BURHAN

Fonctions logarithmiques : exercices, application

2ème Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-experimentales/mathematiques/fonctions-logarithmiques/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Fonctions logarithmiques	Application	9

Exercice 1

Où ces logarithmes existent-ils ?

Pour chacune des fonctions suivantes, détermine son ensemble de définition.

Donne-le sous la forme d'un intervalle ou d'une réunion d'intervalles.

1.

$f(x) = \ln(4 - x)$

INDICE

Le logarithme d'un nombre n'existe que si ce nombre est **strictement** positif. Écris cette condition sur l'argument, puis résous-la.

2.

$g(x) = \ln\left(x^2 - 9\right)$

INDICE

Factorise $x^2 - 9$ et cherche son signe : un trinôme est du signe de son coefficient dominant à l'extérieur de ses racines.

3.

$h(x) = \ln\left(\dfrac{x - 2}{x + 3}\right)$

INDICE

Le quotient doit d'abord exister ($x \neq -3$), puis être strictement positif. Un tableau de signes, avec une ligne pour le numérateur et une pour le dénominateur, fait le travail.

4.

$k(x) = \dfrac{3}{\ln(x + 3)}$

INDICE

Deux conditions cette fois : le logarithme doit exister, et le dénominateur ne doit pas être nul. Pour quel nombre $a > 0$ a-t-on $\ln a = 0$?

Exercice 2

Trois équations, le domaine en premier

Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes.

Avant tout calcul, écris l'ensemble des réels pour lesquels tous les logarithmes de l'équation existent.

1.

$\ln(2x-3) = \ln(x+5)$

INDICE

Écris les deux conditions d'existence et prends leur intersection. Sur ce domaine, deux logarithmes sont égaux exactement quand leurs arguments le sont.

2.

$\ln(x+2) + \ln(x+5) = \ln 10$

INDICE

Sur le domaine, les deux arguments sont strictement positifs : tu as alors le droit d'écrire la somme comme le logarithme d'un produit. N'oublie pas de trier les solutions à la fin.

3.

$\ln(5-x) = 2$

INDICE

Écris le nombre 2 comme le logarithme d'un nombre : lequel a pour logarithme 2 ?

Exercice 3

Inéquations : la croissance de ln au travail

Résous dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

Écris chaque ensemble de solutions sous forme d'intervalle.

1.

$\ln(3-2x) \leq 0$

INDICE

Le nombre 0 est le logarithme de 1. Une fonction strictement croissante conserve le sens des inégalités.

2.

$\ln(x+4) > \ln(2x-1)$

INDICE

Le domaine réunit les deux conditions d'existence. Ensuite, compare directement les arguments.

3.

$\ln(x+3) < 1$

INDICE

Quel nombre a pour logarithme 1 ? Pense au nombre e.

Exercice 4

Décomposer, simplifier, corriger

Les questions 1 et 2 portent sur des nombres ; les questions 3 et 4 sur des expressions qui dépendent de x.

1.

Exprime en fonction de $\ln 2$ et de $\ln 3$ les nombres suivants :

- $A = \ln 72$;
- $B = \ln\left(\dfrac{16}{27}\right)$;
- $C = \ln\sqrt{18}$;
- $D = \ln\left(\dfrac{1}{24}\right)$.

INDICE

Décompose chaque entier en produit de puissances de 2 et de 3, par exemple $72 = 2^3 \times 3^2$. Tous ces nombres sont strictement positifs : les propriétés s'appliquent.

2.

Calcule :

$$E = \ln\left(\mathrm{e}^3\right) - 2\ln\sqrt{\mathrm{e}} + \ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right).$$

INDICE

Écris $\sqrt{\mathrm{e}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$ et $\dfrac{1}{\mathrm{e}} = \mathrm{e}^{-1}$, puis utilise $\ln\left(\mathrm{e}^r\right) = r$ pour r rationnel.

3.

Un élève écrit, pour tout réel $x \neq 0$: « $\ln\left(x^2\right) = 2\ln x$ ». Pour $x = -4$, calcule chacun des deux membres s'il existe, puis écris l'égalité correcte.

INDICE

Le nombre -4 est-il dans le domaine de $\ln$? Pense à la valeur absolue : $x^2 = |x|^2$.

4.

Montre que, pour tout réel $x > 2$:

$$\ln\left(x^2 - 4\right) - \ln(x-2) = \ln(x+2).$$

INDICE

Factorise $x^2 - 4$. Avant d'écrire le logarithme d'un produit comme une somme, vérifie que chaque facteur est strictement positif pour $x > 2$.

Exercice 5

Cinq limites, cinq limites de référence

Calcule chacune des limites suivantes.

À chaque fois, indique s'il y a une forme indéterminée et nomme la limite de référence que tu utilises.

1.

$$\lim_{x \to +\infty} (2x - 5\ln x)$$

INDICE

C'est une forme « $+\infty - \infty$ ». Mets x en facteur pour faire apparaître $\dfrac{\ln x}{x}$.

2.

$$\lim_{x \to 0^+} \left(x^2 \ln x + 3\right)$$

INDICE

Une des limites de référence en 0^+ fait intervenir le produit d'une puissance de x par $\ln x$.

3.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x + 3\ln x}{x}$$

INDICE

Sépare la fraction en deux.

4.

$$\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x} + \ln x\right)$$

INDICE

En 0^+, $\dfrac{1}{x}$ tend vers $+\infty$ et $\ln x$ vers $-\infty$: forme indéterminée. Réduis au même dénominateur.

5.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + 3x)}{x}$$

INDICE

Pose $X = 3x$ et pense à la limite de $\dfrac{\ln(1+X)}{X}$ quand X tend vers 0.

Exercice 6

Dériver un logarithme composé

Pour chaque fonction, vérifie d'abord l'hypothèse sur l'intervalle indiqué, puis calcule sa dérivée en nommant la règle utilisée.

1.

$f(x) = \ln\left(x^2 + 2x + 2\right)$, sur $\mathbb{R}$.

Montre que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, calcule $f'(x)$ et déduis-en le sens de variation de f.

INDICE

Écris $x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1$: son signe devient évident.

2.

$g(x) = \ln(6 - 2x)$, sur $]-\infty, 3[$.

INDICE

La dérivée de l'argument se place au numérateur ; ici, elle est négative.

3.

$h(x) = x\ln(x+3)$, sur $]-3, +\infty[$.

INDICE

C'est d'abord un **produit** : applique $(vw)' = v'w + vw'$, puis la règle de $\ln(u)$ pour le second facteur.

4.

$k(x) = \ln|x - 5|$, sur chacun des intervalles $]-\infty, 5[$ et $]5, +\infty[$.

INDICE

La règle de $\ln|u|$ demande seulement que u ne s'annule pas sur l'intervalle. Tu peux contrôler sur $]-\infty, 5[$ en écrivant $|x-5| = 5 - x$.

Exercice 7

Reconnaître u′/u

Dans chaque cas, détermine une primitive de la fonction donnée sur l'intervalle indiqué.

1.

$f(x) = \dfrac{2x+4}{x^2+4x+7}$, sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Dérive le dénominateur : que remarques-tu ?

2.

$g(x) = \dfrac{3x}{x^2+6}$, sur $\mathbb{R}$.

INDICE

La dérivée de x^2+6 est $2x$, pas $3x$: fais apparaître $2x$ en multipliant et en divisant par une constante.

3.

$h(x) = \dfrac{1}{2x-6}$, sur $]-\infty, 3[$.

INDICE

Sur cet intervalle, quel est le signe de $2x-6$? La primitive s'écrit avec $\ln|u|$; enlève ensuite la valeur absolue correctement.

4.

$k(x) = \dfrac{2}{x\ln x}$, sur $]0, 1[$.

INDICE

Écris $k(x) = 2 \times \dfrac{\frac{1}{x}}{\ln x}$ et choisis bien la fonction u. Quel est le signe de $\ln x$ sur $]0,1[$?

5.

Détermine la primitive de la fonction f de la question 1 sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en -2.

INDICE

Toutes les primitives de f sur $\mathbb{R}$ s'écrivent $F(x)+c$ avec c réel. Traduis la condition par une équation en c.

Exercice 8

Le logarithme décimal et ses cousins

On note $\log$ le logarithme décimal, et $\log_a$ le logarithme de base a, pour $a > 0$ et $a \neq 1$.

Pour tout réel $x > 0$:

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

1.

Calcule, sans calculatrice : $\log 10\,000$, $\log 0{,}000\,01$, $\log \sqrt{10}$, $\log_2 32$ et $\log_3 \left(\frac{1}{9}\right)$.

INDICE

Écris chaque nombre comme une puissance de la base, puis utilise $\log_a (a^r) = r$.

2.

Résous les équations : a) $\log x = -2$; b) $\log(x - 4) = 1$.

INDICE

Domaine d'abord. Ensuite, pour $y > 0$ et r rationnel, $\log y = r$ équivaut à $y = 10^r$.

3.

Résous l'inéquation $\log x < 3$.

INDICE

$\log = \dfrac{\ln}{\ln 10}$ avec $\ln 10 > 0$: quel est le sens de variation de $\log$?

4.

On donne $\log 2 \approx 0{,}301$ et $\log 3 \approx 0{,}477$. Donne une valeur approchée de $\log 600$.

INDICE

Décompose 600 en un produit qui fait apparaître 2, 3 et une puissance de 10.

5.

Montre que, pour tout réel $x > 0$, $\log_4 x = \dfrac{1}{2}\log_2 x$.

INDICE

Reviens à la définition et écris $\ln 4$ à l'aide de $\ln 2$.

Exercice 9

Le signe d'un produit qui contient ln

On considère la fonction q définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$q(x) = (3 - x)(\ln x + 1).$$

1.

Résous dans $]0, +\infty[$ l'équation $\ln x + 1 = 0$, puis l'inéquation $\ln x + 1 > 0$.

INDICE

Écris -1 comme le logarithme d'une puissance de e.

2.

Dresse le tableau de signes de $q(x)$ sur $]0, +\infty[$.

INDICE

Une ligne par facteur. Range les deux valeurs qui annulent un facteur dans l'ordre : e^{-1} est plus petit que 3.

3.

Déduis-en l'ensemble des solutions de l'inéquation $q(x) \geq 0$.

INDICE

Lis le tableau, sans oublier les valeurs où q s'annule.