BURHAN

Fonctions logarithmiques : exercices, application

2ème Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-experimentales/mathematiques/fonctions-logarithmiques/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Fonctions logarithmiques	Application	9

Exercice 1

Où ces logarithmes existent-ils ?

Pour chacune des fonctions suivantes, détermine son ensemble de définition.

Donne-le sous la forme d'un intervalle ou d'une réunion d'intervalles.

1.

$f(x) = \ln(4 - x)$

INDICE

Le logarithme d'un nombre n'existe que si ce nombre est **strictement** positif. Écris cette condition sur l'argument, puis résous-la.

CORRIGÉ

Soit x un réel. Le nombre $f(x)$ existe si et seulement si l'argument du logarithme est strictement positif :

$$4 - x > 0 \iff x < 4.$$

Conclusion. L'ensemble de définition de f est $D_f =]-\infty, 4[$.

2.

$g(x) = \ln\left(x^2 - 9\right)$

INDICE

Factorise $x^2 - 9$ et cherche son signe : un trinôme est du signe de son coefficient dominant à l'extérieur de ses racines.

CORRIGÉ

Condition d'existence. Le nombre $g(x)$ existe si et seulement si $x^2 - 9 > 0$.

Signe du trinôme. On a $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$: c'est un trinôme de racines -3 et 3, de coefficient dominant $1 > 0$. Il est donc strictement positif à l'extérieur de ses racines.

x	$]-\infty, -3[$	$]-3, 3[$	$]3, +\infty[$
$x^2 - 9$	$+$	$-$	$+$

Conclusion. L'ensemble de définition de g est :

$$D_g =]-\infty, -3[\cup]3, +\infty[.$$

Attention. Un réel négatif peut appartenir au domaine. Pour $x = -5$, on a $x^2 - 9 = 16 > 0$, et $g(-5) = \ln 16$ existe.

3.

$$h(x) = \ln\left(\frac{x-2}{x+3}\right)$$

INDICE

Le quotient doit d'abord exister ($x \neq -3$), puis être strictement positif. Un tableau de signes, avec une ligne pour le numérateur et une pour le dénominateur, fait le travail.

CORRIGÉ

Conditions d'existence. Le nombre $h(x)$ existe si et seulement si $x \neq -3$ et :

$$\frac{x-2}{x+3} > 0.$$

Signe du quotient.

x	$]-\infty, -3[$	$]-3, 2[$	$]2, +\infty[$
$x-2$	$-$	$-$	$+$
$x+3$	$-$	$+$	$+$
quotient	$+$	$-$	$+$

Valeurs exclues. En $x = 2$, le quotient vaut 0 : il n'est pas strictement positif, donc 2 est exclu. En $x = -3$, le quotient n'existe pas.

Conclusion. L'ensemble de définition de h est :

$$D_h =]-\infty, -3[\cup]2, +\infty[\,.$$

4.

$$k(x) = \frac{3}{\ln(x+3)}$$

INDICE

Deux conditions cette fois : le logarithme doit exister, et le dénominateur ne doit pas être nul. Pour quel nombre $a > 0$ a-t-on $\ln a = 0$?

CORRIGÉ

Le nombre $k(x)$ existe si et seulement si $\ln(x+3)$ existe et est non nul.

Existence du logarithme. $x + 3 > 0 \iff x > -3$.

Dénominateur non nul. Comme $\ln$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ et que $\ln 1 = 0$, pour tout réel $a > 0$, on a $\ln a = 0$ si et seulement si $a = 1$. Pour $x > -3$:

$$\begin{aligned} & \ln(x+3) = 0 \\ \iff\ & x + 3 = 1 \\ \iff\ & x = -2. \end{aligned}$$

Conclusion. On retire -2 de $]-3, +\infty[$: l'ensemble de définition de k est $D_k =]-3, -2[\cup]-2, +\infty[$.

Exercice 2

Trois équations, le domaine en premier

Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes.

Avant tout calcul, écris l'ensemble des réels pour lesquels tous les logarithmes de l'équation existent.

1.

$\ln(2x-3) = \ln(x+5)$

INDICE

Écris les deux conditions d'existence et prends leur intersection. Sur ce domaine, deux logarithmes sont égaux exactement quand leurs arguments le sont.

CORRIGÉ

Domaine. On a $2x-3>0 \iff x>\dfrac{3}{2}$, et $x+5>0 \iff x>-5$. Les deux conditions ensemble donnent :

$$D=\left]\frac{3}{2},+\infty\right[.$$

Résolution sur D. Soit $x\in D$. Les deux arguments sont strictement positifs et $\ln$ est strictement croissante sur $]0,+\infty[$, donc :

$$\begin{aligned} & \ln(2x-3)=\ln(x+5) \\ \iff\ & 2x-3=x+5 \\ \iff\ & x=8. \end{aligned}$$

Tri. $8>\dfrac{3}{2}$, donc $8\in D$.

Conclusion. L'équation a pour ensemble de solutions $S=\{8\}$.

Contrôle : $2\times 8-3=13$ et $8+5=13$.

2.

$\ln(x+2)+\ln(x+5)=\ln 10$

INDICE

Sur le domaine, les deux arguments sont strictement positifs : tu as alors le droit d'écrire la somme comme le logarithme d'un produit. N'oublie pas de trier les solutions à la fin.

CORRIGÉ

Domaine. Il faut $x+2>0$ et $x+5>0$, soit $x>-2$. Donc $D=]-2,+\infty[$.

Regroupement. Soit $x\in D$. Les nombres $x+2$ et $x+5$ sont strictement positifs ; d'après le logarithme d'un produit :

$$\begin{aligned}&\ln(x+2)+\ln(x+5)\\&=\ln\left((x+2)(x+5)\right).\end{aligned}$$

Résolution sur D. Comme $\ln$ est strictement croissante, l'équation équivaut à $(x+2)(x+5)=10$. Or :

$$\begin{aligned}&(x+2)(x+5)=10\\\iff\ &x^2+7x+10=10\\\iff\ &x(x+7)=0.\end{aligned}$$

Ce produit est nul pour $x=0$ ou $x=-7$.

Tri. $0\in D$, mais $-7\notin D$: pour $x=-7$, $\ln(x+2)=\ln(-5)$ n'existe pas.

Conclusion. L'équation a pour ensemble de solutions $S=\{0\}$.

Contrôle : $\ln 2+\ln 5=\ln 10$.

3.

$\ln(5-x)=2$

INDICE

Écris le nombre 2 comme le logarithme d'un nombre : lequel a pour logarithme 2 ?

CORRIGÉ

Domaine. $5-x>0\iff x<5$, donc $D=]-\infty,5[$.

Résolution sur D. Comme $\ln\left(\mathrm{e}^2\right)=2$, l'équation s'écrit $\ln(5-x)=\ln\left(\mathrm{e}^2\right)$. La fonction $\ln$ étant strictement croissante :

$$\begin{aligned}&5-x=\mathrm{e}^2\\\iff\ &x=5-\mathrm{e}^2.\end{aligned}$$

Tri. $\mathrm{e}^2>0$, donc $5-\mathrm{e}^2<5$: la solution appartient à D.

Conclusion. L'équation a pour ensemble de solutions $S=\left\{5-\mathrm{e}^2\right\}$, avec $5-\mathrm{e}^2\approx -2{,}39$.

Exercice 3

Inéquations : la croissance de ln au travail

Résous dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

Écris chaque ensemble de solutions sous forme d'intervalle.

1.

$\ln(3-2x) \leq 0$

INDICE

Le nombre 0 est le logarithme de 1. Une fonction strictement croissante conserve le sens des inégalités.

CORRIGÉ

Domaine. $3-2x>0 \iff x<\dfrac{3}{2}$.

Résolution. Soit $x<\dfrac{3}{2}$. Comme $0=\ln 1$ et que $\ln$ est strictement croissante sur $]0,+\infty[$:

$$\begin{aligned} & \ln(3-2x) \leq \ln 1 \\ \iff\ & 3-2x \leq 1 \\ \iff\ & x \geq 1. \end{aligned}$$

Conclusion. On garde les réels qui vérifient $x \geq 1$ **et** $x<\dfrac{3}{2}$: l'ensemble des solutions est $S=\left[1,\dfrac{3}{2}\right[$.

2.

$\ln(x+4) > \ln(2x-1)$

INDICE

Le domaine réunit les deux conditions d'existence. Ensuite, compare directement les arguments.

CORRIGÉ

Domaine. On a $x+4>0 \iff x>-4$, et $2x-1>0 \iff x>\dfrac{1}{2}$. Donc :

$$D=\left]\frac{1}{2},+\infty\right[.$$

Résolution sur D. Soit $x \in D$. Les deux arguments sont strictement positifs et $\ln$ est strictement croissante :

$$\begin{aligned} & \ln(x+4) > \ln(2x-1) \\ \iff\ & x+4 > 2x-1 \\ \iff\ & x<5. \end{aligned}$$

Conclusion. On garde les réels de D inférieurs à 5 : l'ensemble des solutions est $S=\left]\dfrac{1}{2},5\right[$.

3.

$\ln(x+3) < 1$

INDICE

Quel nombre a pour logarithme 1 ? Pense au nombre e.

CORRIGÉ

Domaine. $x+3>0 \iff x>-3$.

Résolution. Soit $x>-3$. Comme $1=\ln \mathrm{e}$ et que $\ln$ est strictement croissante :

$$\begin{aligned} & \ln(x+3)<\ln \mathrm{e} \\ \iff & x+3<\mathrm{e} \\ \iff & x<\mathrm{e}-3. \end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble des solutions est $S=]-3, \mathrm{e}-3[$, avec $\mathrm{e}-3 \approx -0{,}28$.

Exercice 4

Décomposer, simplifier, corriger

Les questions 1 et 2 portent sur des nombres ; les questions 3 et 4 sur des expressions qui dépendent de x.

1.

Exprime en fonction de $\ln 2$ et de $\ln 3$ les nombres suivants :

- $A = \ln 72$;
- $B = \ln\left(\dfrac{16}{27}\right)$;
- $C = \ln\sqrt{18}$;
- $D = \ln\left(\dfrac{1}{24}\right)$.

INDICE

Décompose chaque entier en produit de puissances de 2 et de 3, par exemple $72 = 2^3 \times 3^2$. Tous ces nombres sont strictement positifs : les propriétés s'appliquent.

CORRIGÉ

Tous les nombres manipulés sont strictement positifs : on utilise le logarithme d'un produit, d'un quotient, d'une puissance et d'une racine carrée.

- $72 = 2^3 \times 3^2$, donc $A = 3\ln 2 + 2\ln 3$.
- $\dfrac{16}{27} = \dfrac{2^4}{3^3}$, donc $B = 4\ln 2 - 3\ln 3$.
- $18 = 2 \times 3^2$ et $\ln\sqrt{18} = \dfrac{1}{2}\ln 18$, donc $C = \dfrac{1}{2}\ln 2 + \ln 3$.
- $24 = 2^3 \times 3$, donc $D = -\ln 24 = -3\ln 2 - \ln 3$.

Détail pour C.

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{2}\left(\ln 2 + 2\ln 3\right) \\ &= \frac{1}{2}\ln 2 + \ln 3. \end{aligned}$$

2.

Calcule :

$$E = \ln\left(\mathrm{e}^3\right) - 2\ln\sqrt{\mathrm{e}} + \ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right).$$

INDICE

Écris $\sqrt{\mathrm{e}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$ et $\dfrac{1}{\mathrm{e}} = \mathrm{e}^{-1}$, puis utilise $\ln\left(\mathrm{e}^r\right) = r$ pour r rationnel.

CORRIGÉ

Pour tout rationnel r, $\ln\left(\mathrm{e}^r\right) = r$. Avec $\sqrt{\mathrm{e}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$ et $\dfrac{1}{\mathrm{e}} = \mathrm{e}^{-1}$:

$$\begin{aligned} E &= 3 - 2 \times \frac{1}{2} + (-1) \\ &= 3 - 1 - 1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Conclusion. $E = 1$.

3.

Un élève écrit, pour tout réel $x \neq 0$: « $\ln\left(x^2\right) = 2\ln x$ ». Pour $x = -4$, calcule chacun des deux membres s'il existe, puis écris l'égalité correcte.

INDICE

Le nombre -4 est-il dans le domaine de $\ln$? Pense à la valeur absolue : $x^2 = |x|^2$.

CORRIGÉ

Pour $x = -4$. Le membre de gauche vaut $\ln 16$, qui existe : $\ln 16 \approx 2{,}77$. Le membre de droite, $2\ln(-4)$, **n'existe pas**, car $-4 < 0$. L'égalité de l'élève est donc fausse pour $x = -4$.

Égalité correcte. Soit $x \neq 0$. Alors $|x| > 0$ et $x^2 = |x|^2$; le logarithme d'une puissance s'applique donc à $|x|$:

$$\begin{aligned} \ln\left(x^2\right) &= \ln\left(|x|^2\right) \\ &= 2\ln|x|. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel $x \neq 0$, $\ln\left(x^2\right) = 2\ln|x|$.

Contrôle pour $x = -4$: $2\ln|-4| = 2\ln 4 = \ln 16$.

4.

Montre que, pour tout réel $x > 2$:

$$\ln\left(x^2 - 4\right) - \ln(x - 2) = \ln(x + 2).$$

INDICE

Factorise $x^2 - 4$. Avant d'écrire le logarithme d'un produit comme une somme, vérifie que chaque facteur est strictement positif pour $x > 2$.

CORRIGÉ

Positivité. Soit $x > 2$. Alors $x - 2 > 0$ et $x + 2 > 0$, donc $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2) > 0$: tous les logarithmes écrits existent.

Calcul. D'après le logarithme d'un produit de deux nombres strictement positifs :

$$\begin{aligned}\ln\left(x^2 - 4\right) - \ln(x - 2) &= \ln(x - 2) + \ln(x + 2) \\ &\quad - \ln(x - 2) \\ &= \ln(x + 2).\end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel $x > 2$, $\ln\left(x^2 - 4\right) - \ln(x - 2) = \ln(x + 2)$.

Exercice 5

Cinq limites, cinq limites de référence

Calcule chacune des limites suivantes.

À chaque fois, indique s'il y a une forme indéterminée et nomme la limite de référence que tu utilises.

1.

$$\lim_{x \to +\infty} (2x - 5\ln x)$$

INDICE

C'est une forme « $+\infty - \infty$ ». Mets x en facteur pour faire apparaître $\dfrac{\ln x}{x}$.

CORRIGÉ

Forme indéterminée. Quand x tend vers $+\infty$, $2x$ et $5\ln x$ tendent vers $+\infty$: c'est une forme « $+\infty - \infty$ ».

Factorisation. Pour tout réel $x > 0$:

$$\begin{aligned} &2x - 5\ln x \\ &= x\left(2 - 5 \times \frac{\ln x}{x}\right). \end{aligned}$$

Limite de référence. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$. La parenthèse tend donc vers 2, et x tend vers $+\infty$.

Conclusion. Par produit :

$$\lim_{x \to +\infty} (2x - 5\ln x) = +\infty.$$

2.

$$\lim_{x \to 0^+} \left(x^2 \ln x + 3\right)$$

INDICE

Une des limites de référence en 0^+ fait intervenir le produit d'une puissance de x par $\ln x$.

CORRIGÉ

Forme indéterminée. En 0^+, le produit $x^2 \ln x$ est de la forme « $0 \times (-\infty)$ ».

Limite de référence. Pour tout entier $n \geq 1$, $\lim\limits_{x \to 0^+} x^n \ln x = 0$; ici $n = 2$.

Conclusion. Par somme :

$$\lim_{x \to 0^+} \left(x^2 \ln x + 3\right) = 3.$$

3.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+3\ln x}{x}$$

INDICE

Sépare la fraction en deux.

CORRIGÉ

Forme indéterminée. Le numérateur et le dénominateur tendent vers $+\infty$: forme « $\frac{\infty}{\infty}$ ».

Écriture. Pour tout réel $x>0$:

$$\frac{x+3\ln x}{x} = 1+3\times\frac{\ln x}{x}.$$

Limite de référence. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$

Conclusion.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+3\ln x}{x} = 1.$$

4.

$$\lim_{x\to0^+} \left(\frac{1}{x}+\ln x\right)$$

INDICE

En 0^+, $\frac{1}{x}$ tend vers $+\infty$ et $\ln x$ vers $-\infty$: forme indéterminée. Réduis au même dénominateur.

CORRIGÉ

Forme indéterminée. En 0^+, $\frac{1}{x}$ tend vers $+\infty$ et $\ln x$ vers $-\infty$: forme « $+\infty-\infty$ ».

Même dénominateur. Pour tout réel $x>0$:

$$\frac{1}{x}+\ln x = \frac{1+x\ln x}{x}.$$

Limite de référence. $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln x = 0$, donc le numérateur tend vers 1. Le dénominateur tend vers 0 en restant strictement positif.

Conclusion. Par quotient :

$$\lim_{x\to0^+} \left(\frac{1}{x}+\ln x\right) = +\infty.$$

5.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+3x)}{x}$$

INDICE

Pose $X = 3x$ et pense à la limite de $\dfrac{\ln(1+X)}{X}$ quand X tend vers 0.

CORRIGÉ

Forme indéterminée. Le numérateur et le dénominateur tendent vers 0 : forme « $\dfrac{0}{0}$ ».

Changement de variable. Soit $x \neq 0$ tel que $1+3x > 0$. On pose $X = 3x$:

$$\frac{\ln(1+3x)}{x} = 3 \times \frac{\ln(1+X)}{X}.$$

Quand x tend vers 0, X tend vers 0.

Limite de référence. $\lim\limits_{X \to 0} \dfrac{\ln(1+X)}{X} = 1$.

Conclusion.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+3x)}{x} = 3.$$

Exercice 6

Dériver un logarithme composé

Pour chaque fonction, vérifie d'abord l'hypothèse sur l'intervalle indiqué, puis calcule sa dérivée en nommant la règle utilisée.

1.

$f(x) = \ln\left(x^2 + 2x + 2\right)$, sur $\mathbb{R}$.

Montre que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, calcule $f'(x)$ et déduis-en le sens de variation de f.

INDICE

Écris $x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1$: son signe devient évident.

CORRIGÉ

Hypothèse. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + 2 &= (x+1)^2 + 1 \\ &\geq 1 > 0. \end{aligned}$$

La fonction $u : x \mapsto x^2 + 2x + 2$ est donc dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$: $f = \ln u$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Dérivée. D'après la dérivée de $\ln u$, $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$, avec $u'(x) = 2x + 2$. Pour tout réel x :

$$f'(x) = \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 2}.$$

Sens de variation. Le dénominateur est strictement positif, donc $f'(x)$ a le signe de $2x + 2$: négatif pour $x < -1$, positif pour $x > -1$.

Conclusion. f est strictement décroissante sur $]-\infty, -1]$ et strictement croissante sur $[-1, +\infty[$. Son minimum est $f(-1) = \ln 1 = 0$.

2.

$g(x) = \ln(6 - 2x)$, sur $]-\infty, 3[$.

INDICE

La dérivée de l'argument se place au numérateur ; ici, elle est négative.

CORRIGÉ

Hypothèse. La fonction $u : x \mapsto 6 - 2x$ est dérivable sur $]-\infty, 3[$, avec $u'(x) = -2$. Pour $x < 3$, on a $6 - 2x > 0$.

Dérivée. D'après la dérivée de $\ln u$, $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$. Pour tout $x < 3$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{-2}{6 - 2x} \\ &= \frac{1}{x - 3}. \end{aligned}$$

Sens de variation. Pour $x < 3$, $x - 3 < 0$, donc $g'(x) < 0$: g est strictement décroissante sur $]-\infty, 3[$.

Attention. Écrire $g'(x) = \dfrac{1}{6 - 2x}$ serait faux : le facteur $u'(x) = -2$ manquerait.

3.

$h(x) = x \ln(x + 3)$, sur $]-3, +\infty[$.

INDICE

C'est d'abord un **produit** : applique $(vw)' = v'w + vw'$, puis la règle de $\ln(u)$ pour le second facteur.

CORRIGÉ

Hypothèse. Pour $x > -3$, $x + 3 > 0$. La fonction $x \mapsto \ln(x + 3)$ est donc dérivable sur $]-3, +\infty[$, de dérivée $x \mapsto \dfrac{1}{x + 3}$ (dérivée de $\ln u$ avec $u'(x) = 1$).

Règle du produit. h est le produit de $x \mapsto x$ et de $x \mapsto \ln(x + 3)$. Pour tout $x > -3$:

$$\begin{aligned} h'(x) &= 1 \times \ln(x + 3) \\ &\quad + x \times \frac{1}{x + 3} \\ &= \ln(x + 3) + \frac{x}{x + 3}. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout $x > -3$, $h'(x) = \ln(x + 3) + \dfrac{x}{x + 3}$.

4.

$k(x) = \ln|x-5|$, sur chacun des intervalles $]-\infty, 5[$ et $]5, +\infty[$.

INDICE

La règle de $\ln|u|$ demande seulement que u ne s'annule pas sur l'intervalle. Tu peux contrôler sur $]-\infty, 5[$ en écrivant $|x-5| = 5-x$.

CORRIGÉ

Hypothèse. La fonction $u : x \mapsto x-5$ est dérivable et ne s'annule pas sur chacun des deux intervalles.

Dérivée. D'après la dérivée de $\ln|u|$, $(\ln|u|)' = \dfrac{u'}{u}$. Pour tout réel $x \neq 5$:

$$k'(x) = \frac{1}{x-5}.$$

Contrôle sur $]-\infty, 5[$**.** Là, $|x-5| = 5-x$ et $k(x) = \ln(5-x)$. Sa dérivée est $\dfrac{-1}{5-x} = \dfrac{1}{x-5}$: même résultat.

Exercice 7

Reconnaître u′/u

Dans chaque cas, détermine une primitive de la fonction donnée sur l'intervalle indiqué.

1.

$f(x) = \dfrac{2x+4}{x^2+4x+7}$, sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Dérive le dénominateur : que remarques-tu ?

CORRIGÉ

Forme $\dfrac{u'}{u}$. Posons $u(x) = x^2+4x+7$ pour tout réel x. On a $u(x) = (x+2)^2 + 3 \geq 3 > 0$, u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = 2x+4$. Donc $f = \dfrac{u'}{u}$.

Primitive. Comme u est strictement positive, $\ln u$ est une primitive de $\dfrac{u'}{u}$ sur $\mathbb{R}$.

Conclusion. Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est la fonction F définie par :

$$F(x) = \ln\left(x^2+4x+7\right).$$

2.

$g(x) = \dfrac{3x}{x^2+6}$, sur $\mathbb{R}$.

INDICE

La dérivée de x^2+6 est $2x$, pas $3x$: fais apparaître $2x$ en multipliant et en divisant par une constante.

CORRIGÉ

Forme $\dfrac{u'}{u}$. Posons $u(x) = x^2+6$: u est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$, et $u'(x) = 2x$. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{3}{2} \times \frac{2x}{x^2+6} \\ &= \frac{3}{2} \times \frac{u'(x)}{u(x)}. \end{aligned}$$

Conclusion. Une primitive de g sur $\mathbb{R}$ est la fonction G définie par $G(x) = \dfrac{3}{2}\ln\left(x^2+6\right)$.

3.

$h(x) = \dfrac{1}{2x-6}$, sur $]-\infty, 3[$.

INDICE

Sur cet intervalle, quel est le signe de $2x-6$? La primitive s'écrit avec $\ln|u|$; enlève ensuite la valeur absolue correctement.

CORRIGÉ

Forme $\dfrac{u'}{u}$. Posons $u(x) = 2x-6$, avec $u'(x) = 2$. Donc $h = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{u'}{u}$.

Primitive. Sur $]-\infty, 3[$, u ne s'annule pas : une primitive de h est $x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln|2x-6|$.

Sans valeur absolue. Pour $x < 3$, $2x-6 < 0$, donc $|2x-6| = 6-2x$.

Conclusion. Une primitive de h sur $]-\infty, 3[$ est la fonction H définie par :

$$H(x) = \frac{1}{2}\ln(6-2x).$$

Contrôle. Pour tout $x < 3$:

$$\begin{aligned} H'(x) &= \frac{1}{2} \times \frac{-2}{6-2x} \\ &= \frac{1}{2x-6} = h(x). \end{aligned}$$

4.

$k(x) = \dfrac{2}{x\ln x}$, sur $]0, 1[$.

INDICE

Écris $k(x) = 2 \times \dfrac{\frac{1}{x}}{\ln x}$ et choisis bien la fonction u. Quel est le signe de $\ln x$ sur $]0, 1[$?

CORRIGÉ

Forme $\dfrac{u'}{u}$. Posons $u(x) = \ln x$: u est dérivable sur $]0, 1[$, $u'(x) = \dfrac{1}{x}$, et $k = 2 \times \dfrac{u'}{u}$.

Primitive. Sur $]0, 1[$, $\ln x < 0$: u ne s'annule pas, et une primitive de k est $x \mapsto 2\ln|\ln x|$.

Sans valeur absolue. Sur cet intervalle, $|\ln x| = -\ln x$.

Conclusion. Une primitive de k sur $]0, 1[$ est la fonction K définie par :

$$K(x) = 2\ln(-\ln x).$$

Contrôle. Pour tout $x \in]0, 1[$:

$$\begin{aligned} K'(x) &= 2 \times \frac{-\frac{1}{x}}{-\ln x} \\ &= \frac{2}{x\ln x} = k(x). \end{aligned}$$

5.

Détermine la primitive de la fonction f de la question 1 sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en -2.

INDICE

Toutes les primitives de f sur $\mathbb{R}$ s'écrivent $F(x)+c$ avec c réel. Traduis la condition par une équation en c.

CORRIGÉ

Toutes les primitives. Sur l'intervalle $\mathbb{R}$, les primitives de f sont les fonctions $x \mapsto \ln\left(x^2+4x+7\right)+c$, où c est un réel.

Condition en -2. On a $(-2)^2+4\times(-2)+7=3$, donc :

$$\begin{aligned} & \ln 3 + c = 0 \\ \iff\ & c = -\ln 3. \end{aligned}$$

Conclusion. La primitive cherchée est $x \mapsto \ln\left(x^2+4x+7\right)-\ln 3$, que l'on peut aussi écrire $x \mapsto \ln\left(\dfrac{x^2+4x+7}{3}\right)$.

Exercice 8

Le logarithme décimal et ses cousins

On note $\log$ le logarithme décimal, et $\log_a$ le logarithme de base a, pour $a > 0$ et $a \neq 1$.

Pour tout réel $x > 0$:

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

1.

Calcule, sans calculatrice : $\log 10\,000$, $\log 0{,}000\,01$, $\log \sqrt{10}$, $\log_2 32$ et $\log_3 \left(\frac{1}{9}\right)$.

INDICE

Écris chaque nombre comme une puissance de la base, puis utilise $\log_a (a^r) = r$.

CORRIGÉ

On écrit chaque nombre comme une puissance de la base, puis on utilise $\log_a (a^r) = r$ pour r rationnel :

- $10\,000 = 10^4$, donc $\log 10\,000 = 4$;
- $0{,}000\,01 = 10^{-5}$, donc $\log 0{,}000\,01 = -5$;
- $\sqrt{10} = 10^{\frac{1}{2}}$, donc $\log \sqrt{10} = \frac{1}{2}$;
- $32 = 2^5$, donc $\log_2 32 = 5$;
- $\frac{1}{9} = 3^{-2}$, donc $\log_3 \left(\frac{1}{9}\right) = -2$.

2.

Résous les équations : a) $\log x = -2$; b) $\log(x-4) = 1$.

INDICE

Domaine d'abord. Ensuite, pour $y > 0$ et r rationnel, $\log y = r$ équivaut à $y = 10^r$.

CORRIGÉ

a) Domaine. Il faut $x > 0$.

a) Résolution. Pour $x > 0$:

$$\begin{aligned} & \log x = -2 \\ \iff\ & x = 10^{-2} = 0{,}01. \end{aligned}$$

Ce nombre est strictement positif : $S = \{0{,}01\}$.

b) Domaine. $x - 4 > 0 \iff x > 4$.

b) Résolution. Pour $x > 4$:

$$\begin{aligned} & \log(x-4) = 1 \\ \iff\ & x - 4 = 10 \\ \iff\ & x = 14. \end{aligned}$$

Comme $14 > 4$: $S = \{14\}$.

3.

Résous l'inéquation $\log x < 3$.

INDICE

$\log = \dfrac{\ln}{\ln 10}$ avec $\ln 10 > 0$: quel est le sens de variation de $\log$?

CORRIGÉ

Domaine. Il faut $x > 0$.

Sens de variation. Pour tout réel $x > 0$, $\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$, avec $\ln 10 > 0$. La fonction $\log$ est donc strictement croissante sur $]0, +\infty[$, comme $\ln$.

Résolution. Comme $3 = \log 1000$, pour $x > 0$:

$$\begin{aligned} & \log x < \log 1000 \\ \iff\ & x < 1000. \end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble des solutions est $S =]0, 1000[$.

4.

On donne $\log 2 \approx 0{,}301$ et $\log 3 \approx 0{,}477$. Donne une valeur approchée de $\log 600$.

INDICE

Décompose 600 en un produit qui fait apparaître 2, 3 et une puissance de 10.

CORRIGÉ

Décomposition. $600 = 2 \times 3 \times 10^2$, produit de nombres strictement positifs.

Calcul. D'après le logarithme décimal d'un produit, et $\log\left(10^2\right) = 2$:

$$\begin{aligned} \log 600 &= \log 2 + \log 3 + 2 \\ &\approx 0{,}301 + 0{,}477 + 2 \\ &\approx 2{,}778. \end{aligned}$$

Conclusion. $\log 600 \approx 2{,}778$.

5.

Montre que, pour tout réel $x > 0$, $\log_4 x = \dfrac{1}{2}\log_2 x$.

INDICE

Reviens à la définition et écris $\ln 4$ à l'aide de $\ln 2$.

CORRIGÉ

Soit $x > 0$. On a $\ln 4 = \ln\left(2^2\right) = 2\ln 2$, donc :

$$\begin{aligned} \log_4 x &= \frac{\ln x}{\ln 4} = \frac{\ln x}{2\ln 2} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{\ln x}{\ln 2} \\ &= \frac{1}{2}\log_2 x. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel $x > 0$, $\log_4 x = \dfrac{1}{2}\log_2 x$.

Exercice 9

Le signe d'un produit qui contient ln

On considère la fonction q définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$q(x) = (3-x)(\ln x + 1).$$

1.

Résous dans $]0,+\infty[$ l'équation $\ln x + 1 = 0$, puis l'inéquation $\ln x + 1 > 0$.

INDICE

Écris -1 comme le logarithme d'une puissance de e.

CORRIGÉ

On a $-1 = \ln\left(\mathrm{e}^{-1}\right)$, et $\ln$ est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

Équation. Pour $x > 0$:

$$\begin{aligned} & \ln x + 1 = 0 \\ \iff\ & \ln x = \ln\left(\mathrm{e}^{-1}\right) \\ \iff\ & x = \mathrm{e}^{-1}. \end{aligned}$$

Inéquation. Pour $x > 0$:

$$\ln x + 1 > 0 \iff x > \mathrm{e}^{-1}.$$

Conclusion. L'équation a pour unique solution $\mathrm{e}^{-1} = \dfrac{1}{\mathrm{e}} \approx 0{,}37$; l'inéquation a pour ensemble de solutions $\left]\mathrm{e}^{-1},+\infty\right[$.

2.

Dresse le tableau de signes de $q(x)$ sur $]0,+\infty[$.

INDICE

Une ligne par facteur. Range les deux valeurs qui annulent un facteur dans l'ordre : e^{-1} est plus petit que 3.

CORRIGÉ

Valeurs d'annulation. Le facteur $3-x$ s'annule en 3 ; le facteur $\ln x + 1$ s'annule en $\mathrm{e}^{-1} \approx 0{,}37$, qui est inférieur à 3.

Tableau de signes.

x	$\left]0,\mathrm{e}^{-1}\right[$	$\left]\mathrm{e}^{-1},3\right[$	$]3,+\infty[$
$3-x$	$+$	$+$	$-$
$\ln x + 1$	$-$	$+$	$+$
$q(x)$	$-$	$+$	$-$

De plus, $q\left(\mathrm{e}^{-1}\right) = 0$ et $q(3) = 0$.

3.

Déduis-en l'ensemble des solutions de l'inéquation $q(x) \geq 0$.

INDICE

Lis le tableau, sans oublier les valeurs où q s'annule.

CORRIGÉ

D'après le tableau, $q(x) > 0$ sur $\left]\mathrm{e}^{-1}, 3\right[$, et $q(x) = 0$ en e^{-1} et en 3.

Conclusion. L'ensemble des solutions de $q(x) \geq 0$ est :

$$S = \left[\mathrm{e}^{-1}, 3\right].$$