BURHAN

Fonctions logarithmiques : exercices, niveau examen

2ème Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-experimentales/mathematiques/fonctions-logarithmiques/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Fonctions logarithmiques	Niveau examen	5

Exercice 1 7 pts

Un carré de logarithme et une droite de référence

Partie A. Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$g(x) = x - 1 + 2\ln x.$$

Partie B. Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$f(x) = x - 1 + (\ln x)^2 - \ln x.$$

On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé, et (Δ) la droite d'équation $y = x - 1$.

A.1 0,75 pts

Calcule $g(1)$. Calcule $g'(x)$ pour $x > 0$ et déduis-en le sens de variation de g sur $]0,+\infty[$.

INDICE

Dérive terme à terme : le signe de $g'(x)$ se lit directement pour $x > 0$.

CORRIGÉ

Valeur en 1. $g(1) = 1 - 1 + 2\ln 1 = 0$.

Dérivée. La fonction g est dérivable sur $]0,+\infty[$ et, pour tout $x > 0$:

$$g'(x) = 1 + \frac{2}{x}.$$

Signe. Pour $x > 0$, $\dfrac{2}{x} > 0$, donc $g'(x) > 0$.

Conclusion. $g(1) = 0$, et g est **strictement croissante** sur $]0,+\infty[$.

A.2 0,5 pts

Déduis-en le signe de $g(x)$ sur $]0,+\infty[$.

INDICE

Compare x à 1 et utilise la stricte croissance de g.

CORRIGÉ

La fonction g est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ et $g(1) = 0$:

- si $0 < x < 1$, alors $g(x) < g(1) = 0$;
- si $x > 1$, alors $g(x) > g(1) = 0$.

Conclusion. $g(x) < 0$ sur $]0,1[$, $g(1) = 0$ et $g(x) > 0$ sur $]1,+\infty[$.

B.1 0,75 pts

Calcule $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$, puis interprète graphiquement le résultat.

INDICE

Écris $(\ln x)^2 - \ln x = \ln x\,(\ln x - 1)$: il n'y a plus de forme indéterminée.

CORRIGÉ

Écriture factorisée. Pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} & f(x) \\ & = x - 1 + \ln x\,(\ln x - 1). \end{aligned}$$

Limite. Quand x tend vers 0^+, $\ln x$ tend vers $-\infty$ (**limite de référence**). Donc $\ln x - 1$ tend vers $-\infty$, et le produit $\ln x\,(\ln x - 1)$ tend vers $+\infty$. Comme $x - 1$ tend vers -1 :

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty.$$

Interprétation. La droite d'équation $x = 0$ (l'axe des ordonnées) est asymptote verticale à $(\mathcal{C})$.

B.2 0,25 pts

Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

INDICE

Garde l'écriture factorisée de la question précédente.

CORRIGÉ

On utilise l'écriture $f(x) = x - 1 + \ln x\,(\ln x - 1)$.

Limite. Quand x tend vers $+\infty$, $x - 1$, $\ln x$ et $\ln x - 1$ tendent vers $+\infty$. Donc $\ln x\,(\ln x - 1)$ tend vers $+\infty$, sans forme indéterminée.

Conclusion.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

B.3 0,5 pts

En posant $X = \sqrt{x}$, montre que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\ln x)^2}{x} = 0$.

INDICE

Avec $x = X^2$, on a $\ln x = 2 \ln X$; fais apparaître le carré de $\dfrac{\ln X}{X}$.

CORRIGÉ

Changement de variable. Pour $x > 0$, on pose $X = \sqrt{x}$. Alors $X > 0$, $x = X^2$ et $\ln x = 2 \ln X$. Donc :

$$\begin{aligned} \frac{(\ln x)^2}{x} &= \frac{4(\ln X)^2}{X^2} \\ &= 4 \left(\frac{\ln X}{X} \right)^2 . \end{aligned}$$

Limite de référence. Quand x tend vers $+\infty$, X tend vers $+\infty$, et $\dfrac{\ln X}{X}$ tend vers 0.

Conclusion.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0.$$

B.4 0,75 pts

Montre que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$ et que $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x) = +\infty$. Interprète graphiquement ces deux résultats.

INDICE

Divise chaque terme de $f(x)$ par x et utilise la question B.3. Pour $f(x) - x$, la forme factorisée suffit.

CORRIGÉ

Le quotient. Pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{x} &= 1 - \frac{1}{x} \\ &\quad + \frac{(\ln x)^2}{x} - \frac{\ln x}{x} . \end{aligned}$$

D'après la question B.3 et la limite de référence $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$, les trois derniers termes tendent vers 0. Donc :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1.$$

La différence. Pour tout $x > 0$, $f(x) - x = -1 + \ln x \, (\ln x - 1)$, qui tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ (question B.2).

Interprétation. $(\mathcal{C})$ admet en $+\infty$ une **branche parabolique de direction la droite d'équation** $y = x$.

B.5 0,75 pts

Montre que, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x}$.

INDICE

La dérivée de $(\ln x)^2$ s'obtient par la règle $\left(u^2\right)' = 2u'u$ avec $u = \ln$.

CORRIGÉ

Règles utilisées. La dérivée d'un carré, $\left(u^2\right)' = 2u'u$, avec $u(x) = \ln x$ et $u'(x) = \dfrac{1}{x}$; et la dérivée de $\ln$, $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

Calcul. Pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x - \frac{1}{x} \\ &= \frac{x + 2\ln x - 1}{x} \\ &= \frac{g(x)}{x}. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x}$.

B.6 0,75 pts

Dresse le tableau de variations de f. Déduis-en que $f(x) \geq 0$ pour tout $x > 0$.

INDICE

Pour $x > 0$, $f'(x)$ a le signe de $g(x)$ (Partie A).

CORRIGÉ

Signe de $f'(x)$. Pour $x > 0$, $f'(x)$ a le signe de $g(x)$. D'après la Partie A : $f'(x) < 0$ sur $]0, 1[$, $f'(1) = 0$ et $f'(x) > 0$ sur $]1, +\infty[$.

Valeur en 1. $f(1) = 0 + 0 - 0 = 0$.

Tableau de variations.

x	$]0, 1[$	1	$]1, +\infty[$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	décroissante, de $+\infty$ à 0	0	croissante, de 0 à $+\infty$

Conclusion. f admet en 1 un minimum égal à 0. Donc $f(x) \geq 0$ pour tout $x > 0$.

B.7 1 pts

Vérifie que, pour tout $x > 0$, $f(x) - (x-1) = \ln x\,(\ln x - 1)$. Étudie la position relative de $(\mathcal{C})$ et de (Δ).

INDICE

Un tableau de signes avec une ligne pour $\ln x$ (nul en 1) et une pour $\ln x - 1$ (nul en e).

CORRIGÉ

Égalité. Pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} &f(x) - (x-1) \\ &= (\ln x)^2 - \ln x \\ &= \ln x\,(\ln x - 1). \end{aligned}$$

Signe des facteurs. Par stricte croissance de $\ln$: $\ln x > 0 \iff x > 1$, et $\ln x - 1 > 0 \iff x > \mathrm{e}$.

x	$]0,1[$	$]1,\mathrm{e}[$	$]\mathrm{e},+\infty[$
$\ln x$	$-$	$+$	$+$
$\ln x - 1$	$-$	$-$	$+$
$f(x) - (x-1)$	$+$	$-$	$+$

Conclusion. $(\mathcal{C})$ est au-dessus de (Δ) sur $]0,1[$ et sur $]\mathrm{e},+\infty[$, en dessous sur $]1,\mathrm{e}[$. Elles se coupent aux points d'abscisses 1 et e : $(1,0)$ et $(\mathrm{e},\mathrm{e}-1)$.

B.8 0,5 pts

Détermine une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse e.

INDICE

Utilise $f'(\mathrm{e}) = \dfrac{g(\mathrm{e})}{\mathrm{e}}$ et $y = f'(\mathrm{e})(x-\mathrm{e}) + f(\mathrm{e})$.

CORRIGÉ

Valeurs en e. Comme $\ln \mathrm{e} = 1$:

$$\begin{aligned} f(\mathrm{e}) &= \mathrm{e} - 1 + 1 - 1 = \mathrm{e} - 1, \\ f'(\mathrm{e}) &= \frac{g(\mathrm{e})}{\mathrm{e}} = \frac{\mathrm{e}-1+2}{\mathrm{e}} \\ &= \frac{\mathrm{e}+1}{\mathrm{e}}. \end{aligned}$$

Équation. (T) a pour équation $y = f'(\mathrm{e})(x-\mathrm{e}) + f(\mathrm{e})$:

$$\begin{aligned} y &= \frac{\mathrm{e}+1}{\mathrm{e}}(x-\mathrm{e}) + \mathrm{e} - 1 \\ &= \frac{\mathrm{e}+1}{\mathrm{e}}\,x - (\mathrm{e}+1) \\ &\quad + \mathrm{e} - 1 \\ &= \frac{\mathrm{e}+1}{\mathrm{e}}\,x - 2. \end{aligned}$$

Conclusion. La tangente (T) a pour équation $y = \dfrac{\mathrm{e}+1}{\mathrm{e}}\,x - 2$.

B.9 `0,5 pts`

Construis (Δ), (T) et $(\mathcal{C})$ dans le même repère (on prendra $\mathrm{e} \approx 2{,}7$).

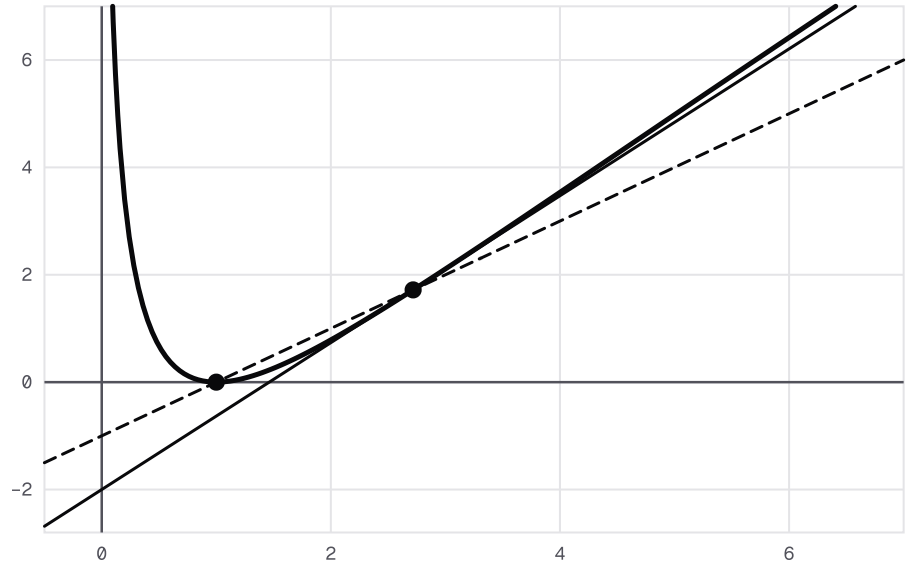
INDICE

Place d'abord les éléments sûrs : asymptote, minimum, points communs avec (Δ), tangente.

CORRIGÉ

Description de la construction :

- l'axe des ordonnées est asymptote : $(\mathcal{C})$ part de très haut près de cet axe ;
- $(\mathcal{C})$ descend jusqu'au point $(1, 0)$, où la tangente est horizontale ($f'(1) = 0$), puis remonte ;
- elle passe au-dessus de (Δ) sur $]0, 1[$, la coupe en $(1, 0)$, passe en dessous jusqu'au point $(\mathrm{e}, \mathrm{e} - 1) \approx (2{,}7; 1{,}7)$, puis repasse au-dessus ;
- (T) passe par $(\mathrm{e}, \mathrm{e} - 1)$ et par $(0, -2)$;
- en $+\infty$, $(\mathcal{C})$ s'éloigne au-dessus de (Δ) en suivant la direction de $y = x$ (branche parabolique).



La courbe de f(x) = x − 1 + (ln x)² − ln x avec la droite (Δ) : y = x − 1, la tangente (T) au point d'abscisse e et le minimum en (1, 0).

Exercice 2 7 pts

Une asymptote oblique et une solution encadrée

Partie A. Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$g(x) = x^2 - \ln x.$$

Partie B. Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$f(x) = x + \frac{1+\ln x}{x}.$$

On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé, et (Δ) la droite d'équation $y = x$.

On donne : $\ln 2 \approx 0{,}69$; $\ln 0{,}3 \approx -1{,}20$; $\ln 0{,}4 \approx -0{,}92$.

A.1 0,75 pts

Montre que, pour tout $x > 0$, $g'(x) = \dfrac{2x^2-1}{x}$, puis étudie les variations de g.

INDICE

Le signe de $g'(x)$ est celui de $2x^2 - 1$ quand $x > 0$; sa racine positive est $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

CORRIGÉ

Dérivée. La fonction g est dérivable sur $]0,+\infty[$ et, pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2x - \frac{1}{x} \\ &= \frac{2x^2-1}{x}. \end{aligned}$$

Signe. Comme $x > 0$, $g'(x)$ a le signe de $2x^2 - 1$. Sur $]0,+\infty[$, ce trinôme s'annule en $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; il est négatif avant et positif après.

Conclusion. g est strictement décroissante sur $\left]0, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right[$.

A.2 0,5 pts

Calcule le minimum de g et déduis-en que $g(x) > 0$ pour tout $x > 0$.

INDICE

$\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 2^{-\frac{1}{2}}$: son logarithme s'exprime avec $\ln 2$.

CORRIGÉ

Minimum. D'après 1., le minimum de g est atteint en $\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 2^{-\frac{1}{2}}$. Comme $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) &= \frac{1}{2} - \ln\left(2^{-\frac{1}{2}}\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln 2 \\ &\approx 0{,}85. \end{aligned}$$

Conclusion. Le minimum de g est strictement positif, donc $g(x) > 0$ pour tout $x > 0$.

B.1 0,75 pts

Calcule $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ et interprète graphiquement le résultat.

INDICE

Écris $\dfrac{1+\ln x}{x} = (1+\ln x) \times \dfrac{1}{x}$.

CORRIGÉ

Limite. Quand x tend vers 0^+, $1+\ln x$ tend vers $-\infty$ (**limite de référence** $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$) et $\dfrac{1}{x}$ tend vers $+\infty$. Donc $\dfrac{1+\ln x}{x}$ tend vers $-\infty$. Comme x tend vers 0 :

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty.$$

Interprétation. La droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à $(\mathcal{C})$.

B.2 0,25 pts

Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

INDICE

Sépare $\dfrac{1+\ln x}{x}$ en deux fractions.

CORRIGÉ

Écriture. Pour tout $x > 0$:

$$\frac{1+\ln x}{x} = \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}.$$

Limite de référence. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$, donc $\dfrac{1+\ln x}{x}$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

Conclusion. Comme x tend vers $+\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

B.3 0,75 pts

Montre que $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=0$ et interprète graphiquement ce résultat.

INDICE

La différence $f(x)-x$ a déjà été rencontrée à la question B.2.

CORRIGÉ

Limite. Pour tout $x>0$, $f(x)-x=\dfrac{1+\ln x}{x}$. D'après la question B.2, cette quantité tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=0.$$

Interprétation. La droite (Δ) d'équation $y=x$ est **asymptote oblique** à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$.

B.4 0,75 pts

Étudie la position relative de $(\mathcal{C})$ et de (Δ).

INDICE

Pour $x>0$, le signe de $f(x)-x$ est celui de $1+\ln x$.

CORRIGÉ

Signe de $f(x)-x$. Pour tout $x>0$, $f(x)-x=\dfrac{1+\ln x}{x}$ a le signe de $1+\ln x$. Par stricte croissance de $\ln$:

$$\begin{aligned} & 1+\ln x>0 \\ \iff\ & \ln x>\ln\left(\mathrm{e}^{-1}\right) \\ \iff\ & x>\mathrm{e}^{-1}. \end{aligned}$$

Conclusion. $(\mathcal{C})$ est en dessous de (Δ) sur $\left]0,\mathrm{e}^{-1}\right[$ et au-dessus sur $\left]\mathrm{e}^{-1},+\infty\right[$. Elles se coupent au point $\left(\mathrm{e}^{-1},\mathrm{e}^{-1}\right)$.

B.5 0,75 pts

Montre que, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

INDICE

Dérive $\dfrac{1+\ln x}{x}$ par la règle du quotient.

CORRIGÉ

Dérivée du quotient. D'après la règle du quotient, pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1+\ln x}{x}\right)' \\ &= \frac{\frac{1}{x}\times x - (1+\ln x)}{x^2} \\ &= \frac{-\ln x}{x^2}.\end{aligned}$$

Dérivée de f. Pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned}f'(x) &= 1 - \frac{\ln x}{x^2} \\ &= \frac{x^2 - \ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}.\end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

B.6 0,5 pts

Dresse le tableau de variations de f.

INDICE

Utilise la Partie A pour le signe de $f'(x)$.

CORRIGÉ

Signe de $f'(x)$. D'après la Partie A, $g(x) > 0$ pour tout $x > 0$, et $x^2 > 0$. Donc $f'(x) > 0$: f est **strictement croissante** sur $]0, +\infty[$.

Tableau de variations, avec les limites des questions B.1 et B.2 :

x	$]0, +\infty[$
$f'(x)$	$+$
f	croissante, de $-\infty$ à $+\infty$

B.7 0,75 pts

Montre que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0, +\infty[$, puis que $0{,}3 < \alpha < 0{,}4$.

INDICE

Continuité, stricte monotonie et limites donnent existence et unicité. Pour l'encadrement, calcule le signe de $f(0{,}3)$ et de $f(0{,}4)$ avec les valeurs données.

CORRIGÉ

Existence et unicité. f est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$, de limite $-\infty$ en 0^+ et $+\infty$ en $+\infty$. L'image de $]0, +\infty[$ par f est donc $\mathbb{R}$, qui contient 0. L'équation $f(x) = 0$ admet une **unique** solution α.

Encadrement. Avec les valeurs données :

$$\begin{aligned} f(0{,}3) &= 0{,}3 + \frac{1 + \ln 0{,}3}{0{,}3} \\ &\approx 0{,}3 + \frac{-0{,}20}{0{,}3} \\ &\approx -0{,}37 < 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(0{,}4) &\approx 0{,}4 + \frac{0{,}08}{0{,}4} \\ &= 0{,}6 > 0. \end{aligned}$$

Conclusion. Comme f est strictement croissante, $f(0{,}3) < 0 = f(\alpha) < f(0{,}4)$ donne $0{,}3 < \alpha < 0{,}4$.

B.8 0,75 pts

Détermine le point de $(\mathcal{C})$ où la tangente est parallèle à (Δ), et écris une équation de cette tangente.

INDICE

Deux droites sont parallèles quand elles ont le même coefficient directeur : résous $f'(x) = 1$.

CORRIGÉ

Condition. La tangente au point d'abscisse x est parallèle à (Δ) si et seulement si $f'(x) = 1$. Pour $x > 0$, d'après B.5 :

$$\begin{aligned} & f'(x) = 1 \\ \iff & \frac{\ln x}{x^2} = 0 \\ \iff & \ln x = 0 \iff x = 1. \end{aligned}$$

Tangente. Au point d'abscisse 1 : $f(1) = 1 + 1 = 2$ et $f'(1) = 1$. La tangente a pour équation $y = 1 \times (x - 1) + 2$.

Conclusion. Le point cherché est $(1, 2)$, et la tangente en ce point a pour équation $y = x + 1$.

B.9 0,5 pts

Construis (Δ) et $(\mathcal{C})$ dans le même repère.

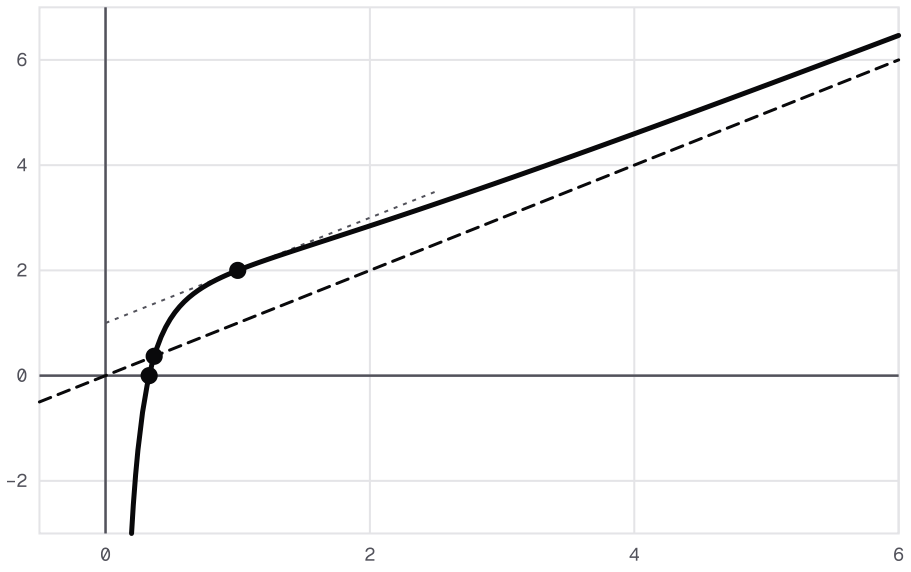
INDICE

Asymptotes, point d'intersection avec (Δ), point d'abscisse α, tangente de la question B.8.

CORRIGÉ

Description de la construction :

- $(\mathcal{C})$ monte depuis le bas le long de l'axe des ordonnées (asymptote verticale) ;
- elle coupe l'axe des abscisses en $\alpha \approx 0{,}33$, puis coupe (Δ) au point $\left(\mathrm{e}^{-1}, \mathrm{e}^{-1}\right) \approx (0{,}37; 0{,}37)$;
- au point $(1, 2)$, sa tangente est la droite $y = x + 1$, parallèle à (Δ) ;
- ensuite elle reste au-dessus de (Δ) et s'en rapproche en $+\infty$ (asymptote oblique).



Pour f(x) = x + (1 + ln x)/x : sa courbe, l'axe des ordonnées, l'asymptote oblique (Δ) : y = x, le point d'abscisse α et la tangente y = x + 1 en (1, 2), parallèle à (Δ).

Exercice 3 6,5 pts

Un logarithme composé et deux solutions

Soit f la fonction définie sur $I =]-2, +\infty[$ par :

$$f(x) = x + 1 - 2\ln(x+2).$$

On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé, et (Δ) la droite d'équation $y = x + 1$.

On donne : $\ln 2 \approx 0{,}69$ et $\ln 3 \approx 1{,}10$.

1. 0,75 pts

Calcule $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x)$ et interprète graphiquement le résultat.

INDICE

Pose $X = x + 2$: quand x tend vers -2 par la droite, vers quoi tend X ?

CORRIGÉ

Limite. On pose $X = x + 2$. Quand x tend vers -2^+, X tend vers 0^+ et $\ln X$ tend vers $-\infty$ (**limite de référence**). Donc $-2\ln(x+2)$ tend vers $+\infty$. Comme $x + 1$ tend vers -1 :

$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = +\infty.$$

Interprétation. La droite d'équation $x = -2$ est asymptote verticale à $(\mathcal{C})$.

2. 0,75 pts

Vérifie que, pour tout $x > 0$:

$$\frac{f(x)}{x} = 1 + \frac{1}{x} - 2 \times \frac{\ln(x+2)}{x+2} \times \frac{x+2}{x}.$$

Déduis-en $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, puis $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

INDICE

Avec $X = x + 2$, le quotient $\dfrac{\ln(x+2)}{x+2}$ devient $\dfrac{\ln X}{X}$.

CORRIGÉ

Égalité. Soit $x > 0$. On a $\dfrac{\ln(x+2)}{x+2} \times \dfrac{x+2}{x} = \dfrac{\ln(x+2)}{x}$, donc le second membre vaut :

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{1}{x} - \frac{2\ln(x+2)}{x} \\ &= \frac{x + 1 - 2\ln(x+2)}{x} \\ &= \frac{f(x)}{x}. \end{aligned}$$

Limite du quotient. On pose $X = x + 2$, qui tend vers $+\infty$: $\dfrac{\ln X}{X}$ tend vers 0 (**limite de référence**). De plus, $\dfrac{x+2}{x}$ tend vers 1 et $\dfrac{1}{x}$ vers 0. Donc :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1.$$

Limite de f. On écrit $f(x) = x \times \dfrac{f(x)}{x}$: un facteur tend vers $+\infty$, l'autre vers 1. Donc :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

3. 0,75 pts

Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x)$, puis interprète graphiquement les résultats des questions 2 et 3.

INDICE

$f(x) - x$ ne contient plus de forme indéterminée.

CORRIGÉ

Limite. Pour tout $x \in I$, $f(x) - x = 1 - 2\ln(x+2)$. Quand x tend vers $+\infty$, $\ln(x+2)$ tend vers $+\infty$, donc :

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - x) = -\infty.$$

Interprétation. $\dfrac{f(x)}{x}$ tend vers 1 et $f(x) - x$ tend vers $-\infty$: $(\mathcal{C})$ admet en $+\infty$ une **branche parabolique de direction la droite d'équation** $y = x$.

4. 0,5 pts

Montre que, pour tout $x \in I$, $f'(x) = \dfrac{x}{x+2}$.

INDICE

Nomme la règle de dérivation de $\ln(u)$ et vérifie son hypothèse sur I.

CORRIGÉ

Hypothèse. Sur I, la fonction $u : x \mapsto x+2$ est dérivable et strictement positive, avec $u'(x) = 1$.

Calcul. D'après la dérivée de $\ln u$, $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$. Pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - 2 \times \frac{1}{x+2} \\ &= \frac{x+2-2}{x+2} \\ &= \frac{x}{x+2}. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout $x \in I$, $f'(x) = \dfrac{x}{x+2}$.

5. 0,75 pts

Dresse le tableau de variations de f sur I.

INDICE

Sur I, $x+2 > 0$: le signe de $f'(x)$ est celui de x.

CORRIGÉ

Signe de $f'(x)$. Sur I, $x+2>0$, donc $f'(x)$ a le signe de x : négatif sur $]-2,0[$, positif sur $]0,+\infty[$.

Valeur en 0.

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 - 2\ln 2 \\ &\approx 1 - 1{,}38 = -0{,}38. \end{aligned}$$

Tableau de variations.

x	$]-2,0[$	0	$]0,+\infty[$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	décroissante, de $+\infty$ à $1-2\ln 2$	$1-2\ln 2$	croissante, de $1-2\ln 2$ à $+\infty$

6. 0,75 pts

Étudie la position relative de $(\mathcal{C})$ et de (Δ).

INDICE

$f(x)-(x+1)=-2\ln(x+2)$; et $\ln X>0 \iff X>1$.

CORRIGÉ

Différence. Pour tout $x\in I$, $f(x)-(x+1)=-2\ln(x+2)$.

Signe. Par stricte croissance de $\ln$, pour $x\in I$:

$$\begin{aligned} & \ln(x+2)>0 \\ \iff\ & x+2>1 \\ \iff\ & x>-1. \end{aligned}$$

Donc $f(x)-(x+1)>0$ sur $]-2,-1[$ et $f(x)-(x+1)<0$ sur $]-1,+\infty[$.

Conclusion. $(\mathcal{C})$ est au-dessus de (Δ) sur $]-2,-1[$, en dessous sur $]-1,+\infty[$; elles se coupent au point $(-1,0)$.

7. 0,25 pts

Vérifie que $f(-1)=0$.

INDICE

Calcule $\ln(-1+2)$.

CORRIGÉ

Comme $\ln(-1+2)=\ln 1=0$:

$$f(-1)=-1+1-2\ln 1=0.$$

8. 1 pts

Montre que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans I : le réel -1, et un réel β tel que $1 < \beta < 2$.

INDICE

Travaille séparément sur $]-2, 0]$ et sur $[0, +\infty[$: sur chacun, f est strictement monotone. Calcule $f(1)$ et $f(2)$ avec les valeurs données.

CORRIGÉ

Sur $]-2, 0]$. f est strictement décroissante, donc elle prend au plus une fois la valeur 0. D'après la question 7, la seule solution sur cet intervalle est -1.

Sur $[0, +\infty[$. f est continue et strictement croissante, avec $f(0) = 1 - 2\ln 2 < 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. L'image de cet intervalle est $[1 - 2\ln 2, +\infty[$, qui contient 0. L'équation y admet donc une **unique** solution β.

Encadrement. Avec les valeurs données :

$$\begin{aligned} f(1) &= 2 - 2\ln 3 \\ &\approx 2 - 2{,}20 = -0{,}20 < 0, \\ f(2) &= 3 - 2\ln 4 = 3 - 4\ln 2 \\ &\approx 3 - 2{,}76 = 0{,}24 > 0. \end{aligned}$$

Comme 1 et 2 sont dans $[0, +\infty[$, on obtient $1 < \beta < 2$.

Conclusion. L'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans I : -1 et β, avec $1 < \beta < 2$.

9. 0,5 pts

Écris une équation de la tangente à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse -1.

INDICE

$f(-1) = 0$; calcule $f'(-1)$ avec la question 4.

CORRIGÉ

Valeurs en -1. $f(-1) = 0$, et d'après la question 4 :

$$f'(-1) = \frac{-1}{-1 + 2} = -1.$$

Équation. La tangente a pour équation $y = -1 \times (x + 1) + 0$.

Conclusion. La tangente à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse -1 a pour équation $y = -x - 1$.

10. 0,5 pts

Construis (Δ) et $(\mathcal{C})$ dans le même repère.

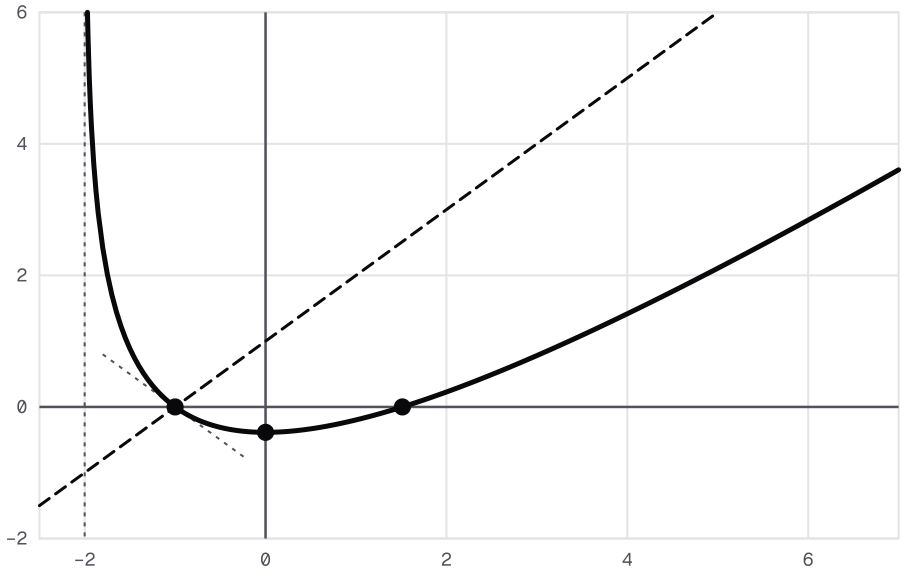
INDICE

Asymptote verticale, minimum, points d'intersection avec l'axe des abscisses, branche parabolique.

CORRIGÉ

Description de la construction :

- la droite $x = -2$ est asymptote : $(\mathcal{C})$ descend depuis le haut le long de cette droite ;
- elle coupe l'axe des abscisses et (Δ) au point $(-1, 0)$, avec la tangente $y = -x - 1$;
- elle atteint son minimum au point $(0; 1 - 2\ln 2) \approx (0; -0{,}38)$, avec une tangente horizontale ;
- elle remonte, recoupe l'axe des abscisses en $\beta \approx 1{,}5$, reste sous (Δ) et, en $+\infty$, suit la direction de $y = x$ en s'éloignant de (Δ) vers le bas.



La courbe de f(x) = x + 1 − 2 ln(x + 2) avec l'asymptote x = −2, la droite (Δ) : y = x + 1, le minimum en 0 et les deux zéros −1 et β.

Exercice 4 6,5 pts

Une inégalité cachée et une tangente traversée

Partie A. Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$g(x) = x\ln x - x + 1.$$

Partie B. Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$f(x) = (x+1)\ln x - 2x + 2.$$

On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

A.1 0,5 pts

Calcule $g'(x)$ pour $x > 0$ et étudie les variations de g sur $]0,+\infty[$.

INDICE

Dérive $x\ln x$ par la règle du produit ; le signe de $\ln x$ est connu.

CORRIGÉ

Dérivée. D'après la règle du produit pour $x\ln x$, pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 \\ &= \ln x. \end{aligned}$$

Signe. $\ln x < 0$ sur $]0,1[$ et $\ln x > 0$ sur $]1,+\infty[$.

Conclusion. g est strictement décroissante sur $]0,1]$ et strictement croissante sur $[1,+\infty[$, avec $g(1) = 0 - 1 + 1 = 0$.

A.2 0,5 pts

Déduis-en que $g(x) \geq 0$ pour tout $x > 0$, avec égalité seulement pour $x = 1$.

INDICE

$g(1)$ est le minimum de g ; la stricte monotonie de chaque côté de 1 donne l'inégalité stricte.

CORRIGÉ

D'après 1., g admet en 1 son minimum, égal à 0.

- Si $0 < x < 1$: g est strictement décroissante sur $]0,1]$, donc $g(x) > g(1) = 0$.
- Si $x > 1$: g est strictement croissante sur $[1,+\infty[$, donc $g(x) > g(1) = 0$.

Conclusion. $g(x) \geq 0$ pour tout $x > 0$, et $g(x) = 0$ seulement pour $x = 1$.

B.1 0,75 pts

Calcule $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et interprète graphiquement le résultat.

INDICE

Aucune forme indéterminée : regarde séparément $(x+1)\ln x$ et $-2x+2$.

CORRIGÉ

Limite. Quand x tend vers 0^+, $x+1$ tend vers 1 et $\ln x$ vers $-\infty$ (**limite de référence**). Donc $(x+1)\ln x$ tend vers $-\infty$. Comme $-2x+2$ tend vers 2 :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty.$$

Interprétation. La droite d'équation $x=0$ est asymptote verticale à $(\mathcal{C})$.

B.2 1 pts

Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, puis interprète graphiquement.

INDICE

Forme « $+\infty-\infty$ » : mets x en facteur.

CORRIGÉ

Factorisation. Pour tout $x>0$:

$$\frac{f(x)}{x} = \left(1+\frac{1}{x}\right)\ln x - 2 + \frac{2}{x}.$$

Limite du quotient. Quand x tend vers $+\infty$, $1+\dfrac{1}{x}$ tend vers 1 et $\ln x$ vers $+\infty$, donc :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty.$$

Limite de f. On a $f(x) = x\times\dfrac{f(x)}{x}$, produit de deux facteurs qui tendent vers $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Interprétation. $(\mathcal{C})$ admet en $+\infty$ une **branche parabolique de direction l'axe des ordonnées**.

B.3 0,75 pts

Montre que, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x}$.

INDICE

Règle du produit pour $(x+1)\ln x$, puis réduction au même dénominateur.

CORRIGÉ

D'après la règle du produit pour $(x+1)\ln x$, pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \ln x + \frac{x+1}{x} - 2 \\ &= \ln x - 1 + \frac{1}{x} \\ &= \frac{x\ln x - x + 1}{x} \\ &= \frac{g(x)}{x}. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x}$.

B.4 0,5 pts

Déduis-en que f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$, et dresse son tableau de variations.

INDICE

$f'(x) \geq 0$ et f' ne s'annule qu'en un seul point.

CORRIGÉ

Signe de $f'(x)$. D'après la Partie A, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x} > 0$ pour $x \neq 1$, et $f'(1) = 0$.

Variations. La dérivée est positive et ne s'annule qu'en un point isolé : f est **strictement croissante** sur $]0, +\infty[$.

Tableau de variations.

x	$]0, 1[$	1	$]1, +\infty[$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
f	croissante, de $-\infty$ à 0	0	croissante, de 0 à $+\infty$

B.5 1 pts

Calcule $f(1)$ et déduis-en le signe de $f(x)$. Montre alors que, pour tout réel $x > 1$, $\ln x > \dfrac{2(x-1)}{x+1}$.

INDICE

Une fonction strictement croissante qui s'annule en 1 change de signe en 1. Pour l'inégalité, divise par un nombre dont tu connais le signe.

CORRIGÉ

Valeur en 1. $f(1) = 2\ln 1 - 2 + 2 = 0$.

Signe de $f(x)$. Comme f est strictement croissante : $f(x) < 0$ sur $]0,1[$ et $f(x) > 0$ sur $]1,+\infty[$.

Inégalité. Soit $x > 1$. L'inégalité $f(x) > 0$ s'écrit :

$$\begin{aligned}(x+1)\ln x &> 2x - 2\\ &= 2(x-1).\end{aligned}$$

On divise par $x + 1 > 0$, ce qui conserve le sens de l'inégalité.

Conclusion. Pour tout réel $x > 1$:

$$\ln x > \frac{2(x-1)}{x+1}.$$

B.6 0,5 pts

Donne une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 1, puis la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à (T).

INDICE

$f(1)$ et $f'(1)$ sont déjà connus ; la position se lit sur le signe de f.

CORRIGÉ

Tangente. $f(1) = 0$ et $f'(1) = \dfrac{g(1)}{1} = 0$. La tangente (T) a pour équation $y = 0$: c'est l'axe des abscisses.

Position. D'après la question B.5, $f(x) < 0$ sur $]0,1[$ et $f(x) > 0$ sur $]1,+\infty[$.

Conclusion. $(\mathcal{C})$ est en dessous de (T) sur $]0,1[$ et au-dessus sur $]1,+\infty[$: la courbe **traverse** sa tangente au point $(1,0)$.

B.7 `0,5 pts`

Écris une équation de la tangente (T') à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse e.

INDICE

Calcule $f(\mathrm{e})$, puis $f'(\mathrm{e})$ avec la question B.3 ; utilise ensuite $y = f'(\mathrm{e})(x-\mathrm{e}) + f(\mathrm{e})$.

CORRIGÉ

Valeurs en e. Comme $\ln \mathrm{e} = 1$:

$$\begin{aligned} f(\mathrm{e}) &= (\mathrm{e}+1)\times 1 - 2\mathrm{e} + 2 \\ &= 3 - \mathrm{e}. \end{aligned}$$

D'après la question B.3 :

$$\begin{aligned} f'(\mathrm{e}) &= \frac{g(\mathrm{e})}{\mathrm{e}} = \frac{\mathrm{e} - \mathrm{e} + 1}{\mathrm{e}} \\ &= \frac{1}{\mathrm{e}}. \end{aligned}$$

Équation. (T') a pour équation :

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{\mathrm{e}}(x-\mathrm{e}) + 3 - \mathrm{e} \\ &= \frac{x}{\mathrm{e}} - 1 + 3 - \mathrm{e} \\ &= \frac{x}{\mathrm{e}} + 2 - \mathrm{e}. \end{aligned}$$

Conclusion. La tangente (T') a pour équation $y = \dfrac{x}{\mathrm{e}} + 2 - \mathrm{e}$.

B.8 0,5 pts

Construis (T), (T') et $(\mathcal{C})$ dans le même repère (on prendra $\mathrm{e} \approx 2{,}7$).

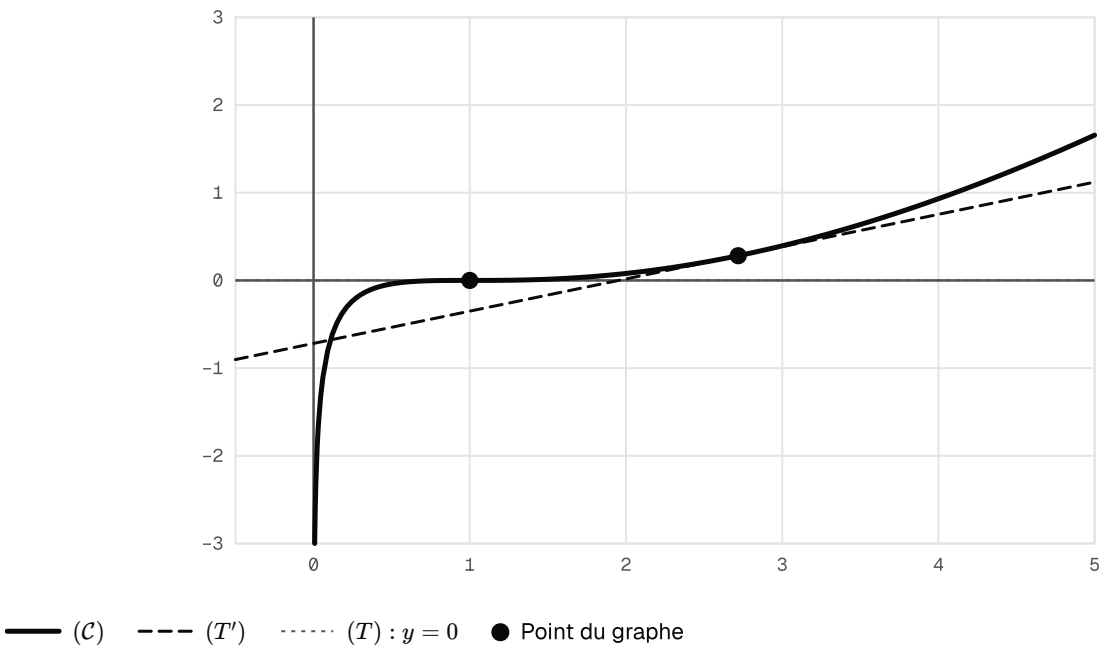
INDICE

Asymptote verticale, point $(1, 0)$ avec sa tangente horizontale traversée, point d'abscisse e avec (T'), branche parabolique verticale.

CORRIGÉ

Description de la construction :

- $(\mathcal{C})$ monte depuis le bas le long de l'axe des ordonnées (asymptote verticale) ;
- elle reste sous l'axe des abscisses jusqu'au point $(1, 0)$, où elle traverse sa tangente horizontale (T) ;
- elle passe par le point $(\mathrm{e}, 3 - \mathrm{e}) \approx (2{,}7 ; 0{,}3)$, où sa tangente (T') a pour pente $\dfrac{1}{\mathrm{e}} \approx 0{,}37$ et coupe l'axe des ordonnées en $2 - \mathrm{e} \approx -0{,}7$;
- elle continue de monter au-dessus de l'axe des abscisses, de plus en plus vite : branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.



La courbe de f(x) = (x + 1) ln x − 2x + 2 avec l'asymptote x = 0, la tangente (T) horizontale qu'elle traverse en (1, 0) et la tangente (T') au point d'abscisse e.

Exercice 5 6,5 pts

Une courbe qui reste sous sa droite

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = x - \ln\left(x^2 - 2x + 2\right).$$

On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé, et (Δ) la droite d'équation $y = x$.

On donne : $\ln 2 \approx 0{,}69$ et $\ln 5 \approx 1{,}61$.

1. 0,25 pts

Vérifie que, pour tout réel x, $x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1$. Déduis-en que f est définie sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Développe $(x-1)^2$. Un carré est positif.

CORRIGÉ

Égalité. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned}&(x-1)^2 + 1\\ &= x^2 - 2x + 1 + 1\\ &= x^2 - 2x + 2.\end{aligned}$$

Positivité. Pour tout réel x, $(x-1)^2 \geq 0$, donc $x^2 - 2x + 2 \geq 1 > 0$.

Conclusion. Le logarithme $\ln\left(x^2 - 2x + 2\right)$ existe pour tout réel x : f est définie sur $\mathbb{R}$.

2. 0,25 pts

Calcule $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

INDICE

Regarde séparément x et $-\ln\left(x^2 - 2x + 2\right)$.

CORRIGÉ

Les deux termes. Quand x tend vers $-\infty$, $x^2 - 2x + 2$ tend vers $+\infty$, donc $\ln\left(x^2 - 2x + 2\right)$ tend vers $+\infty$ et $-\ln\left(x^2 - 2x + 2\right)$ tend vers $-\infty$. Le premier terme, x, tend aussi vers $-\infty$.

Conclusion. Par somme, sans forme indéterminée :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.$$

3. 0,5 pts

Montre que, pour tout réel $x \neq 0$:

$$\ln\left(x^2 - 2x + 2\right) = 2\ln|x| + \ln\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right).$$

INDICE

Mets x^2 en facteur dans le trinôme. Vérifie que les deux facteurs sont strictement positifs, puis écris $\ln\left(x^2\right)$ à l'aide de $|x|$.

CORRIGÉ

Factorisation. Soit $x \neq 0$. On met x^2 en facteur :

$$x^2 - 2x + 2 = x^2\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right).$$

Positivité. $x^2 > 0$, et d'après la question 1 :

$$1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} = \frac{x^2 - 2x + 2}{x^2} > 0.$$

Logarithme d'un produit. Les deux facteurs sont strictement positifs, donc :

$$\ln\left(x^2 - 2x + 2\right) = \ln\left(x^2\right) + \ln\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right).$$

Enfin, $\ln\left(x^2\right) = \ln\left(|x|^2\right) = 2\ln|x|$, car $|x| > 0$.

Conclusion. Pour tout réel $x \neq 0$, $\ln\left(x^2 - 2x + 2\right) = 2\ln|x| + \ln\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right)$.

Attention. Pour $x < 0$, écrire $2\ln x$ n'aurait pas de sens.

4. 0,5 pts

Déduis-en $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

INDICE

Pour $x>0$, $|x|=x$. Mets ensuite x en facteur dans $x-2\ln x$.

CORRIGÉ

Écriture. Pour $x>0$, $|x|=x$. D'après la question 3 :

$$f(x)=x\left(1-2\times\frac{\ln x}{x}\right)-\ln\left(1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right).$$

Premier terme. Limite de référence : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$. La parenthèse tend donc vers 1, et le produit vers $+\infty$.

Second terme. $1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{x^2}$ tend vers 1 ; par continuité de $\ln$ en 1, son logarithme tend vers $\ln 1=0$.

Conclusion.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty.$$

5. 1 pts

Calcule les limites de $\dfrac{f(x)}{x}$ et de $f(x)-x$ en $-\infty$ et en $+\infty$. Interprète graphiquement.

INDICE

Avec la question 3, $\dfrac{f(x)}{x}$ s'écrit $1-2\times\dfrac{\ln|x|}{x}-\dfrac{1}{x}\ln\left(1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)$. En $-\infty$, pose $X=-x=|x|$.

CORRIGÉ

Quotient. Pour $x\neq 0$, d'après la question 3 :

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{x}&=1-2\times\frac{\ln|x|}{x}\\&\quad-\frac{1}{x}\ln\left(1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right).\end{aligned}$$

- En $+\infty$: $\dfrac{\ln|x|}{x}=\dfrac{\ln x}{x}$ tend vers 0.
- En $-\infty$: avec $X=-x$, qui tend vers $+\infty$, $\dfrac{\ln|x|}{x}=-\dfrac{\ln X}{X}$ tend vers 0.

Dans les deux cas, le dernier terme tend vers $0\times\ln 1=0$. Donc :

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=1,$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1.$$

Différence. Pour tout réel x, $f(x)-x=-\ln\left(x^2-2x+2\right)$, qui tend vers $-\infty$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

Interprétation. $(\mathcal{C})$ admet en $-\infty$ et en $+\infty$ une **branche parabolique de direction la droite** (Δ) d'équation $y=x$.

6. 0,75 pts

Montre que, pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{(x-2)^2}{x^2-2x+2}$.

INDICE

Nomme la règle de dérivation de $\ln(u)$; son hypothèse a été vérifiée à la question 1.

CORRIGÉ

Hypothèse. La fonction $u : x \mapsto x^2 - 2x + 2$ est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$ (question 1), avec $u'(x) = 2x - 2$.

Calcul. D'après la dérivée de $\ln u$, $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \frac{2x-2}{x^2-2x+2} \\ &= \frac{x^2-4x+4}{x^2-2x+2} \\ &= \frac{(x-2)^2}{x^2-2x+2}. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{(x-2)^2}{x^2-2x+2}$.

7. 0,5 pts

Déduis-en que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et dresse son tableau de variations.

INDICE

$f'(x) \geq 0$; en combien de points s'annule-t-elle ?

CORRIGÉ

Signe de $f'(x)$. Pour tout réel x, $f'(x) \geq 0$, et $f'(x) = 0$ seulement pour $x = 2$.

Variations. La dérivée ne s'annule qu'en un point isolé : f est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$. On a $f(2) = 2 - \ln 2$.

Tableau de variations.

x	$]-\infty, 2[$	2	$]2, +\infty[$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
f	croissante, de $-\infty$ à $2 - \ln 2$	$2 - \ln 2$	croissante, de $2 - \ln 2$ à $+\infty$

8. 0,75 pts

Étudie la position relative de $(\mathcal{C})$ et de (Δ).

INDICE

$f(x) - x = -\ln\left((x-1)^2+1\right)$; compare $(x-1)^2+1$ à 1.

CORRIGÉ

Différence. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} &f(x) - x \\ &= -\ln\left((x-1)^2+1\right). \end{aligned}$$

Signe. On a $(x-1)^2+1 \geq 1$ et $\ln$ est strictement croissante, donc $\ln\left((x-1)^2+1\right) \geq \ln 1 = 0$. L'égalité n'a lieu que si $(x-1)^2+1 = 1$, c'est-à-dire pour $x = 1$.

Conclusion. $(\mathcal{C})$ est en dessous de (Δ), et elle la rencontre en un seul point, $A(1,1)$.

9. 0,5 pts

Montre que (Δ) est la tangente à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 1.

INDICE

Calcule $f(1)$ et $f'(1)$.

CORRIGÉ

Valeurs en 1. $f(1) = 1 - \ln 1 = 1$, et d'après la question 6 :

$$f'(1) = \frac{(1-2)^2}{1} = 1.$$

Tangente. La tangente au point d'abscisse 1 a pour équation $y = 1 \times (x-1) + 1$, soit $y = x$.

Conclusion. Cette tangente est la droite (Δ).

10. 1 pts

Montre que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$, et que $0 < \alpha < \dfrac{1}{2}$.

INDICE

Stricte croissance et limites pour l'existence et l'unicité. Pour l'encadrement : $\ln\left(\dfrac{5}{4}\right) = \ln 5 - 2\ln 2$.

CORRIGÉ

Existence et unicité. f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, de limite $-\infty$ en $-\infty$ et $+\infty$ en $+\infty$. L'image de $\mathbb{R}$ par f est donc $\mathbb{R}$, qui contient 0 : l'équation $f(x) = 0$ admet une **unique** solution α.

Encadrement. Avec les valeurs données, $f(0) = -\ln 2 \approx -0{,}69 < 0$. De plus, $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 - 1 + 2 = \dfrac{5}{4}$, donc :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{2} - \ln\left(\frac{5}{4}\right) \\ &= \frac{1}{2} - \ln 5 + 2\ln 2 \\ &\approx 0{,}5 - 1{,}61 + 1{,}38 \\ &= 0{,}27 > 0. \end{aligned}$$

Conclusion. Comme f est strictement croissante, $f(0) < 0 = f(\alpha) < f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ donne $0 < \alpha < \dfrac{1}{2}$.

11. 0,5 pts

Construis (Δ) et $(\mathcal{C})$ dans le même repère.

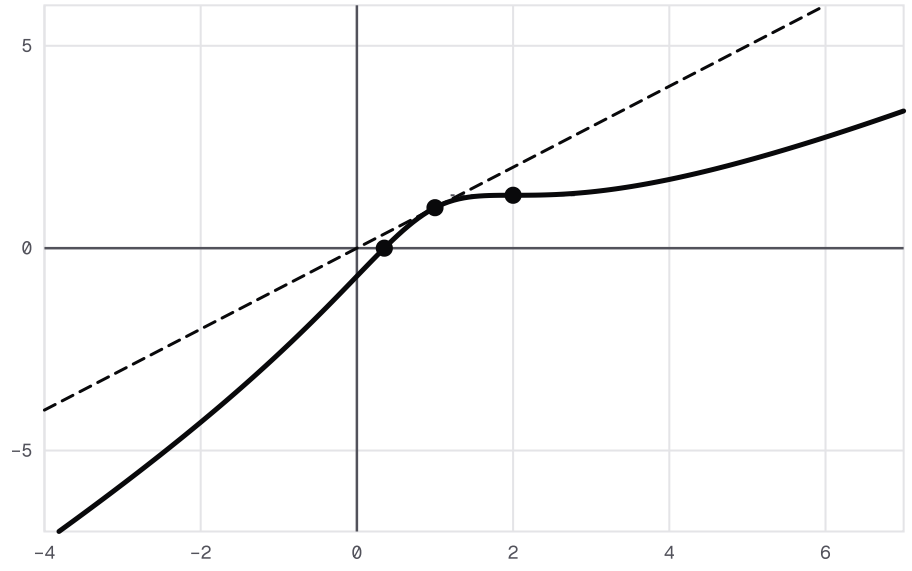
INDICE

Point de contact avec (Δ), tangente horizontale en 2, branches paraboliques.

CORRIGÉ

Description de la construction :

- en $-\infty$, $(\mathcal{C})$ vient du bas, sous (Δ), en suivant la direction de (Δ) ;
- elle coupe l'axe des abscisses en $\alpha \approx 0{,}35$ et l'axe des ordonnées en $(0; -\ln 2) \approx (0; -0{,}69)$;
- elle touche (Δ) en $A(1, 1)$, où (Δ) est sa tangente, sans la traverser ;
- au point $(2; 2 - \ln 2) \approx (2; 1{,}31)$, sa tangente est horizontale, mais la fonction continue de croître ;
- en $+\infty$, elle monte sous (Δ) en s'en éloignant (branche parabolique de direction (Δ)).



La courbe de f(x) = x − ln(x² − 2x + 2) sous la droite (Δ) : y = x, tangente à (Δ) en A(1, 1), avec une tangente horizontale en 2.