln$ est définie sur $]0,+\infty[$ et $\ln 1 = 0$. On écrit $\ln x$, et $\ln(u(x))$ avec des parenthèses dès que l'argument est composé.

Valeur en 1

$$\ln 1 = 0$$

Dérivée sur]0, +∞[

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}$$

Valeur approchée de ln 2

$$\ln 2 \approx 0{,}693$$

Valeur approchée de ln 3

$$\ln 3 \approx 1{,}099$$

Valeur approchée de ln 10

$$\ln 10 \approx 2{,}303$$

Propriété : Stricte croissance et comparaison

La fonction $\ln$ est **strictement croissante** sur $]0,+\infty[$. Par conséquent, pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$:

$$\ln a = \ln b \iff a = b$$

et

$$\ln a < \ln b \iff a < b.$$

Signe de ln x : négatif entre 0 et 1, nul en 1, positif au-delà.

x	0		1		$+\infty$
$\ln x$	‖	−	0	+	

Variations de ln : strictement croissante sur]0, +∞[, nulle en 1 ; les limites −∞ en 0 (à droite) et +∞ en +∞ sont justifiées dans la section Limites.

x	0		1		$+\infty$
$\frac{1}{x}$	‖	+		+	
$\ln x$	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

Propriétés algébriques

Théorème : Logarithme d'un produit

Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$:

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b.$$

Les deux nombres a et b doivent être **strictement positifs** : l'égalité n'a pas de sens sinon.

Propriété : Logarithme d'un inverse et d'un quotient

Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$:

$$\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln b$$

et

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b.$$

Propriété : Logarithme d'une puissance et d'une racine

Pour tout réel $a > 0$ et tout nombre rationnel r :

$$\ln(a^r) = r \ln a.$$

En particulier, pour tout entier naturel n, $\ln(a^n) = n \ln a$, et $\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$.

Propriété : Logarithme et valeur absolue

Pour tout réel $x \neq 0$:

$$\ln(x^2) = 2 \ln |x|.$$

Pour tous réels a et b tels que $ab > 0$: $\ln(ab) = \ln |a| + \ln |b|$.

Pour $x < 0$, l'écriture $2 \ln x$ n'a pas de sens.

Méthode : avant d'appliquer une propriété

1. **Contrôle des signes** : chaque nombre placé sous un $\ln$ doit être strictement positif, sinon la propriété ne s'applique pas telle quelle.
2. **Facteurs premiers** : décompose les entiers ; tout s'exprime alors avec $\ln 2$, $\ln 3$, $\ln 5$…
3. **Signe inconnu** : un carré se traite avec la valeur absolue, $\ln(x^2) = 2 \ln |x|$ pour $x \neq 0$.
4. **Dans une équation** : ne regroupe en un seul logarithme qu'une fois le domaine établi.

Exemple : Calculs express

- $\ln 18 = \ln(2 \times 3^2) = \ln 2 + 2 \ln 3 \approx 2{,}890$.
- $\ln\left(\frac{1}{8}\right) = -\ln(2^3) = -3 \ln 2$.

- $\ln 50 - \ln 2 = \ln 25 = 2\ln 5$.
- Pour $x \neq 0$: $\ln(x^4) = \ln\left((x^2)^2\right) = 2\ln(x^2) = 4\ln|x|$.

Limites et croissances comparées

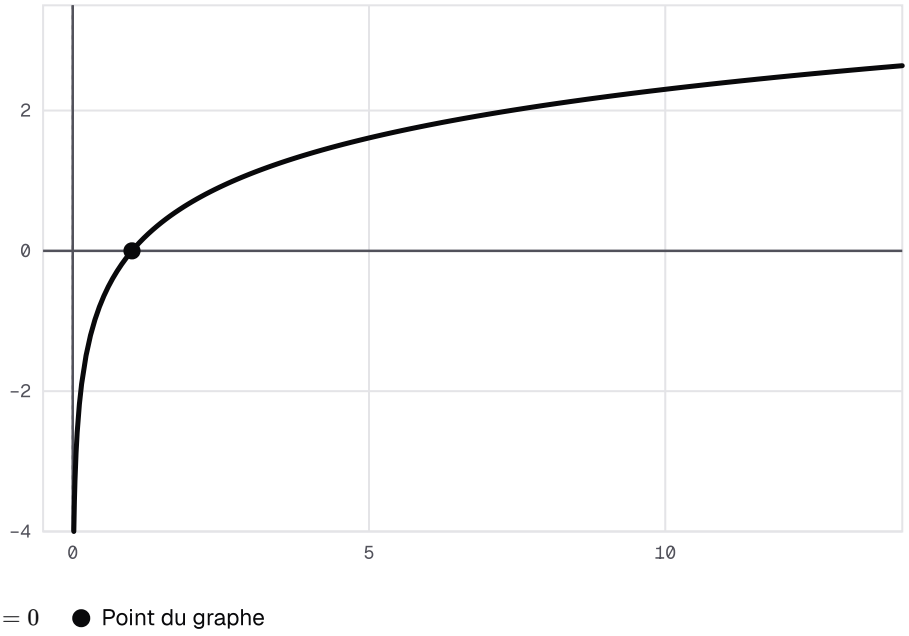
Propriété : Limites de ln aux bornes de son domaine

$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$$

et

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty.$$

La droite d'équation $x = 0$ est donc asymptote verticale à la courbe de $\ln$.



La fonction ln tend vers −∞ en 0 à droite, d'où l'asymptote verticale x = 0, et vers +∞ en +∞, mais en montant de plus en plus lentement.

Propriété : Croissances comparées de référence

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

et

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0.$$

Comme $\ln x$ tend vers $+\infty$ alors que $\dfrac{\ln x}{x}$ tend vers 0, la courbe de $\ln$ admet en $+\infty$ une **branche parabolique de direction l'axe des abscisses**.

Propriété : Croissances comparées avec une puissance de x

Pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$$

et

$$\lim_{x \to 0^+} x^n \ln x = 0.$$

Statut : la limite de $\ln$ en $+\infty$ est admise ; celle en 0^+ s'en déduit, car $\ln x = -\ln\left(\frac{1}{x}\right)$. Les croissances comparées (F10, F11) sont admises. Les deux limites suivantes découlent du nombre dérivé $\ln'(1) = 1$:

En 0, quotient de ln(1 + x) par x

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

En 1, quotient de ln x par x − 1

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1} = 1$$

Tangente à la courbe de ln au point d'abscisse 1

$$y = x - 1$$

Méthode : face à une forme indéterminée

1. **Repère le terme dominant** : une puissance x^n ($n \geq 1$) écrase $\ln x$ en $+\infty$, et l'emporte aussi en 0^+ dans le produit $x^n \ln x$.
2. **Factorise** par ce terme pour faire apparaître une limite de référence.
3. **Change de variable** si l'argument est déguisé : $X = \sqrt{x}$, $X = \frac{1}{x}$ ou $X = 1 + x$.
4. **Cite** la limite de référence employée ; l'interprétation graphique vient dans une phrase à part.

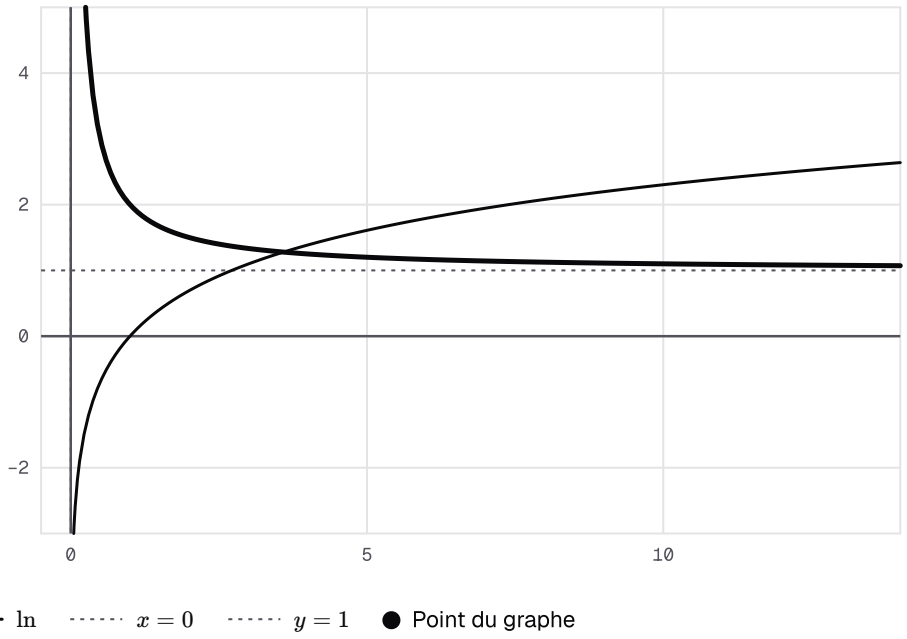
Exemple : Trois limites rédigées

- En $+\infty$: $x - 3\ln x = x\left(1 - 3\,\frac{\ln x}{x}\right)$. Par croissance comparée, $\frac{\ln x}{x} \to 0$; la parenthèse tend vers 1, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - 3\ln x) = +\infty$.
- En 0^+, avec $X = \frac{1}{x}$: $x \ln x = -\frac{\ln X}{X}$ et $X \to +\infty$, donc on retrouve $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x = 0$.
- En 0^+ : $\frac{\ln x}{x} = \frac{1}{x} \times \ln x$, produit d'un facteur tendant vers $+\infty$ par un facteur tendant vers $-\infty$. Aucune indétermination : $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty$.

Remarque : Lire une limite sur la courbe

- $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$: la droite $x = a$ est **asymptote verticale** (de même en a^-).
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$: la droite $y = b$ est **asymptote horizontale**.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$: la droite $y = ax + b$ est **asymptote oblique**.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (ou $-\infty$) et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$: **branche parabolique de direction l'axe des abscisses**.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (ou $-\infty$) et $\dfrac{f(x)}{x}$ de limite infinie : **branche parabolique de direction l'axe des ordonnées**.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$, avec $a \neq 0$, et $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - ax) = +\infty$ (ou $-\infty$) : **branche parabolique de direction la droite $y = ax$**.

Mêmes règles en $-\infty$.



Deux lectures sur un même dessin : la courbe de 1 + 1/x a deux asymptotes, x = 0 et y = 1, et celle de ln une branche parabolique de direction l'axe des abscisses.

Le nombre e

Théorème : Bijection et nombre e

La fonction $\ln$ est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$, de limites $-\infty$ en 0^+ et $+\infty$ en $+\infty$: l'image de $]0, +\infty[$ par $\ln$ est $\mathbb{R}$. Pour tout réel m, l'équation $\ln x = m$ admet donc **une unique solution** dans $]0, +\infty[$.

Le nombre e est l'unique réel tel que $\ln \mathrm{e} = 1$; $\mathrm{e} \approx 2{,}718$. Pour tout rationnel r, $\ln(\mathrm{e}^r) = r$.

Exemple : Calculer avec e

- $\mathrm{e} \approx 2{,}718$ et $\mathrm{e}^2 \approx 7{,}389$.
- $\ln(\mathrm{e}^2) = 2$, $\ln\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right) = -1$, $\ln\sqrt{\mathrm{e}} = \dfrac{1}{2}$, et $\ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^3}{\sqrt{\mathrm{e}}}\right) = 3 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{2}$.
- Pour $x > 0$: $\ln x = 3 \iff x = \mathrm{e}^3$, et $\ln x > -1 \iff x > \mathrm{e}^{-1}$.

Dans ce chapitre, tu n'écris e^r que pour r rationnel : la puissance d'exposant réel quelconque arrivera avec la fonction exponentielle.

Équations et inéquations : le domaine d'abord

Méthode : résoudre en quatre temps

1. **Domaine d'abord** : chaque argument de $\ln$ strictement positif ; leur intersection donne le domaine D.
2. **Regrouper en une seule écriture** : sur D, regroupe pour obtenir $\ln A = \ln B$, $\ln A < \ln B$ ou $\ln X = m$.
3. **Comparer les arguments** : retire les $\ln$ grâce à la stricte croissance, ou grâce à $\ln X = m \iff X = \mathrm{e}^m$ pour m rationnel.
4. **Garder les solutions du domaine** : l'ensemble des solutions est l'intersection des valeurs trouvées avec D.

Égalité, A > 0 et B > 0

$$\ln A = \ln B \iff A = B$$

Inégalité, A > 0 et B > 0

$$\ln A < \ln B \iff A < B$$

Équation de référence, X > 0 et m rationnel

$$\ln X = m \iff X = \mathrm{e}^m$$

Inéquation de référence, m rationnel

$$\ln X < m \iff 0 < X < \mathrm{e}^m$$

Exemple : une valeur à écarter

Résous $\ln(x^2 + 4) = 2\ln(3x - 2)$.

- **Domaine** : $x^2 + 4 > 0$ pour tout réel x, et $3x - 2 > 0 \iff x > \dfrac{2}{3}$. Donc $D = \left]\dfrac{2}{3}, +\infty\right[$.
- **Transformation** : sur D, $2\ln(3x - 2) = \ln\left((3x - 2)^2\right)$. L'équation équivaut à $x^2 + 4 = 9x^2 - 12x + 4$, soit $8x^2 - 12x = 0$, c'est-à-dire $4x(2x - 3) = 0$.
- **Tri** : $0 \notin D$ et $\dfrac{3}{2} \in D$. Donc $S = \left\{\dfrac{3}{2}\right\}$.

Exemple : deux inéquations

Domaine commun : $3x-2>0$, soit $x>\dfrac{2}{3}$.

- $\ln(3x-2)\leq 0$: comme $0=\ln 1$, cela équivaut à $3x-2\leq 1$, soit $x\leq 1$. Donc $S=\left]\dfrac{2}{3},1\right]$.
- $\ln(3x-2)<1$: cela équivaut à $0<3x-2<\mathrm{e}$, soit $\dfrac{2}{3}<x<\dfrac{\mathrm{e}+2}{3}$, avec $\dfrac{\mathrm{e}+2}{3}\approx 1{,}573$. Donc $S=\left]\dfrac{2}{3},\dfrac{\mathrm{e}+2}{3}\right[$.

Remarque : Bonus : un système logarithmique

$$\begin{cases}\ln x+\ln y=\ln 6\\ x+y=5\end{cases}$$

Avec $x>0$ et $y>0$, la première équation équivaut à $xy=6$.

Les nombres x et y ont pour somme 5 et pour produit 6 : ce sont les racines de $t^2-5t+6=0$, soit 2 et 3. Les couples $(2,3)$ et $(3,2)$ sont strictement positifs : ils conviennent tous les deux.

Dérivées et primitives

Théorème : Dérivée de ln(u)

Soit u une fonction dérivable et **strictement positive** sur un intervalle I. Alors la fonction $x\mapsto \ln(u(x))$ est dérivable sur I et, pour tout $x\in I$:

$$(\ln(u(x)))'=\frac{u'(x)}{u(x)}.$$

Le signe de cette dérivée est celui de $u'(x)$.

ln sur]0, +∞[

$$(\ln x)'=\frac{1}{x}$$

ln(u), avec u strictement positive sur l'intervalle

$$(\ln u)'=\frac{u'}{u}$$

ln de la valeur absolue de u, avec u sans zéro sur l'intervalle

$$(\ln|u|)'=\frac{u'}{u}$$

Primitives de u'/u, u dérivable à dérivée continue et sans zéro sur l'intervalle

$$\ln|u|+c,\quad c\in\mathbb{R}$$

Primitives de 1/x sur]0, +∞[

$$\ln x+c,\quad c\in\mathbb{R}$$

Exemple : Trois dérivées, règle nommée

- Sur $\left]\frac{2}{3},+\infty\right[$, $u : x \mapsto 3x-2$ est dérivable et strictement positive. Par $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$: $(\ln(3x-2))' = \frac{3}{3x-2}$.
- Sur $\mathbb{R}$, $x^2+4>0$: $\left(\ln(x^2+4)\right)' = \frac{2x}{x^2+4}$, du signe de x.
- Pour $x>0$, par la dérivée d'un produit : $(x\ln x)' = \ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln x + 1$.

Exemple : Primitives reconnues

Dans chaque cas, c désigne une constante réelle.

- Sur $\mathbb{R}$: $\frac{x}{x^2+4} = \frac{1}{2} \times \frac{2x}{x^2+4}$, de primitives $\frac{1}{2}\ln(x^2+4)+c$.
- Sur $\left]\frac{2}{3},+\infty\right[$: $\frac{1}{3x-2} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{3x-2}$, de primitives $\frac{1}{3}\ln(3x-2)+c$.
- Sur $\left]-\infty,\frac{2}{3}\right[$, où $3x-2<0$: primitives $\frac{1}{3}\ln(2-3x)+c$.
- Sur $\left]\frac{2}{3},+\infty\right[$: $\frac{3}{3x-2} - \frac{2x}{x^2+4}$ a pour primitives $\ln(3x-2) - \ln(x^2+4) + c = \ln\left(\frac{3x-2}{x^2+4}\right) + c$.

Étudier une fonction avec ln

Méthode : Plan d'étude en six étapes

1. **Domaine** : arguments de $\ln$ strictement positifs, dénominateurs non nuls.
2. **Limites aux bornes**, chacune suivie de son interprétation (asymptote, branche parabolique).
3. **Dérivée** : nomme la règle, par exemple $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$, après avoir vérifié $u>0$.
4. **Signe de f'** : souvent celui d'un numérateur ou d'une fonction auxiliaire.
5. **Tableau de variations**, limites comprises.
6. **Courbe** : tangentes utiles, position par rapport à une droite, puis tracé.

Exemple : Exemple guidé (1/2) : domaine et limites

Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(x^2+4)$.

- **Domaine** : pour tout réel x, $x^2+4 \geq 4 > 0$, donc f est définie sur $\mathbb{R}$. De plus $f(-x) = f(x)$: f est paire.
- **Limite** : $x^2+4 \to +\infty$ quand $x \to +\infty$, et $\lim\limits_{X\to+\infty} \ln X = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; de même en $-\infty$, par parité.

- **Branche infinie** : pour $x > 0$, $\ln(x^2+4) = 2\ln x + \ln\left(1+\dfrac{4}{x^2}\right)$, donc $\dfrac{f(x)}{x} = 2\,\dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{1}{x}\ln\left(1+\dfrac{4}{x^2}\right)$. Le premier terme tend vers 0 par croissance comparée ; le second aussi, car $\dfrac{1}{x} \to 0$ et $\ln\left(1+\dfrac{4}{x^2}\right) \to \ln 1 = 0$.
- **Interprétation** : en $+\infty$ et en $-\infty$, branche parabolique de direction l'axe des abscisses.

Exemple : Exemple guidé (2/2) : dérivée, variations, tangente

- **Règle** : $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$ avec $u : x \mapsto x^2+4$, strictement positive sur $\mathbb{R}$. Donc $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+4}$.
- **Signe** : le dénominateur est strictement positif, donc $f'(x)$ a le signe de $2x$: négatif sur $]-\infty, 0[$, positif sur $]0, +\infty[$.
- **Minimum** : $f(0) = \ln 4 = 2\ln 2 \approx 1{,}386$.
- **Tangente au point d'abscisse** 2 : $f(2) = \ln 8 = 3\ln 2$ et $f'(2) = \dfrac{1}{2}$, d'où $y = \dfrac{1}{2}(x-2) + 3\ln 2$.

Variations de f : décroissante sur]−∞, 0], croissante sur [0, +∞[, minimum 2 ln 2 atteint en 0.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$2\ln 2$	↗	$+\infty$

Méthode : Signe de la dérivée par une fonction auxiliaire

Quand $f'(x)$ s'écrit $\dfrac{g(x)}{x^2}$, ou avec un autre dénominateur strictement positif, le signe de f' est celui de g.

Étudie alors g : dérivée, variations, puis un zéro remarquable, souvent en 1 puisque $\ln 1 = 0$. Une fonction g strictement croissante qui s'annule en 1 est négative avant 1 et positive après.

Écris noir sur blanc « $f'(x)$ a le signe de $g(x)$ » : c'est une étape à part entière de la rédaction.

Logarithme de base a et logarithme décimal

Définition : Logarithme de base a

Soit a un réel tel que $a > 0$ et $a \neq 1$. La **fonction logarithme de base** a, notée $\log_a$, est définie sur $]0, +\infty[$ par

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

On a $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$, et $\log_{\mathrm{e}} = \ln$.

Produit, x > 0 et y > 0 (a > 0, a ≠ 1)

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

Puissance, x > 0 et r rationnel

$$\log_a(x^r) = r \log_a x$$

Puissance de la base, r rationnel

$$\log_a(a^r) = r$$

Dérivée, x > 0

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

Logarithme décimal, x > 0

$$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

Logarithme décimal d'une puissance de 10, r rationnel

$$\log(10^r) = r$$

Exemple : Quatre calculs

- $\log_2 8 = \dfrac{\ln 8}{\ln 2} = \dfrac{3\ln 2}{\ln 2} = 3$.
- $\log 5 + \log 20 = \log 100 = 2$, et $\log 0{,}1 = -1$.
- Pour $x > 0$: $\log x = \dfrac{1}{2} \iff x = 10^{1/2} = \sqrt{10} \approx 3{,}162$.
- $\log_{1/2}$ est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$, car $\ln\left(\dfrac{1}{2}\right) < 0$.

Six pièges classiques

Attention : Une somme ne se découpe pas

$\ln(2+3) = \ln 5 \approx 1{,}609$, alors que $\ln 2 + \ln 3 = \ln 6 \approx 1{,}792$.

Le logarithme d'un produit devient une somme, mais le logarithme d'une somme ne se simplifie pas : devant une somme, factorise d'abord.

Attention : Carré du logarithme, logarithme du carré

$\big(\ln(\mathrm{e}^3)\big)^2 = 9$, mais $\ln\big((\mathrm{e}^3)^2\big) = \ln(\mathrm{e}^6) = 6$. Mets les parenthèses : $(\ln x)^2$ d'un côté, $\ln(x^2)$ de l'autre.

De même, $\dfrac{\ln 9}{\ln 3} = 2$, alors que $\ln\left(\dfrac{9}{3}\right) = \ln 3 \approx 1{,}099$.

Attention : 2 ln x à la place de ln(x²)

Pour $x = -5$: $\ln\big((-5)^2\big) = \ln 25 = 2\ln 5$ existe, mais $\ln(-5)$ n'a aucun sens. Pour $x \neq 0$, écris $\ln(x^2) = 2\ln|x|$; la forme $2\ln x$ ne vaut que pour $x > 0$.

Attention : Une valeur hors du domaine

Dans l'équation $\ln(x^2+4) = 2\ln(3x-2)$, la valeur 0 annule bien $8x^2 - 12x$, mais $3\times 0 - 2 = -2$ et $\ln(-2)$ n'existe pas. Le tri par le domaine n'est pas une formalité.

Attention : La dérivée de ln(u) n'est pas 1/u

$\big(\ln(x^2+4)\big)' = \dfrac{2x}{x^2+4}$, et non $\dfrac{1}{x^2+4}$: n'oublie pas u' en haut de la fraction.

Attention : ln tend vers +∞, très lentement

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ dit seulement que x grandit bien plus vite que $\ln x$; $\ln$ n'est pas bornée pour autant.

Par exemple $\ln(10^8) = 8\ln 10 \approx 18{,}42$: pour x égal à cent millions, $\ln x$ ne dépasse pas 19. Pourtant la fonction $\ln$ finit par dépasser n'importe quel nombre.

Ce que montrent les sujets consultés

Constats sur **15 sujets nationaux** 2BAC SE (option française, de 2016 à 2025) et 12 barèmes lus. Ils décrivent ces sujets-là, pas le prochain examen. $\ln$ figure dans 12 des 15 sujets consultés, et dans la fonction principale du problème dans 10 des 15 sujets consultés.

Question	Sujets, sur 15	Points
« montrer que $f'(x) = \ldots$ », avec $\ln$	12	0,5 à 1
$\dfrac{\ln x}{x} \to 0$ en $+\infty$, ou une variante	8	0,5 à 0,75
asymptote verticale $x = 0$, limite en 0^+	7	0,5 à 0,75
branche parabolique	7	0,5 à 0,75
signe d'une fonction auxiliaire avec $\ln$	5	0,75 à 1,25
position d'une courbe et d'une droite	5	0,5 à 1
dérivée $\dfrac{u'}{u}$ de $\ln(u(x))$	4	0,5
équation ou inéquation à résoudre	3	0,5

Méthode : Rédiger comme le barème

1. **Limite, puis interprétation** : deux phrases distinctes ; les barèmes lus les notent séparément (0,25 + 0,25, ou 0,5 + 0,25).
2. **Règle de dérivation nommée** : en 2023 N, 2024 N et 2024 R, la formule et le calcul rapportent des points distincts.

3. **Limite de référence citée** : « par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ ».
4. **Fonction auxiliaire** : écris que $f'(x)$ a le signe de $g(x)$; dans 3 des 15 sujets consultés, $g(1) = 0$ avec un changement de signe en 1.

Remarque : Non relevé dans ces 15 sujets

Logarithme décimal ou de base a ; dérivée ou primitive de $\ln|u|$; systèmes ; équation $\ln u = \ln v$ dont il faut établir les conditions d'existence ; inégalité $\ln x \leq x - 1$; recherche d'un domaine non trivial (le domaine est donné, sauf une simple vérification dans 1 des 15 sujets consultés).

Une absence dans cet échantillon ne dit rien du prochain sujet : ces points restent à savoir faire.

À retenir : Je sais…

- écrire le domaine d'une expression avec $\ln$ avant tout calcul ;
- résoudre une équation ou une inéquation logarithmique et trier les solutions ;
- transformer une expression par les propriétés algébriques, signes vérifiés ;
- citer les limites de référence et lever une forme indéterminée ;
- interpréter une limite : asymptote verticale, branche parabolique ;
- utiliser $\ln \mathrm{e} = 1$ et $\ln(\mathrm{e}^r) = r$ pour r rationnel ;
- dériver $\ln(u)$ en nommant la règle, et reconnaître une primitive $\dfrac{u'}{u}$;
- mener une étude complète, signe de f' compris.