BURHAN

Fonctions logarithmiques : exercices, entraînement

2ème Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-experimentales/mathematiques/fonctions-logarithmiques/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Fonctions logarithmiques	Entraînement	7

Exercice 1

Poser X = ln x

Toutes les équations et inéquations de cet exercice sont à résoudre dans $]0, +\infty[$.

Dans chacune, pose $X = \ln x$ pour te ramener à un polynôme.

1.

$(\ln x)^2 - \ln x - 6 = 0$

INDICE

Résous d'abord $X^2 - X - 6 = 0$, puis retrouve x à partir de chaque valeur de X.

2.

$(\ln x)^2 - \ln x - 6 < 0$

INDICE

Le trinôme $X^2 - X - 6$ est négatif entre ses racines. Traduis ensuite l'encadrement de X en un encadrement de x.

3.

$(\ln x)^3 = 4 \ln x$

INDICE

Ne divise pas par $\ln x$: ce nombre peut être nul. Mets X en facteur.

4.

$2(\ln x)^2 + \ln x - 1 \geq 0$

INDICE

Les racines de $2X^2 + X - 1$ sont simples à trouver ; l'une d'elles est -1.

Exercice 2

Quand le domaine décide de tout

Dans cet exercice, l'ensemble de définition décide de la réponse : écris-le avant chaque calcul.

1.

Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $\ln\left(x^2\right) = \ln(x+6)$.

INDICE

$\ln\left(x^2\right)$ existe dès que $x \neq 0$, même pour x négatif. Ne remplace pas $\ln\left(x^2\right)$ par $2\ln x$.

2.

Résous dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\ln(x-2) + \ln(x+4) \leq \ln 7$.

INDICE

Domaine, puis regroupement en un seul logarithme. Le trinôme obtenu se factorise ; garde seulement la partie de l'ensemble trouvé qui est dans le domaine.

3. (Bonus)

Résous dans $\mathbb{R}^2$ le système formé des deux équations $x + y = 9$ et $\ln x + \ln y = \ln 14$.

INDICE

Le système n'a de sens que pour $x > 0$ et $y > 0$. Traduis la seconde équation en une condition sur le produit xy : tu connais alors la somme et le produit de deux nombres.

Exercice 3

Lever les formes indéterminées

Calcule les limites suivantes.

Repère d'abord s'il y a une forme indéterminée, puis choisis l'outil : factorisation, changement de variable ou regroupement.

1.

$$\lim_{x \to +\infty} \left(x^2 - 4x \ln x\right)$$

INDICE

Mets x^2 en facteur.

2.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

INDICE

Pose $X = \sqrt{x}$: alors $x = X^2$ et $\ln x = 2 \ln X$.

3.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x}$$

INDICE

Même idée avec $X = \sqrt{x}$: exprime $(\ln x)^2$ et x à l'aide de X, et fais apparaître un carré.

4.

$$\lim_{x \to +\infty} x \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)$$

INDICE

Pose $X = \dfrac{2}{x}$, qui tend vers 0, et exprime x en fonction de X.

5.

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\ln\left(x^2 + 3\right) - 2 \ln x\right)$$

INDICE

Pour $x > 0$, $2 \ln x = \ln\left(x^2\right)$. Regroupe la différence en un seul logarithme.

Exercice 4

Étude d'un logarithme de quotient

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \ln\left(\frac{x-2}{x+1}\right).$$

On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1.

Détermine l'ensemble de définition D_f de f.

INDICE

Tableau de signes du quotient : une ligne pour $x-2$, une pour $x+1$.

2.

Calcule les limites de f en $-\infty$, en $+\infty$, en -1 à gauche et en 2 à droite. Interprète graphiquement chaque résultat.

INDICE

Calcule d'abord la limite du quotient, puis compose avec $\ln$: $\ln X$ tend vers 0 si X tend vers 1, vers $+\infty$ si X tend vers $+\infty$, vers $-\infty$ si X tend vers 0^+.

3.

Montre que, pour tout $x \in D_f$, $f'(x) = \dfrac{3}{(x+1)(x-2)}$. Dresse le tableau de variations de f.

INDICE

Calcule u' par la règle du quotient, puis applique $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$ sur chacun des deux intervalles. Pour le signe, compare $(x+1)(x-2)$ au quotient $u(x)$.

4.

Calcule $\dfrac{x-2}{x+1} - 1$, puis déduis-en le signe de $f(x)$ sur chacun des intervalles de D_f.

INDICE

$\ln X > 0$ si et seulement si $X > 1$, pour $X > 0$.

Exercice 5

Une fonction auxiliaire pour le signe de f′

Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$g(x) = x^3 - 1 + \ln x.$$

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = x^2 + 1 - \frac{2\ln x}{x}.$$

1.

Étudie le sens de variation de g, calcule $g(1)$ et déduis-en le signe de $g(x)$ sur $]0, +\infty[$.

INDICE

Dérive terme à terme. Pour $x > 0$, quel est le signe de chaque terme obtenu ? Pense ensuite à ce que fait une fonction strictement croissante de part et d'autre d'un point où elle s'annule.

2.

Montre que, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{2g(x)}{x^2}$.

INDICE

Dérive $\dfrac{\ln x}{x}$ avec la règle du quotient $\left(\dfrac{v}{w}\right)' = \dfrac{v'w - vw'}{w^2}$, puis réduis au même dénominateur.

3.

Calcule $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

INDICE

En 0^+, écris $-\dfrac{2\ln x}{x} = (-2\ln x) \times \dfrac{1}{x}$: ce n'est pas une forme indéterminée. En $+\infty$, une limite de référence suffit.

4.

Dresse le tableau de variations de f. Déduis-en que, pour tout réel $x > 0$, $2\ln x \leq x^3 - x$.

INDICE

Le minimum de f donne une inégalité $f(x) \geq m$. Multiplie-la par un nombre dont tu connais le signe.

Exercice 6

Logarithmes de base 2 et de base 10

On note $\log$ le logarithme décimal et $\log_2$ le logarithme de base 2.

On donne $\ln 2 \approx 0{,}693$, $\ln 10 \approx 2{,}303$ et $\log 2 \approx 0{,}301$.

1.

Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $\log_2 x + \log_2(x-2) = 3$.

INDICE

Domaine d'abord. Le logarithme de base 2 a les mêmes propriétés que $\ln$; et $3 = \log_2 8$.

2.

Détermine le plus petit entier naturel n tel que $2^n > 10^6$.

INDICE

Les deux membres sont strictement positifs : applique $\ln$, qui conserve l'ordre, puis isole n en divisant par un nombre positif.

3.

Combien de chiffres l'écriture décimale de 2^{50} comporte-t-elle ?

INDICE

Un entier N s'écrit avec k chiffres exactement quand $10^{k-1} \leq N < 10^k$, c'est-à-dire quand $k-1 \leq \log N < k$.

Exercice 7

Une solution qu'on encadre sans la calculer

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=(x-4)\ln x$, et h la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$h(x)=x\ln x+x-4.$$

On donne $\ln 2\approx 0{,}69$ et $\ln 2{,}5\approx 0{,}92$.

1.

Montre que, pour tout $x>0$, $f'(x)=\dfrac{h(x)}{x}$.

INDICE

Règle du produit, puis mise au même dénominateur.

2.

Étudie les variations de h sur $]0,+\infty[$ et calcule ses limites en 0^+ et en $+\infty$.

INDICE

Dérive $x\ln x$ par la règle du produit. Ensuite, résous $h'(x)>0$ avec le nombre e. En 0^+, utilise la limite de référence de $x\ln x$.

3.

Montre que l'équation $h(x)=0$ admet une unique solution β dans $]0,+\infty[$, et que $2<\beta<2{,}5$.

INDICE

Sur $\left]0,\mathrm{e}^{-2}\right]$, h décroît à partir de valeurs proches de -4 : peut-elle s'annuler ? Sur $\left[\mathrm{e}^{-2},+\infty\right[$, utilise le théorème des valeurs intermédiaires avec la stricte monotonie.

4.

Déduis-en le signe de $h(x)$, puis le tableau de variations de f.

INDICE

Le signe de $f'(x)$ est celui de $h(x)$, car $x>0$. Pour compléter le tableau, cherche aussi les limites de f aux bornes : aucune n'est une forme indéterminée.