BURHAN

# Fonctions logarithmiques : exercices, entraînement

2ème Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-experimentales/mathematiques/fonctions-logarithmiques/exercices/entrainement

| Chapitre | Palier | Exercices |
| --- | --- | --- |
| Fonctions logarithmiques | Entraînement | 7 |

### Exercice 1

## Poser X = ln x

Toutes les équations et inéquations de cet exercice sont à résoudre dans $]0, +\infty[$.

Dans chacune, pose $X = \ln x$ pour te ramener à un polynôme.

**1.**

$(\ln x)^2 - \ln x - 6 = 0$

INDICE

Résous d'abord $X^2 - X - 6 = 0$, puis retrouve $x$ à partir de chaque valeur de $X$.

CORRIGÉ

**Changement de variable.** Pour $x > 0$, posons $X = \ln x$. L'équation devient $X^2 - X - 6 = 0$.

**Résolution en $X$.** Le discriminant vaut $1 + 24 = 25$, d'où deux racines :

$$X_1 = \frac{1 + 5}{2} = 3,$$
$$X_2 = \frac{1 - 5}{2} = -2.$$

**Retour à $x$.** On a $\ln x = 3 \iff x = \mathrm{e}^3$, et $\ln x = -2 \iff x = \mathrm{e}^{-2}$. Ces deux réels sont strictement positifs.

**Conclusion.** L'ensemble des solutions est $S = \left\{\mathrm{e}^{-2}, \mathrm{e}^3\right\}$.

**2.**

$(\ln x)^2 - \ln x - 6 < 0$

INDICE

Le trinôme $X^2 - X - 6$ est négatif entre ses racines. Traduis ensuite l'encadrement de $X$ en un encadrement de $x$.

CORRIGÉ

**Inéquation en $X$.** Avec $X = \ln x$, on a $X^2 - X - 6 = (X - 3)(X + 2)$. Ce trinôme est strictement négatif si et seulement si $-2 < X < 3$.

**Retour à $x$.** On a $-2 = \ln\left(\mathrm{e}^{-2}\right)$ et $3 = \ln\left(\mathrm{e}^3\right)$. Comme $\ln$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$, pour $x > 0$ :

$$\begin{aligned} & -2 < \ln x < 3 \\ \iff\ & \mathrm{e}^{-2} < x < \mathrm{e}^3. \end{aligned}$$

**Conclusion.** L'ensemble des solutions est $S = \left]\mathrm{e}^{-2}, \mathrm{e}^3\right[$.

### 3.

$(\ln x)^3 = 4\ln x$

INDICE

Ne divise pas par $\ln x$ : ce nombre peut être nul. Mets $X$ en facteur.

CORRIGÉ

**Équation en $X$.** Avec $X = \ln x$, l'équation s'écrit $X^3 - 4X = 0$. On factorise :

$$\begin{aligned} & X^3 - 4X = 0 \\ \iff\ & X\left(X^2 - 4\right) = 0 \\ \iff\ & X(X-2)(X+2) = 0. \end{aligned}$$

Donc $X = 0$, $X = 2$ ou $X = -2$.

**Retour à $x$.** Ces trois valeurs donnent $x = 1$, $x = \mathrm{e}^2$ ou $x = \mathrm{e}^{-2}$, tous strictement positifs.

**Conclusion.** L'ensemble des solutions est $S = \left\{\mathrm{e}^{-2}, 1, \mathrm{e}^2\right\}$.

**Attention.** En divisant par $\ln x$, on obtiendrait $(\ln x)^2 = 4$ et on perdrait la solution $x = 1$.

### 4.

$2(\ln x)^2 + \ln x - 1 \geq 0$

INDICE

Les racines de $2X^2 + X - 1$ sont simples à trouver ; l'une d'elles est $-1$.

CORRIGÉ

**Inéquation en $X$.** Avec $X = \ln x$, on a $2X^2 + X - 1 = (2X-1)(X+1)$, de racines $-1$ et $\dfrac{1}{2}$. Ce trinôme est positif à l'extérieur de ses racines : $2X^2 + X - 1 \geq 0$ si et seulement si $X \leq -1$ ou $X \geq \dfrac{1}{2}$.

**Retour à $x$.** Par stricte croissance de $\ln$, pour $x > 0$ :

- $\ln x \leq -1 \iff x \leq \mathrm{e}^{-1}$ ;
- $\ln x \geq \dfrac{1}{2} \iff x \geq \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\mathrm{e}}$.

**Conclusion.** L'ensemble des solutions est :

$$\begin{aligned} S = & \left]0, \mathrm{e}^{-1}\right] \\ & \cup \left[\sqrt{\mathrm{e}}, +\infty\right[. \end{aligned}$$

### Exercice 2

## Quand le domaine décide de tout

Dans cet exercice, l'ensemble de définition décide de la réponse : écris-le avant chaque calcul.

**1.**

Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $\ln\left(x^2\right) = \ln(x+6)$.

INDICE

$\ln\left(x^2\right)$ existe dès que $x \neq 0$, même pour $x$ négatif. Ne remplace pas $\ln\left(x^2\right)$ par $2\ln x$.

CORRIGÉ

**Domaine.** On a $x^2 > 0 \iff x \neq 0$, et $x + 6 > 0 \iff x > -6$. Donc :

$$D = ]-6, 0[ \cup ]0, +\infty[ .$$

**Résolution sur $D$.** Soit $x \in D$. Les deux arguments sont strictement positifs et $\ln$ est strictement croissante, donc l'équation équivaut à $x^2 = x + 6$ :

$$\begin{aligned} & x^2 = x + 6 \\ \iff\ & x^2 - x - 6 = 0 \\ \iff\ & (x-3)(x+2) = 0. \end{aligned}$$

Ce produit est nul pour $x = 3$ ou $x = -2$.

**Tri.** $3 \in D$ et $-2 \in D$.

**Conclusion.** L'ensemble des solutions est $S = \{-2, 3\}$.

Contrôle : pour $x = -2$, les deux membres valent $\ln 4$ ; pour $x = 3$, ils valent $\ln 9$.

**Attention.** En écrivant $2\ln x$ au lieu de $\ln\left(x^2\right)$, on restreindrait le domaine à $x > 0$ et on perdrait la solution $-2$.

### 2.

Résous dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\ln(x-2)+\ln(x+4)\leq \ln 7$.

INDICE

Domaine, puis regroupement en un seul logarithme. Le trinôme obtenu se factorise ; garde seulement la partie de l'ensemble trouvé qui est dans le domaine.

CORRIGÉ

**Domaine.** Il faut $x-2>0$ et $x+4>0$, soit $x>2$. Donc $D=]2,+\infty[$.

**Regroupement.** Soit $x\in D$. Les deux arguments sont strictement positifs ; d'après le logarithme d'un produit :

$$\begin{aligned}&\ln(x-2)+\ln(x+4)\\&=\ln\left((x-2)(x+4)\right).\end{aligned}$$

**Résolution sur $D$.** Par stricte croissance de $\ln$ :

$$\begin{aligned}&(x-2)(x+4)\leq 7\\\iff\ &x^2+2x-15\leq 0\\\iff\ &(x+5)(x-3)\leq 0\\\iff\ &-5\leq x\leq 3.\end{aligned}$$

**Conclusion.** On garde les réels de $D$ compris entre $-5$ et $3$ : l'ensemble des solutions est $S=]2,3]$.

### 3. (Bonus)

Résous dans $\mathbb{R}^2$ le système formé des deux équations $x+y=9$ et $\ln x+\ln y=\ln 14$.

INDICE

Le système n'a de sens que pour $x>0$ et $y>0$. Traduis la seconde équation en une condition sur le produit $xy$ : tu connais alors la somme et le produit de deux nombres.

CORRIGÉ

**Domaine.** Le système a un sens pour $x>0$ et $y>0$.

**Transformation.** Sur ce domaine, d'après le logarithme d'un produit, $\ln x+\ln y=\ln(xy)$. Comme $\ln$ est strictement croissante, $\ln(xy)=\ln 14$ équivaut à $xy=14$.

**Somme et produit.** Le système équivaut donc à $x+y=9$ et $xy=14$. Les nombres $x$ et $y$ sont alors les racines de l'équation :

$$s^2-9s+14=0,$$

soit $s=2$ ou $s=7$.

**Conclusion.** Les couples $(2,7)$ et $(7,2)$ ont des coordonnées strictement positives : $S=\{(2,7),(7,2)\}$.

### Exercice 3

## Lever les formes indéterminées

Calcule les limites suivantes.

Repère d'abord s'il y a une forme indéterminée, puis choisis l'outil : factorisation, changement de variable ou regroupement.

**1.**

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-4x\ln x\right)$

INDICE

Mets $x^2$ en facteur.

CORRIGÉ

**Forme indéterminée.** C'est une forme « $+\infty-\infty$ ».

**Factorisation.** Pour tout réel $x>0$ :

$$\begin{aligned} &x^2-4x\ln x\\ &=x^2\left(1-4\times\frac{\ln x}{x}\right). \end{aligned}$$

**Limite de référence.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$, donc la parenthèse tend vers $1$, et $x^2$ tend vers $+\infty$.

**Conclusion.** Par produit :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^2-4x\ln x\right)=+\infty.$$

**2.**

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

INDICE

Pose $X=\sqrt{x}$ : alors $x=X^2$ et $\ln x=2\ln X$.

CORRIGÉ

**Forme indéterminée.** C'est une forme « $\dfrac{+\infty}{+\infty}$ ».

**Changement de variable.** Pour $x>0$, on pose $X=\sqrt{x}$. Alors $X>0$, $x=X^2$ et $\ln x=\ln\left(X^2\right)=2\ln X$. Donc :

$$\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=2\times\frac{\ln X}{X}.$$

**Limite de référence.** Quand $x$ tend vers $+\infty$, $X$ tend vers $+\infty$, et $\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{\ln X}{X}=0$.

**Conclusion.**

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=0.$$

### 3.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}$$

INDICE

Même idée avec $X=\sqrt{x}$ : exprime $(\ln x)^2$ et $x$ à l'aide de $X$, et fais apparaître un carré.

CORRIGÉ

**Forme indéterminée.** C'est une forme « $\dfrac{+\infty}{+\infty}$ ».

**Changement de variable.** Pour $x>0$, on pose $X=\sqrt{x}$ : $x=X^2$ et $\ln x=2\ln X$. Donc :

$$\begin{aligned}\frac{(\ln x)^2}{x}&=\frac{4(\ln X)^2}{X^2}\\&=4\left(\frac{\ln X}{X}\right)^2.\end{aligned}$$

**Limite de référence.** Quand $x$ tend vers $+\infty$, $X$ tend vers $+\infty$, et $\dfrac{\ln X}{X}$ tend vers $0$.

**Conclusion.** La limite vaut $4\times 0^2=0$ :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=0.$$

### 4.

$$\lim_{x\to+\infty}x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)$$

INDICE

Pose $X=\dfrac{2}{x}$, qui tend vers $0$, et exprime $x$ en fonction de $X$.

CORRIGÉ

**Forme indéterminée.** C'est une forme « $+\infty\times 0$ ».

**Changement de variable.** Pour $x>0$, on pose $X=\dfrac{2}{x}$, donc $x=\dfrac{2}{X}$ :

$$\begin{aligned}&x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)\\&=2\times\frac{\ln(1+X)}{X}.\end{aligned}$$

**Limite de référence.** Quand $x$ tend vers $+\infty$, $X$ tend vers $0$, et $\lim\limits_{X\to0}\dfrac{\ln(1+X)}{X}=1$.

**Conclusion.**

$$\lim_{x\to+\infty}x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)=2.$$

**5.**

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\ln\left(x^2+3\right) - 2\ln x\right)$

INDICE

Pour $x > 0$, $2\ln x = \ln\left(x^2\right)$. Regroupe la différence en un seul logarithme.

CORRIGÉ

**Forme indéterminée.** C'est une forme « $+\infty - \infty$ ».

**Regroupement.** Pour $x > 0$, $2\ln x = \ln\left(x^2\right)$, avec $x^2+3 > 0$ et $x^2 > 0$. D'après le logarithme d'un quotient :

$$\begin{aligned} &\ln\left(x^2+3\right) - 2\ln x \\ &= \ln\left(\frac{x^2+3}{x^2}\right) \\ &= \ln\left(1+\frac{3}{x^2}\right). \end{aligned}$$

**Passage à la limite.** Quand $x$ tend vers $+\infty$, $1+\dfrac{3}{x^2}$ tend vers $1$, et $\ln$ est continue en $1$.

**Conclusion.** La limite vaut $\ln 1 = 0$.

**Exercice 4**

## Étude d'un logarithme de quotient

Soit $f$ la fonction définie par :

$$f(x) = \ln\left(\frac{x-2}{x+1}\right).$$

On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

**1.**

Détermine l'ensemble de définition $D_f$ de $f$.

INDICE

Tableau de signes du quotient : une ligne pour $x-2$, une pour $x+1$.

CORRIGÉ

**Condition d'existence.** Le nombre $f(x)$ existe si et seulement si $x \neq -1$ et $\dfrac{x-2}{x+1} > 0$.

**Signe du quotient.**

| $x$ | $]-\infty,-1[$ | $]-1,2[$ | $]2,+\infty[$ |
|---|---|---|---|
| $x-2$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| $x+1$ | $-$ | $+$ | $+$ |
| quotient | $+$ | $-$ | $+$ |

Le quotient est nul en $2$, qui est donc exclu.

**Conclusion.** L'ensemble de définition de $f$ est :

$$D_f = ]-\infty,-1[ \cup ]2,+\infty[.$$

## 2.

Calcule les limites de $f$ en $-\infty$, en $+\infty$, en $-1$ à gauche et en $2$ à droite. Interprète graphiquement chaque résultat.

INDICE

Calcule d'abord la limite du quotient, puis compose avec $\ln$ : $\ln X$ tend vers $0$ si $X$ tend vers $1$, vers $+\infty$ si $X$ tend vers $+\infty$, vers $-\infty$ si $X$ tend vers $0^+$.

CORRIGÉ

Pour tout $x \in D_f$, on note $u(x) = \dfrac{x-2}{x+1}$, de sorte que $f(x) = \ln\left(u(x)\right)$.

**En $-\infty$ et en $+\infty$.** Le quotient des termes de plus haut degré montre que $u(x)$ tend vers $1$. Comme $\ln$ est continue en $1$ :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0,$$
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

*Interprétation* : la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à $(\mathcal{C})$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

**En $-1$ à gauche.** $x - 2$ tend vers $-3$, et $x + 1$ tend vers $0$ en restant négatif : $u(x)$ tend vers $+\infty$. Comme $\lim\limits_{X \to +\infty} \ln X = +\infty$ :

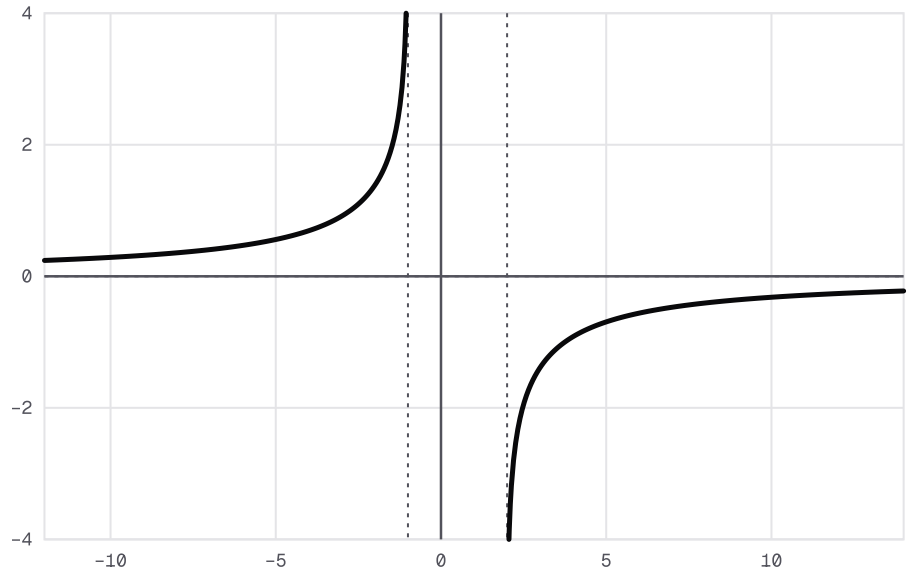
$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = +\infty.$$

*Interprétation* : la droite d'équation $x = -1$ est asymptote verticale à $(\mathcal{C})$.

**En $2$ à droite.** $x - 2$ tend vers $0$ en restant positif, et $x + 1$ tend vers $3$ : $u(x)$ tend vers $0^+$. Comme $\lim\limits_{X \to 0^+} \ln X = -\infty$ :

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = -\infty.$$

*Interprétation* : la droite d'équation $x = 2$ est asymptote verticale à $(\mathcal{C})$.




**La courbe de f(x) = ln((x − 2)/(x + 1)) avec ses asymptotes verticales x = −1 et x = 2 et l'axe des abscisses, asymptote horizontale.**

### 3.

Montre que, pour tout $x \in D_f$, $f'(x) = \dfrac{3}{(x+1)(x-2)}$. Dresse le tableau de variations de $f$.

INDICE

Calcule $u'$ par la règle du quotient, puis applique $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$ sur chacun des deux intervalles. Pour le signe, compare $(x+1)(x-2)$ au quotient $u(x)$.

CORRIGÉ

**Dérivée de $u$.** Sur chaque intervalle de $D_f$, $u$ est dérivable. D'après la dérivée d'un quotient, pour tout $x \in D_f$ :

$$\begin{aligned} u'(x) &= \frac{(x+1)-(x-2)}{(x+1)^2} \\ &= \frac{3}{(x+1)^2}. \end{aligned}$$

**Dérivée de $f$.** La règle $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$ s'applique, car $u > 0$ sur chaque intervalle de $D_f$. Pour tout $x \in D_f$ :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3}{(x+1)^2} \times \frac{x+1}{x-2} \\ &= \frac{3}{(x+1)(x-2)}. \end{aligned}$$

**Signe.** Pour tout $x \in D_f$, $(x+1)(x-2) = (x+1)^2 \times u(x) > 0$, donc $f'(x) > 0$. Ainsi $f$ est strictement croissante sur $]-\infty, -1[$ et sur $]2, +\infty[$.

**Tableau de variations.**

| $x$ | $]-\infty, -1[$ | $]2, +\infty[$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $+$ |
| $f$ | croissante, de $0$ à $+\infty$ | croissante, de $-\infty$ à $0$ |

**Attention.** $f$ n'est pas croissante « sur $D_f$ » : $D_f$ n'est pas un intervalle. Par exemple, $f(-2) = \ln 4 > 0$ alors que $f(5) = \ln\left(\dfrac{1}{2}\right) < 0$.

### 4.

Calcule $\dfrac{x-2}{x+1}-1$, puis déduis-en le signe de $f(x)$ sur chacun des intervalles de $D_f$.

INDICE

$\ln X > 0$ si et seulement si $X > 1$, pour $X > 0$.

CORRIGÉ

**Calcul.** Pour tout réel $x \neq -1$ :

$$\begin{aligned}\frac{x-2}{x+1}-1 &= \frac{x-2-(x+1)}{x+1}\\ &= \frac{-3}{x+1}.\end{aligned}$$

**Signe de $f(x)$.** Pour $X>0$, $\ln X > 0$ si et seulement si $X > 1$.

- Sur $]-\infty,-1[$ : $x+1<0$, donc $u(x)-1>0$, soit $u(x)>1$ et $f(x)>0$.
- Sur $]2,+\infty[$ : $x+1>0$, donc $u(x)-1<0$, soit $0<u(x)<1$ et $f(x)<0$.

**Conclusion.** $f(x)>0$ sur $]-\infty,-1[$ et $f(x)<0$ sur $]2,+\infty[$. La courbe $(\mathcal{C})$ est au-dessus de l'axe des abscisses sur le premier intervalle, en dessous sur le second ; elle ne le coupe jamais.

### Exercice 5

## Une fonction auxiliaire pour le signe de f′

Soit $g$ la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$g(x) = x^3 - 1 + \ln x.$$

Soit $f$ la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$f(x) = x^2 + 1 - \frac{2\ln x}{x}.$$

**1.**

Étudie le sens de variation de $g$, calcule $g(1)$ et déduis-en le signe de $g(x)$ sur $]0,+\infty[$.

INDICE

Dérive terme à terme. Pour $x > 0$, quel est le signe de chaque terme obtenu ? Pense ensuite à ce que fait une fonction strictement croissante de part et d'autre d'un point où elle s'annule.

CORRIGÉ

**Variations.** La fonction $g$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et, pour tout $x > 0$ :

$$g'(x) = 3x^2 + \frac{1}{x} > 0.$$

Donc $g$ est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

**Valeur en $1$.** $g(1) = 1 - 1 + \ln 1 = 0$.

**Signe.** Comme $g$ est strictement croissante : si $0 < x < 1$, $g(x) < g(1) = 0$ ; si $x > 1$, $g(x) > g(1) = 0$.

**Conclusion.** $g(x) < 0$ sur $]0,1[$, $g(1) = 0$ et $g(x) > 0$ sur $]1,+\infty[$.

### 2.

Montre que, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{2g(x)}{x^2}$.

INDICE

Dérive $\dfrac{\ln x}{x}$ avec la règle du quotient $\left(\dfrac{v}{w}\right)' = \dfrac{v'w - vw'}{w^2}$, puis réduis au même dénominateur.

CORRIGÉ

**Dérivée de $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$.** Règle du quotient avec $v(x) = \ln x$ et $w(x) = x$. Pour tout $x > 0$ :

$$\begin{aligned}\left(\frac{\ln x}{x}\right)' &= \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x \times 1}{x^2} \\ &= \frac{1 - \ln x}{x^2}.\end{aligned}$$

**Dérivée de $f$.** Pour tout $x > 0$ :

$$\begin{aligned}f'(x) &= 2x - \frac{2(1 - \ln x)}{x^2} \\ &= \frac{2x^3 - 2 + 2\ln x}{x^2} \\ &= \frac{2g(x)}{x^2}.\end{aligned}$$

**Conclusion.** Pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{2g(x)}{x^2}$.

### 3.

Calcule $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

INDICE

En $0^+$, écris $-\dfrac{2\ln x}{x} = (-2\ln x) \times \dfrac{1}{x}$ : ce n'est pas une forme indéterminée. En $+\infty$, une limite de référence suffit.

CORRIGÉ

**En $0^+$.** On écrit $-\dfrac{2\ln x}{x} = (-2\ln x) \times \dfrac{1}{x}$. Les deux facteurs tendent vers $+\infty$, donc ce produit tend vers $+\infty$. Comme $x^2 + 1$ tend vers $1$ :

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty.$$

**En $+\infty$. Limite de référence** : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$. Et $x^2 + 1$ tend vers $+\infty$. Donc :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

### 4.

Dresse le tableau de variations de $f$. Déduis-en que, pour tout réel $x > 0$, $2\ln x \leq x^3 - x$.

INDICE

Le minimum de $f$ donne une inégalité $f(x) \geq m$. Multiplie-la par un nombre dont tu connais le signe.

CORRIGÉ

**Variations.** Pour $x > 0$, $x^2 > 0$, donc $f'(x)$ a le signe de $g(x)$. D'après 1., $f$ est strictement décroissante sur $]0, 1]$ et strictement croissante sur $[1, +\infty[$, avec $f(1) = 1 + 1 - 0 = 2$.

| $x$ | $]0, 1[$ | $1$ | $]1, +\infty[$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f$ | décroissante, de $+\infty$ à $2$ | $2$ | croissante, de $2$ à $+\infty$ |

**Inégalité.** Le minimum de $f$ sur $]0, +\infty[$ est $2$. Pour tout $x > 0$, $f(x) \geq 2$, c'est-à-dire :

$$x^2 - 1 \geq \frac{2\ln x}{x}.$$

On multiplie par $x > 0$, ce qui conserve le sens de l'inégalité.

**Conclusion.** Pour tout réel $x > 0$, $x^3 - x \geq 2\ln x$.

### Exercice 6

## Logarithmes de base 2 et de base 10

On note $\log$ le logarithme décimal et $\log_2$ le logarithme de base $2$.

On donne $\ln 2 \approx 0{,}693$, $\ln 10 \approx 2{,}303$ et $\log 2 \approx 0{,}301$.

**1.**

Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $\log_2 x + \log_2(x-2) = 3$.

INDICE

Domaine d'abord. Le logarithme de base $2$ a les mêmes propriétés que $\ln$ ; et $3 = \log_2 8$.

CORRIGÉ

**Domaine.** Il faut $x > 0$ et $x - 2 > 0$, donc $D = ]2, +\infty[$.

**Regroupement.** Soit $x \in D$. Les deux arguments sont strictement positifs, donc $\log_2 x + \log_2(x-2) = \log_2\left(x(x-2)\right)$.

**Résolution sur $D$.** On a $3 = \log_2\left(2^3\right) = \log_2 8$, et $\log_2$ est strictement croissante car $\ln 2 > 0$. L'équation équivaut donc à $x(x-2) = 8$ :

$$\begin{aligned} & x(x-2) = 8 \\ \iff\ & x^2 - 2x - 8 = 0 \\ \iff\ & (x-4)(x+2) = 0. \end{aligned}$$

**Tri.** $4 \in D$, mais $-2 \notin D$.

**Conclusion.** L'ensemble des solutions est $S = \{4\}$.

### 2.

Détermine le plus petit entier naturel $n$ tel que $2^n > 10^6$.

INDICE

Les deux membres sont strictement positifs : applique $\ln$, qui conserve l'ordre, puis isole $n$ en divisant par un nombre positif.

CORRIGÉ

**Passage au logarithme.** Comme $\ln$ est strictement croissante et que chaque membre est strictement positif, on peut appliquer $\ln$. On divise ensuite par $\ln 2 > 0$ :

$$\begin{aligned} & 2^n > 10^6 \\ \iff\ & n \ln 2 > 6 \ln 10 \\ \iff\ & n > \frac{6 \ln 10}{\ln 2}. \end{aligned}$$

**Valeur approchée.**

$$\begin{aligned} \frac{6 \ln 10}{\ln 2} &\approx \frac{13{,}818}{0{,}693} \\ &\approx 19{,}9. \end{aligned}$$

**Conclusion.** Le plus petit entier naturel cherché est $n = 20$.

Contrôle : $2^{19} = 524\,288 < 10^6$ et $2^{20} = 1\,048\,576 > 10^6$.

### 3.

Combien de chiffres l'écriture décimale de $2^{50}$ comporte-t-elle ?

INDICE

Un entier $N$ s'écrit avec $k$ chiffres exactement quand $10^{k-1} \leq N < 10^k$, c'est-à-dire quand $k - 1 \leq \log N < k$.

CORRIGÉ

**Le logarithme.** $\log\left(2^{50}\right) = 50 \log 2 \approx 50 \times 0{,}301 = 15{,}05$. Cette valeur est approchée : vérifions que l'erreur ne peut pas faire franchir $15$ ou $16$.

**L'encadrement, sans approximation.** On a $2^{10} = 1024$, donc $10^3 < 2^{10} < 1{,}1 \times 10^3$. On élève à la puissance $5$ ces nombres positifs :

$$10^{15} < 2^{50} < 1{,}1^5 \times 10^{15}.$$

Or $1{,}1^5 = 1{,}610\,51 < 10$, donc $10^{15} < 2^{50} < 10^{16}$.

**Lien avec le logarithme.** Par stricte croissance de $\log$, $15 < \log\left(2^{50}\right) < 16$ : on retrouve $\log\left(2^{50}\right) \approx 15{,}05$.

**Conclusion.** L'écriture décimale de $2^{50}$ comporte $16$ chiffres.

### Exercice 7

## Une solution qu'on encadre sans la calculer

Soit $f$ la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=(x-4)\ln x$, et $h$ la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$h(x)=x\ln x+x-4.$$

On donne $\ln 2\approx 0{,}69$ et $\ln 2{,}5\approx 0{,}92$.

**1.**

Montre que, pour tout $x>0$, $f'(x)=\dfrac{h(x)}{x}$.

INDICE

Règle du produit, puis mise au même dénominateur.

CORRIGÉ

La fonction $f$ est le produit des fonctions $x\mapsto x-4$ et $\ln$, dérivables sur $]0,+\infty[$. D'après la règle du produit, pour tout $x>0$ :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1\times\ln x+(x-4)\times\frac{1}{x}\\ &= \frac{x\ln x+x-4}{x}\\ &= \frac{h(x)}{x}. \end{aligned}$$

**Conclusion.** Pour tout $x>0$, $f'(x)=\dfrac{h(x)}{x}$.

## 2.

Étudie les variations de $h$ sur $]0, +\infty[$ et calcule ses limites en $0^+$ et en $+\infty$.

INDICE

Dérive $x \ln x$ par la règle du produit. Ensuite, résous $h'(x) > 0$ avec le nombre $\mathrm{e}$. En $0^+$, utilise la limite de référence de $x \ln x$.

CORRIGÉ

**Dérivée.** Pour tout $x > 0$ :

$$\begin{aligned} h'(x) &= \ln x + x \times \frac{1}{x} + 1 \\ &= \ln x + 2. \end{aligned}$$

**Signe de $h'(x)$.** Par stricte croissance de $\ln$, $\ln x + 2 > 0$ si et seulement si $x > \mathrm{e}^{-2}$.

**Variations.** $h$ est strictement décroissante sur $\left]0, \mathrm{e}^{-2}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\mathrm{e}^{-2}, +\infty\right[$. Son minimum vaut :

$$\begin{aligned} h\left(\mathrm{e}^{-2}\right) &= -2\mathrm{e}^{-2} + \mathrm{e}^{-2} - 4 \\ &= -\mathrm{e}^{-2} - 4. \end{aligned}$$

**Limite en $0^+$. Limite de référence** : $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x = 0$, donc $\lim\limits_{x \to 0^+} h(x) = -4$.

**Limite en $+\infty$.** $x \ln x$ et $x - 4$ tendent vers $+\infty$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$.

### 3.

Montre que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution $\beta$ dans $]0, +\infty[$, et que $2 < \beta < 2{,}5$.

INDICE

Sur $\left]0, \mathrm{e}^{-2}\right]$, $h$ décroît à partir de valeurs proches de $-4$ : peut-elle s'annuler ? Sur $\left[\mathrm{e}^{-2}, +\infty\right[$, utilise le théorème des valeurs intermédiaires avec la stricte monotonie.

CORRIGÉ

**Sur $\left]0, \mathrm{e}^{-2}\right]$.** $h$ est strictement décroissante et sa limite en $0^+$ vaut $-4$. Donc, pour tout $x$ de cet intervalle, $h(x) < -4 < 0$ : pas de solution.

**Sur $\left[\mathrm{e}^{-2}, +\infty\right[$.** $h$ est continue et strictement croissante, avec $h\left(\mathrm{e}^{-2}\right) < 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$. L'image de cet intervalle est $\left[-\mathrm{e}^{-2} - 4, +\infty\right[$, qui contient $0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à une fonction strictement monotone, l'équation $h(x) = 0$ y admet **une unique** solution $\beta$.

**Encadrement.** Avec les valeurs données :

$$\begin{aligned} h(2) &= 2\ln 2 - 2 \\ &\approx 2 \times 0{,}69 - 2 \\ &= -0{,}62 < 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(2{,}5) &= 2{,}5\ln 2{,}5 - 1{,}5 \\ &\approx 2{,}5 \times 0{,}92 - 1{,}5 \\ &= 0{,}80 > 0. \end{aligned}$$

**Conclusion.** Comme $2$ et $2{,}5$ sont dans $\left[\mathrm{e}^{-2}, +\infty\right[$, l'unique solution $\beta$ de $h(x) = 0$ vérifie $2 < \beta < 2{,}5$.

### 4.

Déduis-en le signe de $h(x)$, puis le tableau de variations de $f$.

INDICE

Le signe de $f'(x)$ est celui de $h(x)$, car $x > 0$. Pour compléter le tableau, cherche aussi les limites de $f$ aux bornes : aucune n'est une forme indéterminée.

CORRIGÉ

**Signe de $h$.** D'après les questions 2 et 3 : $h(x) < 0$ sur $]0, \beta[$, $h(\beta) = 0$ et $h(x) > 0$ sur $]\beta, +\infty[$.

**Variations de $f$.** Pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{h(x)}{x}$ a le signe de $h(x)$. Donc $f$ est strictement décroissante sur $]0, \beta]$ et strictement croissante sur $[\beta, +\infty[$.

**Limites de $f$**, sans forme indéterminée :

- en $0^+$, $x - 4$ tend vers $-4$ et $\ln x$ vers $-\infty$, donc $f(x)$ tend vers $+\infty$ ;
- en $+\infty$, $x - 4$ et $\ln x$ tendent vers $+\infty$, donc $f(x)$ tend vers $+\infty$.

**Tableau de variations.**

| $x$ | $]0, \beta[$ | $\beta$ | $]\beta, +\infty[$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f$ | décroissante, de $+\infty$ à $f(\beta)$ | $f(\beta)$ | croissante, de $f(\beta)$ à $+\infty$ |