BURHAN

Fonctions logarithmiques : exercices, niveau examen

2ème Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-experimentales/mathematiques/fonctions-logarithmiques/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Fonctions logarithmiques	Niveau examen	5

Exercice 1 7 pts

Un carré de logarithme et une droite de référence

Partie A. Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$g(x) = x - 1 + 2\ln x.$$

Partie B. Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$f(x) = x - 1 + (\ln x)^2 - \ln x.$$

On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé, et (Δ) la droite d'équation $y = x - 1$.

A.1 0,75 pts

Calcule $g(1)$. Calcule $g'(x)$ pour $x > 0$ et déduis-en le sens de variation de g sur $]0,+\infty[$.

INDICE

Dérive terme à terme : le signe de $g'(x)$ se lit directement pour $x > 0$.

A.2 0,5 pts

Déduis-en le signe de $g(x)$ sur $]0,+\infty[$.

INDICE

Compare x à 1 et utilise la stricte croissance de g.

B.1 0,75 pts

Calcule $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, puis interprète graphiquement le résultat.

INDICE

Écris $(\ln x)^2 - \ln x = \ln x\,(\ln x - 1)$: il n'y a plus de forme indéterminée.

B.2 0,25 pts

Calcule $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

INDICE

Garde l'écriture factorisée de la question précédente.

B.3 0,5 pts

En posant $X = \sqrt{x}$, montre que $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{(\ln x)^2}{x} = 0$.

INDICE

Avec $x = X^2$, on a $\ln x = 2\ln X$; fais apparaître le carré de $\dfrac{\ln X}{X}$.

B.4 0,75 pts

Montre que $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$ et que $\lim\limits_{x\to +\infty} (f(x) - x) = +\infty$. Interprète graphiquement ces deux résultats.

INDICE

Divise chaque terme de $f(x)$ par x et utilise la question B.3. Pour $f(x) - x$, la forme factorisée suffit.

B.5 0,75 pts

Montre que, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x}$.

INDICE

La dérivée de $(\ln x)^2$ s'obtient par la règle $\left(u^2\right)' = 2u'u$ avec $u = \ln$.

B.6 0,75 pts

Dresse le tableau de variations de f. Déduis-en que $f(x) \geq 0$ pour tout $x > 0$.

INDICE

Pour $x > 0$, $f'(x)$ a le signe de $g(x)$ (Partie A).

B.7 1 pts

Vérifie que, pour tout $x > 0$, $f(x) - (x-1) = \ln x\,(\ln x - 1)$. Étudie la position relative de $(\mathcal{C})$ et de (Δ).

INDICE

Un tableau de signes avec une ligne pour $\ln x$ (nul en 1) et une pour $\ln x - 1$ (nul en e).

B.8 0,5 pts

Détermine une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse e.

INDICE

Utilise $f'(\mathrm{e}) = \dfrac{g(\mathrm{e})}{\mathrm{e}}$ et $y = f'(\mathrm{e})(x - \mathrm{e}) + f(\mathrm{e})$.

B.9 0,5 pts

Construis (Δ), (T) et $(\mathcal{C})$ dans le même repère (on prendra $\mathrm{e} \approx 2{,}7$).

INDICE

Place d'abord les éléments sûrs : asymptote, minimum, points communs avec (Δ), tangente.

Exercice 2 7 pts

Une asymptote oblique et une solution encadrée

Partie A. Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$g(x) = x^2 - \ln x.$$

Partie B. Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$f(x) = x + \frac{1+\ln x}{x}.$$

On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé, et (Δ) la droite d'équation $y = x$.

On donne : $\ln 2 \approx 0{,}69$; $\ln 0{,}3 \approx -1{,}20$; $\ln 0{,}4 \approx -0{,}92$.

A.1 0,75 pts

Montre que, pour tout $x > 0$, $g'(x) = \dfrac{2x^2-1}{x}$, puis étudie les variations de g.

INDICE

Le signe de $g'(x)$ est celui de $2x^2 - 1$ quand $x > 0$; sa racine positive est $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

A.2 0,5 pts

Calcule le minimum de g et déduis-en que $g(x) > 0$ pour tout $x > 0$.

INDICE

$\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 2^{-\frac{1}{2}}$: son logarithme s'exprime avec $\ln 2$.

B.1 0,75 pts

Calcule $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ et interprète graphiquement le résultat.

INDICE

Écris $\dfrac{1+\ln x}{x} = (1+\ln x) \times \dfrac{1}{x}$.

B.2 0,25 pts

Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

INDICE

Sépare $\dfrac{1+\ln x}{x}$ en deux fractions.

B.3 0,75 pts

Montre que $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x) = 0$ et interprète graphiquement ce résultat.

INDICE

La différence $f(x) - x$ a déjà été rencontrée à la question B.2.

B.4 0,75 pts

Étudie la position relative de $(\mathcal{C})$ et de (Δ).

INDICE

Pour $x > 0$, le signe de $f(x) - x$ est celui de $1 + \ln x$.

B.5 0,75 pts

Montre que, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

INDICE

Dérive $\dfrac{1 + \ln x}{x}$ par la règle du quotient.

B.6 0,5 pts

Dresse le tableau de variations de f.

INDICE

Utilise la Partie A pour le signe de $f'(x)$.

B.7 0,75 pts

Montre que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0, +\infty[$, puis que $0{,}3 < \alpha < 0{,}4$.

INDICE

Continuité, stricte monotonie et limites donnent existence et unicité. Pour l'encadrement, calcule le signe de $f(0{,}3)$ et de $f(0{,}4)$ avec les valeurs données.

B.8 0,75 pts

Détermine le point de $(\mathcal{C})$ où la tangente est parallèle à (Δ), et écris une équation de cette tangente.

INDICE

Deux droites sont parallèles quand elles ont le même coefficient directeur : résous $f'(x) = 1$.

B.9 0,5 pts

Construis (Δ) et $(\mathcal{C})$ dans le même repère.

INDICE

Asymptotes, point d'intersection avec (Δ), point d'abscisse α, tangente de la question B.8.

Exercice 3 6,5 pts

Un logarithme composé et deux solutions

Soit f la fonction définie sur $I =]-2, +\infty[$ par :

$$f(x) = x + 1 - 2\ln(x+2).$$

On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé, et (Δ) la droite d'équation $y = x + 1$.

On donne : $\ln 2 \approx 0{,}69$ et $\ln 3 \approx 1{,}10$.

1. 0,75 pts

Calcule $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x)$ et interprète graphiquement le résultat.

INDICE

Pose $X = x + 2$: quand x tend vers -2 par la droite, vers quoi tend X ?

2. 0,75 pts

Vérifie que, pour tout $x > 0$:

$$\frac{f(x)}{x} = 1 + \frac{1}{x} - 2 \times \frac{\ln(x+2)}{x+2} \times \frac{x+2}{x}.$$

Déduis-en $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, puis $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

INDICE

Avec $X = x + 2$, le quotient $\dfrac{\ln(x+2)}{x+2}$ devient $\dfrac{\ln X}{X}$.

3. 0,75 pts

Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(f(x) - x\big)$, puis interprète graphiquement les résultats des questions 2 et 3.

INDICE

$f(x) - x$ ne contient plus de forme indéterminée.

4. 0,5 pts

Montre que, pour tout $x \in I$, $f'(x) = \dfrac{x}{x+2}$.

INDICE

Nomme la règle de dérivation de $\ln(u)$ et vérifie son hypothèse sur I.

5. 0,75 pts

Dresse le tableau de variations de f sur I.

INDICE

Sur I, $x + 2 > 0$: le signe de $f'(x)$ est celui de x.

6. 0,75 pts

Étudie la position relative de $(\mathcal{C})$ et de (Δ).

INDICE

$f(x) - (x+1) = -2\ln(x+2)$; et $\ln X > 0 \iff X > 1$.

7. 0,25 pts

Vérifie que $f(-1) = 0$.

INDICE

Calcule $\ln(-1+2)$.

8. 1 pts

Montre que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans I : le réel -1, et un réel β tel que $1 < \beta < 2$.

INDICE

Travaille séparément sur $]-2, 0]$ et sur $[0, +\infty[$: sur chacun, f est strictement monotone. Calcule $f(1)$ et $f(2)$ avec les valeurs données.

9. 0,5 pts

Écris une équation de la tangente à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse -1.

INDICE

$f(-1) = 0$; calcule $f'(-1)$ avec la question 4.

10. 0,5 pts

Construis (Δ) et $(\mathcal{C})$ dans le même repère.

INDICE

Asymptote verticale, minimum, points d'intersection avec l'axe des abscisses, branche parabolique.

Exercice 4 6,5 pts

Une inégalité cachée et une tangente traversée

Partie A. Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$g(x) = x\ln x - x + 1.$$

Partie B. Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$f(x) = (x+1)\ln x - 2x + 2.$$

On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

A.1 0,5 pts

Calcule $g'(x)$ pour $x > 0$ et étudie les variations de g sur $]0,+\infty[$.

INDICE

Dérive $x\ln x$ par la règle du produit ; le signe de $\ln x$ est connu.

A.2 0,5 pts

Déduis-en que $g(x) \geq 0$ pour tout $x > 0$, avec égalité seulement pour $x = 1$.

INDICE

$g(1)$ est le minimum de g ; la stricte monotonie de chaque côté de 1 donne l'inégalité stricte.

B.1 0,75 pts

Calcule $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et interprète graphiquement le résultat.

INDICE

Aucune forme indéterminée : regarde séparément $(x+1)\ln x$ et $-2x+2$.

B.2 1 pts

Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, puis interprète graphiquement.

INDICE

Forme « $+\infty - \infty$ » : mets x en facteur.

B.3 0,75 pts

Montre que, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x}$.

INDICE

Règle du produit pour $(x+1)\ln x$, puis réduction au même dénominateur.

B.4 0,5 pts

Déduis-en que f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$, et dresse son tableau de variations.

INDICE

$f'(x) \geq 0$ et f' ne s'annule qu'en un seul point.

B.5 1 pts

Calcule $f(1)$ et déduis-en le signe de $f(x)$. Montre alors que, pour tout réel $x > 1$, $\ln x > \dfrac{2(x-1)}{x+1}$.

INDICE

Une fonction strictement croissante qui s'annule en 1 change de signe en 1. Pour l'inégalité, divise par un nombre dont tu connais le signe.

B.6 0,5 pts

Donne une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 1, puis la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à (T).

INDICE

$f(1)$ et $f'(1)$ sont déjà connus ; la position se lit sur le signe de f.

B.7 0,5 pts

Écris une équation de la tangente (T') à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse e.

INDICE

Calcule $f(\mathrm{e})$, puis $f'(\mathrm{e})$ avec la question B.3 ; utilise ensuite $y = f'(\mathrm{e})(x-\mathrm{e}) + f(\mathrm{e})$.

B.8 0,5 pts

Construis (T), (T') et $(\mathcal{C})$ dans le même repère (on prendra $\mathrm{e} \approx 2{,}7$).

INDICE

Asymptote verticale, point $(1, 0)$ avec sa tangente horizontale traversée, point d'abscisse e avec (T'), branche parabolique verticale.

Exercice 5 6,5 pts

Une courbe qui reste sous sa droite

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = x - \ln\left(x^2 - 2x + 2\right).$$

On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé, et (Δ) la droite d'équation $y = x$.

On donne : $\ln 2 \approx 0{,}69$ et $\ln 5 \approx 1{,}61$.

1. 0,25 pts

Vérifie que, pour tout réel x, $x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1$. Déduis-en que f est définie sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Développe $(x-1)^2$. Un carré est positif.

2. 0,25 pts

Calcule $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

INDICE

Regarde séparément x et $-\ln\left(x^2 - 2x + 2\right)$.

3. 0,5 pts

Montre que, pour tout réel $x \neq 0$:

$$\ln\left(x^2 - 2x + 2\right) = 2\ln|x| + \ln\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right).$$

INDICE

Mets x^2 en facteur dans le trinôme. Vérifie que les deux facteurs sont strictement positifs, puis écris $\ln\left(x^2\right)$ à l'aide de $|x|$.

4. 0,5 pts

Déduis-en $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

INDICE

Pour $x > 0$, $|x| = x$. Mets ensuite x en facteur dans $x - 2\ln x$.

5. 1 pts

Calcule les limites de $\dfrac{f(x)}{x}$ et de $f(x) - x$ en $-\infty$ et en $+\infty$. Interprète graphiquement.

INDICE

Avec la question 3, $\dfrac{f(x)}{x}$ s'écrit $1 - 2 \times \dfrac{\ln|x|}{x} - \dfrac{1}{x}\ln\left(1 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{2}{x^2}\right)$. En $-\infty$, pose $X = -x = |x|$.

6. 0,75 pts

Montre que, pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{(x-2)^2}{x^2-2x+2}$.

INDICE

Nomme la règle de dérivation de $\ln(u)$; son hypothèse a été vérifiée à la question 1.

7. 0,5 pts

Déduis-en que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et dresse son tableau de variations.

INDICE

$f'(x) \geq 0$; en combien de points s'annule-t-elle ?

8. 0,75 pts

Étudie la position relative de $(\mathcal{C})$ et de (Δ).

INDICE

$f(x) - x = -\ln\left((x-1)^2+1\right)$; compare $(x-1)^2+1$ à 1.

9. 0,5 pts

Montre que (Δ) est la tangente à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 1.

INDICE

Calcule $f(1)$ et $f'(1)$.

10. 1 pts

Montre que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$, et que $0 < \alpha < \dfrac{1}{2}$.

INDICE

Stricte croissance et limites pour l'existence et l'unicité. Pour l'encadrement : $\ln\left(\dfrac{5}{4}\right) = \ln 5 - 2\ln 2$.

11. 0,5 pts

Construis (Δ) et $(\mathcal{C})$ dans le même repère.

INDICE

Point de contact avec (Δ), tangente horizontale en 2, branches paraboliques.