BURHAN

Fonctions logarithmiques

2ème Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-experimentales/mathematiques/fonctions-logarithmiques/cours

Chapitre	Semestre
Fonctions logarithmiques	Semestre 1

Le trou dans la table des primitives

Une primitive introuvable

Tu connais les primitives des puissances. Une primitive de $x \mapsto x^2$ est $x \mapsto \dfrac{x^3}{3}$, et une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ est $x \mapsto -\dfrac{1}{x}$.

Plus généralement, pour un entier $n \neq -1$, la fonction $x \mapsto x^n$ a pour primitive :

$$x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

sur un intervalle qui ne contient pas 0 lorsque $n < 0$.

Essaie maintenant $n = -1$, c'est-à-dire $x \mapsto \dfrac{1}{x}$. Il faudrait diviser par $n + 1 = 0$: la formule casse. Aucune fonction de ta liste ne convient.

Pourtant, $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $]0, +\infty[$: elle y a des primitives.

Choisissons celle qui vaut 0 en 1, et appelons-la L pour l'instant. Une calculatrice donne ces valeurs, arrondies au millième :

x	1	2	3	4	6
$L(x)$	0	$0{,}693$	$1{,}099$	$1{,}386$	$1{,}792$

> **Devine : Un lien caché**
>
> Regarde $L(2)$, $L(3)$ et $L(6)$. Quel lien vois-tu, aux arrondis près ?
>
> **A.** $L(6) = L(2) \times L(3)$
>
> **Faux.**
> $0{,}693 \times 1{,}099 \approx 0{,}762$: on est loin de $1{,}792$.
>
> **B.** $L(6) = L(2) + L(3)$
>
> **Juste.**
> $0{,}693 + 1{,}099 = 1{,}792$. Or $6 = 2 \times 3$: un produit est devenu une somme.
>
> **C.** $L(6) = 3\,L(2)$
>
> **Faux.**
> $3 \times 0{,}693 = 2{,}079$: c'est trop. Ce triple serait plutôt lié à $2^3 = 8$.

D. Aucun lien : ces valeurs sont quelconques.

Faux.
Regarde aussi $L(4) = 1{,}386$, le double de $L(2)$. Ce n'est pas un hasard.

Correction
On a $0{,}693 + 1{,}099 = 1{,}792$. Donc, aux arrondis près :

$$L(2) + L(3) = L(6).$$

De même, $L(4) = L(2) + L(2)$.

Cette fonction change les **produits** en **sommes**. Elle s'appelle le **logarithme népérien**, noté $\ln$. Tu verras pourquoi dans ce chapitre.

Ce que tu vas apprendre. D'abord la fonction $\ln$ elle-même : dérivée, variations, signe.

Puis ses règles de calcul et les équations, toujours le domaine d'abord. Ensuite ses limites, au cœur des problèmes d'étude de fonction. Enfin l'étude complète d'une fonction avec $\ln$.

C'est rentable : dans 10 des 15 sujets de bac consultés, la fonction principale du problème contient $\ln$.

La fonction ln : définition, variations, signe

Donner un nom à L

La fonction L de l'introduction mérite un nom et une définition précise. La voici.

Définition : Fonction logarithme népérien

La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $]0, +\infty[$: elle y admet des primitives. La **fonction logarithme népérien**, notée $\ln$, est la primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$ qui s'annule en 1.

Ainsi $\ln$ est définie sur $]0, +\infty[$ et $\ln 1 = 0$. On écrit $\ln x$, et $\ln(u(x))$ avec des parenthèses dès que l'argument est composé.

En clair. $\ln x$ n'existe que pour $x > 0$, et $\ln 1 = 0$.

Écrire $\ln 0$ ou $\ln(-2)$ n'a aucun sens : ce ne sont pas des nombres.

Vérifie : Lequel existe ?

Lequel de ces nombres existe ?

A. $\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)$

Juste.
$\dfrac{1}{2} > 0$: ce nombre existe. Il est même négatif, tu verras pourquoi.

B. $\ln(-1)$

Faux.

$-1 < 0$: $\ln$ n'est pas définie pour un nombre négatif.

C. $\ln 0$

Faux.

0 n'appartient pas à $]0, +\infty[$: $\ln 0$ n'existe pas.

D. $\ln\left(-\frac{1}{2}\right)$

Faux.

L'argument est négatif : ce logarithme n'existe pas.

Correction

Le nombre $\ln a$ existe si et seulement si $a > 0$.

Parmi les quatre nombres, seul $\frac{1}{2}$ est strictement positif. Donc seul $\ln\left(\frac{1}{2}\right)$ existe.

La dérivée de ln

Propriété : Dérivée et continuité de ln

La fonction $\ln$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et, pour tout $x > 0$:

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

En particulier, $\ln$ est continue sur $]0, +\infty[$.

Vérifie : Dériver avec ln

Soit p la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $p(x) = 3\ln x - x$. Que vaut $p'(x)$?

A. $\frac{3}{x} - 1$

Juste.

On dérive terme à terme : $3 \times \frac{1}{x} - 1$.

B. $\frac{3}{x}$

Faux.

Tu as oublié de dériver $-x$, dont la dérivée vaut -1.

C. $3\ln x - 1$

Faux.

La dérivée de $\ln x$ est $\frac{1}{x}$, pas $\ln x$.

D. $\frac{1}{3x} - 1$

Faux.
Le facteur 3 multiplie la dérivée : $(3\ln x)' = 3 \times \dfrac{1}{x}$.

Correction
On dérive terme à terme. Pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} p'(x) &= 3 \times \frac{1}{x} - 1 \\ &= \frac{3 - x}{x}. \end{aligned}$$

Pour $x > 0$, le signe de $p'(x)$ est donc celui de $3 - x$.

Ainsi p croît sur $]0, 3]$ et décroît sur $[3, +\infty[$.

Toujours croissante

Pour tout $x > 0$, $\dfrac{1}{x} > 0$. La dérivée de $\ln$ est donc strictement positive : $\ln$ monte sur tout son domaine.

Comparer deux logarithmes revient alors à comparer les nombres eux-mêmes.

Propriété : Stricte croissance et comparaison

La fonction $\ln$ est **strictement croissante** sur $]0, +\infty[$. Par conséquent, pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$:

$$\ln a = \ln b \iff a = b \qquad \text{et} \qquad \ln a < \ln b \iff a < b.$$

Vérifie : Comparer sans calculer

Sans calculatrice, range dans l'ordre croissant $\ln\left(\dfrac{7}{5}\right)$, $\ln\left(\dfrac{4}{3}\right)$ et $\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$.

A. $\ln\left(\dfrac{3}{2}\right) < \ln\left(\dfrac{7}{5}\right) < \ln\left(\dfrac{4}{3}\right)$
Faux.
C'est l'ordre inverse. $\ln$ est croissante : elle garde l'ordre des nombres.

B. On ne peut pas conclure sans calculatrice.
Faux.
La stricte croissance suffit : on compare les fractions, pas les logarithmes.

C. $\ln\left(\dfrac{4}{3}\right) < \ln\left(\dfrac{7}{5}\right) < \ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$
Juste.
$\dfrac{4}{3} \approx 1{,}33$, $\dfrac{7}{5} = 1{,}4$ et $\dfrac{3}{2} = 1{,}5$: $\ln$ garde cet ordre.

Correction
On compare d'abord les nombres :

$$\frac{4}{3} < \frac{7}{5} < \frac{3}{2},$$

car $\frac{4}{3} \approx 1{,}33$, $\frac{7}{5} = 1{,}4$ et $\frac{3}{2} = 1{,}5$.

Comme $\ln$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$, elle conserve l'ordre :

$$\ln\left(\frac{4}{3}\right) < \ln\left(\frac{7}{5}\right) < \ln\left(\frac{3}{2}\right).$$

Le signe de ln x

Devine : Positif ou négatif ?

Sans calculatrice, quel est le signe de $\ln(0{,}8)$?

A. Positif, comme tout logarithme.

Faux.

$0{,}8 < 1$ et $\ln$ est croissante : $\ln(0{,}8) < \ln 1$.

B. Nul

Faux.

$\ln$ est strictement croissante : elle ne s'annule qu'en 1.

C. Négatif

Juste.

$0{,}8 < 1$, donc $\ln(0{,}8) < \ln 1 = 0$.

D. Il n'existe pas, car $0{,}8$ n'est pas entier.

Faux.

$\ln x$ existe pour tout réel $x > 0$, entier ou non.

Correction

On a $0 < 0{,}8 < 1$, et $\ln$ est strictement croissante. Donc :

$$\ln(0{,}8) < \ln 1 = 0.$$

La calculatrice donne $\ln(0{,}8) \approx -0{,}223$.

Propriété : Signe de ln x

Pour tout réel $x > 0$:

- $\ln x < 0$ si $0 < x < 1$;
- $\ln x = 0$ si $x = 1$;
- $\ln x > 0$ si $x > 1$.

Tableau de signes de ln x : le signe moins occupe]0, 1[, le zéro est en 1, le signe plus occupe]1, +∞[.

x	0		1		$+\infty$
$\ln x$	‖	−	0	+	

À toi : Le signe de ln(x + 1)

Pour $x > -1$, étudie le signe de $\ln(x+1)$.

Indice 1
Pose $X = x + 1$: le signe de $\ln X$ dépend de la position de X par rapport à 1.
Indice 2
$x + 1 > 1$ équivaut à $x > 0$.

Réponse
Soit $x > -1$. Alors $x + 1 > 0$, donc $\ln(x+1)$ existe. Le signe de $\ln$ donne :

- $\ln(x+1) < 0 \iff 0 < x+1 < 1$, soit $-1 < x < 0$;
- $\ln(x+1) = 0 \iff x + 1 = 1$, soit $x = 0$;
- $\ln(x+1) > 0 \iff x + 1 > 1$, soit $x > 0$.

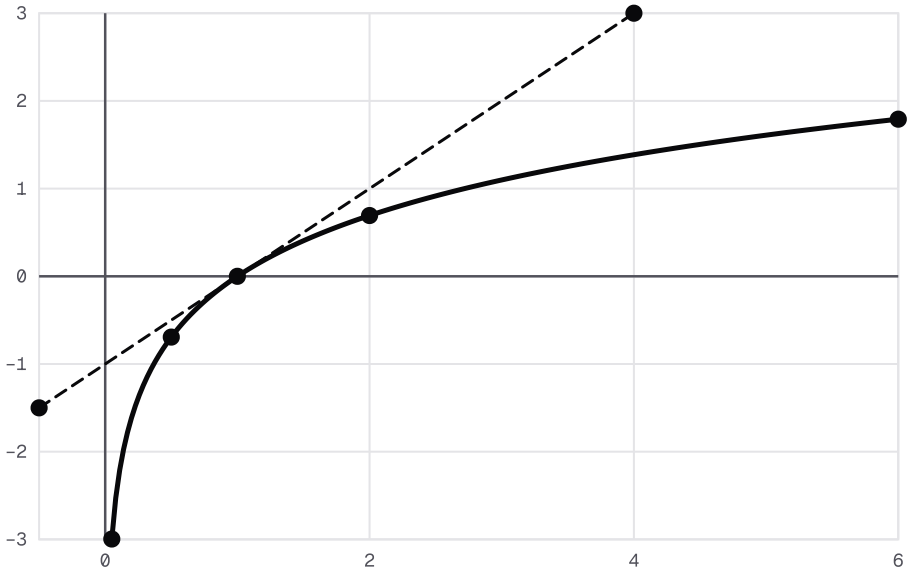
Une tangente remarquable

Exemple : La tangente au point d'abscisse 1 (guidé)

1. **Point** : $\ln 1 = 0$, donc la courbe passe par le point $(1, 0)$.
2. **Pente** : $\ln'(1) = \dfrac{1}{1} = 1$.
3. **Équation** : $y = \ln'(1)(x - 1) + \ln 1$.

La tangente au point d'abscisse 1 a donc pour équation :

$$y = x - 1.$$



Courbe de ln et sa tangente y = x − 1 au point (1, 0). La courbe est sous l'axe des abscisses entre 0 et 1, au-dessus après 1 ; sa tangente en ce point a pour pente 1.

À toi : la tangente en 2

Détermine une équation de la tangente à la courbe de $\ln$ au point d'abscisse 2.

Indice 1

Il te faut $\ln 2$, que tu gardes tel quel, et la pente $\ln'(2)$.

Indice 2

La pente vaut $\ln'(2)$. Reprends la formule de l'exemple guidé en remplaçant 1 par 2.

Réponse

Au point d'abscisse 2, la courbe passe par $(2, \ln 2)$ et la pente vaut $\ln'(2) = \dfrac{1}{2}$. La tangente a pour équation :

$$y = \frac{1}{2}(x - 2) + \ln 2,$$

soit $y = \dfrac{1}{2}x - 1 + \ln 2$.

On garde $\ln 2$ sous forme exacte ; il vaut environ $0{,}693$.

Les règles de calcul

Un produit devient une somme

Dans l'introduction, $\ln 6$ valait $\ln 2 + \ln 3$, aux arrondis près.

Ce n'était pas un hasard : c'est la règle centrale du chapitre.

Théorème : Logarithme d'un produit

Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$:

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b.$$

Les deux nombres a et b doivent être **strictement positifs** : l'égalité n'a pas de sens sinon.

En clair. Le logarithme d'un produit est la somme des logarithmes.

Cette règle ne marche que si **chaque** facteur est strictement positif.

Exemple : Deux applications directes

- $\ln 10 = \ln(2 \times 5) = \ln 2 + \ln 5$.
- Pour $x > 0$: $\ln(3x) = \ln 3 + \ln x$, car $3 > 0$ et $x > 0$.

Remarque : Pour comprendre : d'où vient cette règle ?

Soit $a > 0$. Notons h la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $h(x) = \ln(ax) - \ln x$.

Dérivée. Par la dérivée d'une fonction composée, la dérivée de $x \mapsto \ln(ax)$ est $x \mapsto a \times \dfrac{1}{ax} = \dfrac{1}{x}$.
Donc, pour tout $x > 0$:

$$h'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 0.$$

Constante. Sur l'intervalle $]0, +\infty[$, h est donc constante. Or $h(1) = \ln a - \ln 1 = \ln a$.

Conclusion. Pour tout $x > 0$, $\ln(ax) = \ln a + \ln x$. Cette preuve sert à comprendre la règle.

Quotient, inverse, puissance

Propriété : Logarithme d'un inverse et d'un quotient

Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$:

$$\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln b \qquad \text{et} \qquad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b.$$

Propriété : Logarithme d'une puissance et d'une racine

Pour tout réel $a > 0$ et tout nombre rationnel r :

$$\ln(a^r) = r \ln a.$$

En particulier, pour tout entier naturel n, $\ln(a^n) = n\ln a$, et $\ln\sqrt{a} = \dfrac{1}{2}\ln a$.

Exemple : Transformer des nombres (guidé)

Décompose chaque nombre en facteurs premiers, puis applique les règles.

1. **Produit** : $\ln 24 = \ln(2^3 \times 3) = 3\ln 2 + \ln 3$.
2. **Inverse** : $\ln\left(\dfrac{1}{9}\right) = -\ln 9 = -2\ln 3$.
3. **Racine** : $\ln\sqrt{8} = \dfrac{1}{2}\ln(2^3) = \dfrac{3}{2}\ln 2$.

Avec $\ln 2 \approx 0{,}693$ et $\ln 3 \approx 1{,}099$, on obtient $\ln 24 \approx 3{,}178$.

Vérifie : Une racine au dénominateur

Que vaut $\ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$?

A. $\dfrac{1}{2}\ln 2$

Faux.

Le signe manque : $\dfrac{1}{\sqrt{2}} < 1$, son logarithme est négatif.

B. $\sqrt{\ln 2}$

Faux.

La règle porte sur l'exposant : $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$, donc $\ln\sqrt{2} = \dfrac{1}{2}\ln 2$.

C. $-2\ln 2$

Faux.

Ce serait $\ln\left(\dfrac{1}{4}\right)$. Ici l'exposant vaut $-\dfrac{1}{2}$.

D. $-\dfrac{1}{2}\ln 2$

Juste.

$\dfrac{1}{\sqrt{2}} = 2^{-\frac{1}{2}}$, puis la règle de la puissance.

Correction

On écrit $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = 2^{-\frac{1}{2}}$, puis on applique la règle de la puissance :

$$\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{2}\ln 2.$$

Une valeur approchée est $-0{,}347$.

À toi de calculer

À toi : À toi de décomposer

Exprime $\ln\left(\dfrac{27}{4}\right)$ en fonction de $\ln 2$ et $\ln 3$.

A. $\dfrac{3\ln 3}{2\ln 2}$

Faux.

Le logarithme d'un quotient est une **différence** de logarithmes, pas un quotient.

B. $2\ln 3 - 3\ln 2$

Faux.

Les exposants sont échangés : $27 = 3^3$ et $4 = 2^2$.

C. $3\ln 3 - 2\ln 2$

Juste.

$27 = 3^3$ et $4 = 2^2$, puis le logarithme d'un quotient.

D. $\ln 23$

Faux.

$\ln 27 - \ln 4$ correspond au quotient $\dfrac{27}{4}$, jamais à la différence $27 - 4$.

Indice 1

Écris 27 et 4 comme des puissances de nombres premiers.

Correction

On a $27 = 3^3$ et $4 = 2^2$. Le logarithme d'un quotient, puis celui d'une puissance, donnent :

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{27}{4}\right) &= \ln 27 - \ln 4\\ &= \ln(3^3) - \ln(2^2)\\ &= 3\ln 3 - 2\ln 2.\end{aligned}$$

Avec les valeurs approchées : $3 \times 1{,}099 - 2 \times 0{,}693 \approx 1{,}91$.

À toi : Une simplification

Montre que $\ln 50 - 2\ln 5 = \ln 2$.

Indice 1

Écris $2\ln 5$ comme le logarithme d'un seul nombre.

Indice 2

$2\ln 5 = \ln 25$. Il reste une différence de deux logarithmes.

Réponse

Par la règle de la puissance, $2\ln 5 = \ln(5^2) = \ln 25$. Donc :

$$\begin{aligned}\ln 50 - 2\ln 5 &= \ln 50 - \ln 25 \\ &= \ln\left(\frac{50}{25}\right) \\ &= \ln 2.\end{aligned}$$

On a bien $\ln 50 - 2\ln 5 = \ln 2$.

Quand x est négatif

Propriété : Logarithme et valeur absolue

Pour tout réel $x \neq 0$:

$$\ln(x^2) = 2\ln|x|.$$

Pour tous réels a et b tels que $ab > 0$: $\ln(ab) = \ln|a| + \ln|b|$.

Pour $x < 0$, l'écriture $2\ln x$ n'a pas de sens.

Trouve l'erreur : Le carré d'un nombre négatif

Un élève écrit : « pour tout $x < 0$, $\ln(x^2) = 2\ln x$ ». Qu'en penses-tu ?

A. C'est juste : c'est la règle de la puissance.

Faux.
La règle $\ln(a^r) = r\ln a$ exige $a > 0$. Ici, $x < 0$.

B. C'est faux : $\ln x$ n'existe pas pour $x < 0$; il faut écrire $2\ln|x|$.

Juste.
$x^2 = |x|^2$ avec $|x| > 0$: la règle s'applique à $|x|$.

C. C'est faux : $\ln(x^2)$ n'existe pas pour $x < 0$.

Faux.
$x^2 > 0$ dès que $x \neq 0$: $\ln(x^2)$ existe bien. C'est $\ln x$ qui n'existe pas.

Correction

Soit $x < 0$. Alors $x^2 = |x|^2$ avec $|x| > 0$: la règle de la puissance s'applique à $|x|$.

$$\ln(x^2) = 2\ln|x| = 2\ln(-x).$$

Exemple : pour $x = -5$, $\ln 25 = 2\ln 5$, alors que $\ln(-5)$ n'existe pas.

Les pièges à éviter

Attention : Une somme reste une somme

La règle change un **produit** en somme, jamais une somme.

Exemple : $\ln(1+2) = \ln 3 \approx 1{,}10$, alors que $\ln 1 + \ln 2 = \ln 2 \approx 0{,}69$.

Donc, en général, $\ln(a+b) \neq \ln a + \ln b$.

Vérifie : Laquelle est vraie ?

Pour $x > 0$, laquelle de ces égalités est vraie ?

A. $\ln(x+1) = \ln x + \ln 1$

Faux.

Le membre de droite vaut $\ln x$. Pour $x = 1$: $\ln 2 \neq 0$. La règle ne s'applique pas à une somme.

B. $\ln(2x) = 2\ln x$

Faux.

$\ln(2x) = \ln 2 + \ln x$. Pour $x = 1$: $\ln 2 \neq 0$.

C. $\dfrac{\ln(x+1)}{\ln x} = \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$

Faux.

Pour $x = 2$: $\dfrac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1{,}58$, mais $\ln\left(\dfrac{3}{2}\right) \approx 0{,}41$.

D. $\ln(x+1) - \ln x = \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$

Juste.

$x+1 > 0$ et $x > 0$: la propriété du logarithme d'un quotient s'applique.

Correction

Pour $x > 0$, les nombres x et $x+1$ sont strictement positifs. Le logarithme d'un quotient donne donc :

$$\ln(x+1) - \ln x = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right).$$

Les trois autres égalités sont fausses : il suffit de les tester pour $x = 1$ ou $x = 2$.

Attention : Le quotient et le carré

$\dfrac{\ln a}{\ln b}$ et $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right)$ sont deux nombres différents. Par exemple :

$$\frac{\ln 16}{\ln 4} = \frac{2\ln 4}{\ln 4} = 2,$$

tandis que $\ln\left(\dfrac{16}{4}\right) = \ln 4 \approx 1{,}39$.

De même, $(\ln x)^2$ n'est pas $\ln(x^2)$: pour $x = 10$, $(\ln 10)^2 \approx 5{,}30$ et $\ln 100 = 2\ln 10 \approx 4{,}61$.

Écris toujours les parenthèses.

Équations et inéquations : le domaine d'abord

Le domaine d'abord

Une équation avec $\ln$ cache un piège : chaque logarithme impose une condition sur x.

Une valeur trouvée par le calcul peut donc tomber hors du domaine : elle ne compte pas. D'où la règle d'or : **domaine d'abord**.

Méthode : Résoudre une équation ou une inéquation avec ln

1. **Domaine** : pour chaque logarithme, écris « argument > 0 ». Résous ces conditions ensemble : tu obtiens l'ensemble D.
2. **Regroupement** : sur D, rassemble les logarithmes pour arriver à $\ln A = \ln B$ ou à $\ln A < \ln B$.
3. **Suppression des ln** : $\ln A = \ln B$ donne $A = B$; $\ln A < \ln B$ donne $A < B$, car $\ln$ est strictement croissante.
4. **Tri** : ne garde que les solutions qui sont dans D.

Un quotient par $\ln x$ demande en plus $\ln x \neq 0$, c'est-à-dire $x \neq 1$.

Vérifie : Un domaine en deux morceaux

Sur quel ensemble l'expression $\dfrac{x}{\ln x}$ a-t-elle un sens ?

A. $]0, +\infty[$
Faux.
En $x = 1$, $\ln 1 = 0$: on diviserait par zéro.

B. $]1, +\infty[$
Faux.
On exige $\ln x \neq 0$, pas $\ln x > 0$. Pour $x = \dfrac{1}{2}$, l'expression existe.

C. $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$
Faux.
Pour $x < 0$, $\ln x$ n'existe pas.

D. $]0, 1[\cup]1, +\infty[$
Juste.
Deux conditions : $x > 0$ pour $\ln x$, et $\ln x \neq 0$ pour le quotient.

Correction
Il faut $x > 0$ pour que $\ln x$ existe, et $\ln x \neq 0$ pour pouvoir diviser.

Or $\ln x = 0$ si et seulement si $x = 1$. Le domaine est donc :

$$]0, 1[\cup]1, +\infty[.$$

Exemple : Une équation avec deux logarithmes (guidé)

Résolvons $\ln x + \ln(x+1) = \ln 6$.

1. **Domaine** : $x > 0$ et $x + 1 > 0$, soit $D =]0, +\infty[$.
2. **Regroupement** : sur D, $\ln x + \ln(x+1) = \ln\left(x(x+1)\right)$. L'équation devient $\ln\left(x(x+1)\right) = \ln 6$.
3. **Suppression des ln** : $x(x+1) = 6$, soit $x^2 + x - 6 = 0$. Le discriminant vaut $1 + 24 = 25$, d'où $x = 2$ ou $x = -3$.
4. **Tri** : $-3 \notin D$ et $2 \in D$.

Conclusion. $S = \{2\}$.

Une copie à corriger

Trouve l'erreur : Une copie à examiner

Pour résoudre $\ln(x-1) = \ln(2x+1)$, un élève écrit : « $x - 1 = 2x + 1$, donc $x = -2$, et $S = \{-2\}$ ». Qu'en penses-tu ?

A. C'est juste, car $\ln$ est strictement croissante.

Faux.

La croissance permet d'enlever les $\ln$, mais seulement sur le domaine. Or $\ln(-2-1) = \ln(-3)$ n'existe pas.

B. Le calcul est faux : on trouve $x = 2$.

Faux.

$x - 1 = 2x + 1$ donne bien $x = -2$. Le défaut est ailleurs.

C. Le domaine est oublié : il faut $x > 1$, donc -2 est rejeté et $S = \varnothing$.

Juste.

Avec le domaine écrit en premier, le rejet de -2 devient évident.

Correction

Domaine. Il faut $x - 1 > 0$ et $2x + 1 > 0$, soit $x > 1$ et $x > -\dfrac{1}{2}$. Donc $D =]1, +\infty[$.

Résolution. Sur D, l'équation équivaut à $x - 1 = 2x + 1$, soit $x = -2$.

Tri. Or $-2 \notin D$, donc $S = \varnothing$. Le calcul donnait une valeur, mais l'équation n'a aucune solution.

À toi : Une inéquation

Quel est l'ensemble des solutions de $\ln(2x+1) > \ln(x+1)$?

A. $]0, +\infty[$

Juste.

Domaine $x > -\dfrac{1}{2}$, puis $2x+1 > x+1 \iff x > 0$.

B. $\left]-\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$

Faux.

C'est seulement le domaine. Il reste à résoudre l'inéquation elle-même.

C. $\left]-\dfrac{1}{2}, 0\right[$

Faux.

Le sens de l'inégalité est inversé : $\ln$ est croissante, elle garde le sens.

D. $]-1, +\infty[$

Faux.

Il faut que les **deux** arguments soient positifs : $2x+1 > 0$ exige $x > -\dfrac{1}{2}$.

Correction

Domaine. Il faut $2x+1 > 0$ et $x+1 > 0$, soit $x > -\dfrac{1}{2}$.

Résolution. Sur ce domaine, comme $\ln$ est strictement croissante, l'inéquation équivaut à $2x+1 > x+1$, soit $x > 0$.

Tri. Tous les réels $x > 0$ sont dans le domaine, donc $S =]0, +\infty[$.

Comparer à zéro

Pour comparer un logarithme à 0, écris $0 = \ln 1$. Ainsi, pour tout réel $X > 0$:

- $\ln X = 0 \iff X = 1$;
- $\ln X < 0 \iff 0 < X < 1$.

Exemple : Une inéquation (guidé)

Résolvons $\ln(x-1) \leq 0$.

1. **Domaine** : $x - 1 > 0$, soit $D =]1, +\infty[$.
2. **Écriture** : $0 = \ln 1$, donc l'inéquation s'écrit $\ln(x-1) \leq \ln 1$.
3. **Suppression des ln** : $x - 1 \leq 1$, soit $x \leq 2$.
4. **Tri** : on garde les réels de D tels que $x \leq 2$.

Conclusion. $S =]1, 2]$.

À toi : une inéquation complète

Résous dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\ln(x^2+1) \leq \ln(2x+1)$.

Indice 1

Commence par le domaine. Le nombre x^2+1 est toujours strictement positif ; et $2x+1$?

Indice 2

Sur le domaine, l'inéquation équivaut à $x^2+1 \leq 2x+1$, soit $x^2-2x \leq 0$. Factorise.

Indice 3

$x(x-2) \leq 0$ entre les racines. Croise ensuite avec le domaine.

Réponse

Domaine. Pour tout réel x, $x^2+1>0$. De plus, $2x+1>0$ si et seulement si $x>-\dfrac{1}{2}$. Donc $D=\left]-\dfrac{1}{2},+\infty\right[$.

Résolution. Sur D, comme $\ln$ est strictement croissante, l'inéquation équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} x^2+1 &\leq 2x+1 \\ x^2-2x &\leq 0 \\ x(x-2) &\leq 0. \end{aligned}$$

Ce produit est négatif ou nul si et seulement si $0 \leq x \leq 2$.

Tri. L'intervalle $[0,2]$ est inclus dans D, donc $S=[0,2]$.

Le signe d'un produit

À toi : Un tableau de signes

Étudie le signe de $(x-2)\ln x$ pour $x>0$.

Indice 1

Fais un tableau à deux lignes : une pour $x-2$, une pour $\ln x$.

Indice 2

$\ln x$ change de signe en 1, et $x-2$ en 2.

Réponse

Sur $]0,+\infty[$, le facteur $\ln x$ change de signe en 1, et le facteur $x-2$ en 2.

- Sur $]0,1[$: $x-2<0$ et $\ln x<0$, le produit est **positif**.
- Sur $]1,2[$: $x-2<0$ et $\ln x>0$, il est **négatif**.
- Sur $]2,+\infty[$: les deux facteurs sont positifs, il est **positif**.

Le produit s'annule en 1 et en 2.

Bonus : un système

À toi : Bonus : deux inconnues

Résous le système suivant, d'inconnues réelles x et y :

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ \ln x + \ln y = \ln 10 \end{cases}$$

Indice 1

Domaine : $x > 0$ et $y > 0$. Regroupe ensuite les deux logarithmes.

Indice 2

Tu obtiens $xy = 10$ et $x + y = 7$: x et y sont les racines de $t^2 - 7t + 10 = 0$.

Réponse

Domaine. Il faut $x > 0$ et $y > 0$.

Transformation. Sur ce domaine, $\ln x + \ln y = \ln(xy)$: la seconde équation équivaut à $xy = 10$.

Résolution. Les nombres x et y ont pour somme 7 et pour produit 10 : ce sont les racines de $t^2 - 7t + 10 = 0$, soit 2 et 5.

Conclusion. Les deux sont strictement positifs : les solutions sont les couples $(2, 5)$ et $(5, 2)$.

Ce type de système est absent des 15 sujets de bac consultés.

Limites aux bornes et nombre e

Aux deux bouts du domaine

Devine : Jusqu'où monte ln ?

Une calculatrice donne $\ln 10 \approx 2{,}30$, $\ln 1000 \approx 6{,}91$ et $\ln 1\,000\,000 \approx 13{,}82$. Que fait $\ln x$ quand x devient très grand ?

A. Elle reste sous 20 : elle monte de plus en plus lentement.

Faux.

Lente ne veut pas dire bornée : $\ln(10^{10}) = 10 \ln 10 \approx 23$, et $\ln(10^{100}) \approx 230$.

B. Elle se rapproche d'une valeur, autour de 14.

Faux.

Chaque fois que x est multiplié par 10, $\ln x$ gagne environ $2{,}30$: elle ne se stabilise pas.

C. Elle dépasse n'importe quel nombre, mais très lentement.

Juste.

Pour tout entier n, $\ln(10^n) = n \ln 10$, qui dépasse tout seuil quand n grandit.

Correction

Pour tout entier n, $\ln(10^n) = n \ln 10$, avec $\ln 10 > 0$: multiplier x par 10 ajoute toujours $\ln 10 \approx 2{,}30$.

Donc $\ln x$ dépasse n'importe quel seuil, mais très lentement. Pour x égal à un million, $\ln x$ n'atteint même pas 14.

Propriété : Limites de ln aux bornes de son domaine

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty.$$

La droite d'équation $x = 0$ est donc asymptote verticale à la courbe de $\ln$.

En clair. Vers la droite, la courbe de $\ln$ monte sans fin. Vers 0, elle plonge vers le bas en longeant l'axe des ordonnées.

La limite en $+\infty$ est admise. Celle en 0^+ s'en déduit, car pour tout $x > 0$:

$$\ln x = -\ln\left(\frac{1}{x}\right).$$

Attention : Lente, mais sans plafond

Ne confonds pas « monter lentement » et « être bornée ».

La courbe de $\ln$ s'aplatit, mais elle finit par dépasser toute droite horizontale. Par exemple, $\ln(10^{50}) = 50\ln 10$, qui dépasse 100.

Vérifie : Une autre asymptote verticale

Que vaut $\lim\limits_{x\to -1^+} \ln(x+1)$?

A. 0

Faux.
$\ln(x+1)$ vaut 0 en $x = 0$, pas près de -1.

B. $-\infty$

Juste.
Quand $x \to -1^+$, $X = x + 1 \to 0^+$, et $\ln X \to -\infty$.

C. $+\infty$

Faux.
Près de 0^+, $\ln$ plonge vers $-\infty$, elle ne monte pas.

D. Elle n'existe pas, car $\ln 0$ n'existe pas.

Faux.
$\ln 0$ n'existe pas, mais la limite en 0^+ existe : c'est $-\infty$.

Correction
On pose $X = x + 1$. Quand $x \to -1^+$, $X \to 0^+$, et $\lim\limits_{X\to 0^+} \ln X = -\infty$. Donc :

$$\lim_{x\to -1^+} \ln(x+1) = -\infty.$$

Interprétation : la droite d'équation $x = -1$ est asymptote verticale à la courbe de $x \mapsto \ln(x+1)$.

Le nombre e

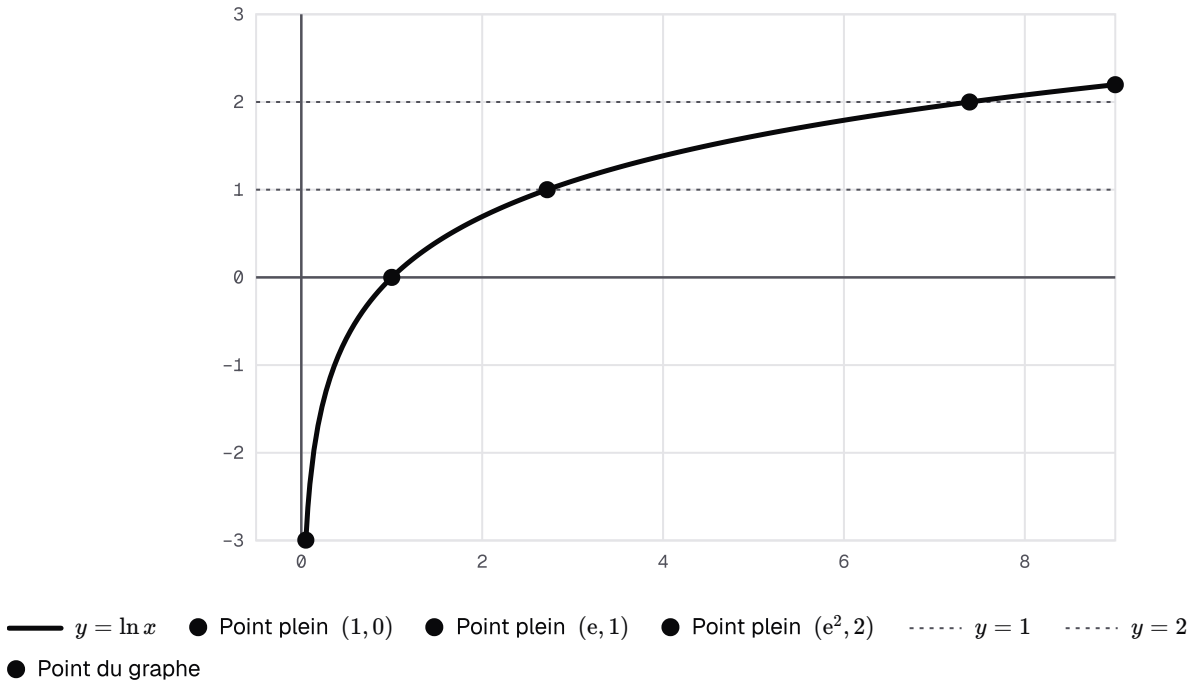
La fonction $\ln$ est continue, strictement croissante, et va de $-\infty$ à $+\infty$. Sa courbe coupe donc chaque droite horizontale en un point et un seul.

En particulier, elle coupe la droite d'équation $y = 1$: l'abscisse de ce point porte un nom.

Théorème : Bijection et nombre e

La fonction $\ln$ est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$, de limites $-\infty$ en 0^+ et $+\infty$ en $+\infty$: l'image de $]0, +\infty[$ par $\ln$ est $\mathbb{R}$. Pour tout réel m, l'équation $\ln x = m$ admet donc **une unique solution** dans $]0, +\infty[$.

Le nombre e est l'unique réel tel que $\ln \mathrm{e} = 1$; $\mathrm{e} \approx 2{,}718$. Pour tout rationnel r, $\ln(\mathrm{e}^r) = r$.



Courbe de ln : elle longe l'axe des ordonnées, asymptote verticale, quand x tend vers 0. Elle coupe la droite y = 1 en x = e ≈ 2,718, et n'atteint 2 qu'en x = e² ≈ 7,39.

Exemple : Résoudre ln x = m (guidé)

Pour m rationnel, l'unique solution de $\ln x = m$ est e^m, car $\ln(\mathrm{e}^m) = m$.

1. $\ln x = 2 \iff x = \mathrm{e}^2$, environ $7{,}39$.
2. $\ln x = -1 \iff x = \mathrm{e}^{-1} = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.
3. $\ln x \leq 3 \iff 0 < x \leq \mathrm{e}^3$, car $3 = \ln(\mathrm{e}^3)$ et $\ln$ est strictement croissante.

À toi : Une équation avec e

Résous $\ln(2x+1) = 1$.

A. $x = \dfrac{\mathrm{e}}{2}$

Faux.

Tu as oublié le $+1$: $2x+1 = \mathrm{e}$ donne $2x = \mathrm{e}-1$.

B. $x = 0$

Faux.

$\ln(2\times 0+1) = \ln 1 = 0$, pas 1. C'est la solution de $\ln(2x+1) = 0$.

C. $x = \mathrm{e}-1$

Faux.

Tu as oublié de diviser par 2 : $2x = \mathrm{e}-1$.

D. $x = \dfrac{\mathrm{e}-1}{2}$

Juste.

$2x+1 = \mathrm{e}$, et cette valeur est bien dans le domaine.

Indice 1

Écris $1 = \ln \mathrm{e}$, sans oublier le domaine.

Correction

Domaine. Il faut $2x+1 > 0$, soit $x > -\dfrac{1}{2}$.

Résolution. Sur ce domaine, comme $1 = \ln \mathrm{e}$:

$$\begin{aligned} \ln(2x+1) = 1 &\iff 2x+1 = \mathrm{e} \\ &\iff x = \frac{\mathrm{e}-1}{2}. \end{aligned}$$

Tri. Cette valeur vaut environ $0{,}86$: elle est dans le domaine. Donc $S = \left\{\dfrac{\mathrm{e}-1}{2}\right\}$.

À toi : une inéquation avec e

Résous l'inéquation $\ln(x-1) < 2$.

Indice 1

Domaine d'abord : $x-1 > 0$.

Indice 2

Écris $2 = \ln(\mathrm{e}^2)$, puis utilise la stricte croissance de $\ln$.

Réponse

Domaine. Il faut $x-1 > 0$, soit $x > 1$.

Résolution. Sur ce domaine, comme $2 = \ln(\mathrm{e}^2)$ et que $\ln$ est strictement croissante :

$$\begin{aligned} & \ln(x-1) < 2 \\ \iff\ & x - 1 < \mathrm{e}^2 \\ \iff\ & x < 1 + \mathrm{e}^2. \end{aligned}$$

Tri. Avec le domaine, $S = \left]1, 1 + \mathrm{e}^2\right[$. La borne $1 + \mathrm{e}^2$ vaut environ $8{,}39$.

Coin examen : limite et asymptote

Méthode : Coin examen : limite en 0⁺ et asymptote verticale

Soit q la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $q(x) = x + \ln x$. Rédaction attendue, en deux temps :

> **Limite** : $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} x = 0$, donc $\lim\limits_{x \to 0^+} q(x) = -\infty$.
>
> **Interprétation** : la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à la courbe de q.

Cette question figure dans 7 des 15 sujets consultés. Les barèmes notent la limite et l'interprétation à part, par exemple $0{,}25 + 0{,}25$ point : n'oublie pas la seconde phrase.

Croissances comparées

Une course entre ln x et x

Devine : Une course entre deux infinis

Pour $x = 100$, $\ln x \approx 4{,}6$ et $\dfrac{\ln x}{x} \approx 0{,}046$. Pour $x = 10\,000$, $\ln x \approx 9{,}2$ et $\dfrac{\ln x}{x} \approx 0{,}000\,92$. Vers quoi tend ce quotient quand x tend vers $+\infty$?

A. $+\infty$

Faux.

$\ln x \to +\infty$, mais x grandit beaucoup plus vite : le quotient diminue.

B. 0

Juste.

Le quotient fond quand x grandit : x gagne largement la course.

C. 1

Faux.

Les valeurs calculées s'éloignent de 1 : $0{,}046$, puis $0{,}000\,92$.

D. Il n'a pas de limite.

Faux.

Le quotient décroît vers 0 sans osciller : il a bien une limite.

Correction

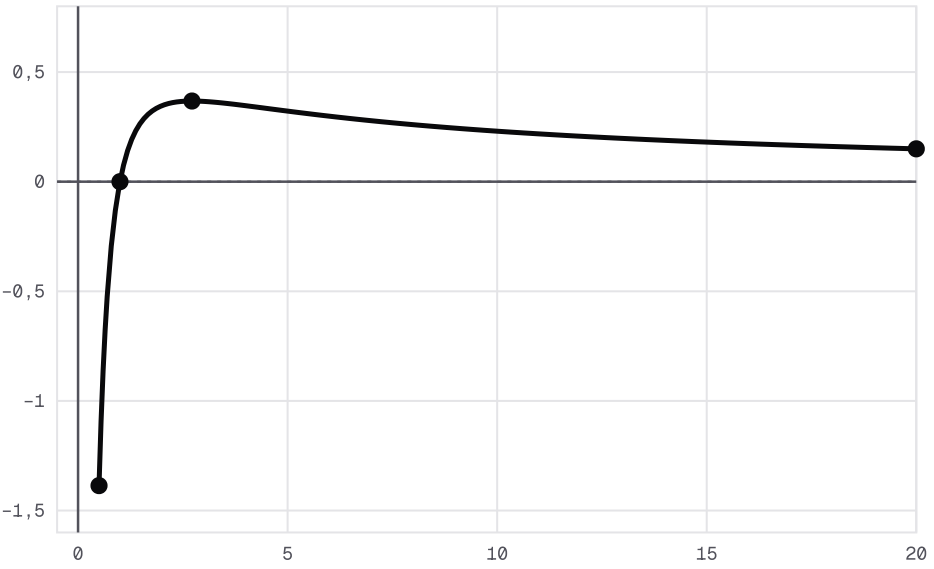
$\ln x$ et x tendent tous deux vers $+\infty$, mais x grandit beaucoup plus vite.

Le quotient $\dfrac{\ln x}{x}$ tend donc vers 0 : c'est l'énoncé qui suit.

Propriété : Croissances comparées de référence

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0.$$

Comme $\ln x$ tend vers $+\infty$ alors que $\dfrac{\ln x}{x}$ tend vers 0, la courbe de $\ln$ admet en $+\infty$ une **branche parabolique de direction l'axe des abscisses**.



Courbe de x ↦ ln x / x : elle coupe l'axe des abscisses en 1, atteint son maximum 1/e ≈ 0,37 en x = e, puis redescend vers l'axe des abscisses sans le recouper : sa limite en +∞ est 0.

Propriété : Croissances comparées avec une puissance de x

Pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0^+} x^n\ln x = 0.$$

Lever une indétermination

Méthode : Lever une forme indéterminée avec ln

Les limites des deux énoncés précédents sont admises.

1. **Repère** la forme : $+\infty - \infty$, $0 \times \infty$ ou $\dfrac{\infty}{\infty}$.

2. **Mets en facteur** le terme le plus fort, pour voir apparaître $\frac{\ln x}{x}$, $x \ln x$, $\frac{\ln x}{x^n}$ ou $x^n \ln x$.
3. **Change de variable** si rien ne ressemble à une limite connue : pose $X = \sqrt{x}$, ou $X = x + 1$.
4. **Nomme** la limite de référence employée, puis écris l'interprétation graphique à part.

La limite $\frac{\ln x}{x} \to 0$ en $+\infty$ sert, directement ou par une variante, dans 8 des 15 sujets consultés.

Exemple : Deux limites (guidé)

En $+\infty$. Soit r la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $r(x) = x - 2\ln x$. C'est une forme $+\infty - \infty$. On factorise par x : pour tout $x > 0$,

$$r(x) = x\left(1 - 2 \times \frac{\ln x}{x}\right).$$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$: la parenthèse tend vers 1. Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} r(x) = +\infty$.

En 0^+. $x^2 \ln x$ est une forme $0 \times (-\infty)$. Par croissance comparée, avec $n = 2$:

$$\lim_{x \to 0^+} x^2 \ln x = 0.$$

Trouve l'erreur : Le quotient ln x / x près de 0

Un élève affirme : « $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{x} = 0$, par croissance comparée ». A-t-il raison ?

A. Oui : $\frac{\ln x}{x}$ tend vers 0.

Faux.

C'est vrai en $+\infty$, pas en 0^+.

B. Non : en 0^+, ce quotient tend vers $-\infty$.

Juste.

$\ln x \to -\infty$ et $\frac{1}{x} \to +\infty$: leur produit tend vers $-\infty$.

C. Non : c'est une forme indéterminée, il faut d'abord factoriser.

Faux.

En 0^+, il n'y a aucune indétermination : $(-\infty) \times (+\infty)$ donne $-\infty$.

Correction

Pour $x > 0$, $\frac{\ln x}{x} = \ln x \times \frac{1}{x}$. En 0^+, $\ln x \to -\infty$ et $\frac{1}{x} \to +\infty$: le produit tend vers $-\infty$.

Ce n'est **pas** une forme indéterminée.

La limite $\frac{\ln x}{x} \to 0$ ne vaut qu'en $+\infty$; en 0^+, la référence est $x \ln x \to 0$.

À toi : Une différence de logarithmes

Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} (\ln(x+1) - \ln x)$.

Indice 1

C'est une forme $+\infty - \infty$: regroupe en un seul logarithme.

Indice 2

Pour $x > 0$, pense au logarithme d'un quotient.

Réponse

Pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} &\ln(x+1) - \ln x \\ &= \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \\ &= \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

Quand $x \to +\infty$, $1 + \dfrac{1}{x} \to 1$, et $\ln$ est continue en 1.

La limite vaut donc $\ln 1 = 0$.

Branche parabolique

Exemple : La branche infinie de r (guidé)

On a vu que $\lim\limits_{x \to +\infty} r(x) = +\infty$.

1. **Quotient** : $\dfrac{r(x)}{x} = 1 - 2 \times \dfrac{\ln x}{x}$, qui tend vers 1.
2. **Différence** : $r(x) - x = -2 \ln x$, qui tend vers $-\infty$.
3. **Interprétation** : la courbe de r admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = x$.

Une question de ce type figure dans 7 des 15 sujets consultés, pour $0{,}5$ à $0{,}75$ point.

À toi : Avec un changement de variable

Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\ln x)^2}{x}$. Indication : pose $X = \sqrt{x}$.

Indice 1

Si $X = \sqrt{x}$, alors $x = X^2$ et $\ln x = \ln(X^2) = 2 \ln X$, car $X > 0$.

Indice 2

Remplace : $\dfrac{(\ln x)^2}{x} = \dfrac{4(\ln X)^2}{X^2} = 4\left(\dfrac{\ln X}{X}\right)^2$.

Indice 3

Quand $x \to +\infty$, $X \to +\infty$ aussi. Conclus avec la limite de référence.

Réponse

Soit $x > 0$, et posons $X = \sqrt{x}$. Alors $x = X^2$ et $\ln x = 2 \ln X$, donc :

$$\frac{(\ln x)^2}{x} = 4 \left(\frac{\ln X}{X} \right)^2.$$

Quand $x \to +\infty$, $X \to +\infty$ et $\dfrac{\ln X}{X} \to 0$. Donc :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0.$$

Cette limite apparaît dans 3 des 15 sujets consultés, souvent avec ce changement de variable indiqué par l'énoncé.

Le nombre dérivé en 1

Une dernière forme indéterminée : $\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ quand $x \to 0$.

Comme $\ln 1 = 0$, c'est un taux d'accroissement de $\ln$ en 1. Sa limite est donc le nombre dérivé $\ln'(1) = 1$.

Propriété : Limites liées au nombre dérivé de ln en 1

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1.$$

Ces deux limites traduisent $\ln'(1) = 1$: la tangente à la courbe de $\ln$ au point d'abscisse 1 a pour équation $y = x - 1$.

Vérifie : Reconnaître un taux

Que vaut $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+2x)}{x}$?

A. 2

Juste.
$\dfrac{\ln(1+2x)}{x} = 2 \times \dfrac{\ln(1+2x)}{2x}$, et le second facteur tend vers 1.

B. 1

Faux.
On a $\dfrac{\ln(1+2x)}{2x} \to 1$, mais ici le dénominateur est x, pas $2x$.

C. $\dfrac{1}{2}$

Faux.
Le facteur est à l'envers : $\dfrac{\ln(1+2x)}{x} = 2 \times \dfrac{\ln(1+2x)}{2x}$.

D. 0

Faux.
Le haut et le bas tendent vers 0 : c'est une forme indéterminée, dont la limite n'est pas forcément 0.

Correction
Soit $x > -\dfrac{1}{2}$ avec $x \neq 0$, et posons $X = 2x$. Alors :

$$\frac{\ln(1+2x)}{x} = 2 \times \frac{\ln(1+X)}{X}.$$

Quand $x \to 0$, $X \to 0$ et $\dfrac{\ln(1+X)}{X} \to 1$. La limite vaut donc 2.

Dériver ln(u) et remonter aux primitives

La dérivée de ln(u)

Comment dériver $x \mapsto \ln(x^2+1)$? C'est une composée : on applique $\ln$ au nombre x^2+1.

Tu connais la dérivée d'une composée.

Devine : Une composée avec ln

Quelle est la dérivée de $x \mapsto \ln(x^2+1)$ sur $\mathbb{R}$?

A. $\dfrac{1}{x^2+1}$
Faux.
Il manque la dérivée de l'argument : la dérivée d'une composée multiplie par $2x$.

B. $\dfrac{1}{2x}$
Faux.
On ne prend pas l'inverse de la dérivée de x^2+1 : on divise par x^2+1 lui-même.

C. $2x\ln(x^2+1)$
Faux.
La dérivée de $\ln$ est $X \mapsto \dfrac{1}{X}$, pas $\ln$ elle-même.

D. $\dfrac{2x}{x^2+1}$
Juste.
$\ln'\left(x^2+1\right) \times 2x = \dfrac{1}{x^2+1} \times 2x$.

Correction
Par la dérivée d'une composée, la dérivée cherchée est $x \mapsto \ln'(x^2+1) \times (x^2+1)'$. Pour tout réel x, elle vaut :

$$\frac{1}{x^2+1} \times 2x = \frac{2x}{x^2+1}.$$

L'énoncé suivant généralise ce calcul.

Théorème : Dérivée de ln(u)

Soit u une fonction dérivable et **strictement positive** sur un intervalle I. Alors la fonction $x \mapsto \ln(u(x))$ est dérivable sur I et, pour tout $x \in I$:

$$(\ln(u(x)))' = \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

Le signe de cette dérivée est celui de $u'(x)$.

Exemple : Deux dérivées (guidé)

1. Soit k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = \ln(x^2+1)$. L'argument x^2+1 est strictement positif pour tout réel x, de dérivée $2x$. Par la règle $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$: $k'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$.
2. Soit v la fonction définie sur $\left]-\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$ par $v(x) = \ln(2x+1)$; sur cet intervalle, $2x+1 > 0$. L'argument a pour dérivée 2, donc $v'(x) = \dfrac{2}{2x+1}$.

Trouve l'erreur : Dériver le carré de ln x

Un élève écrit : « pour $x > 0$, la dérivée de $x \mapsto (\ln x)^2$ est $\dfrac{2}{x}$ ». Qu'en penses-tu ?

A. C'est juste.

Faux.
$\dfrac{2}{x}$ est la dérivée de $x \mapsto \ln(x^2)$, une autre fonction.

B. C'est faux : la dérivée vaut $\dfrac{1}{(\ln x)^2}$.

Faux.
On ne dérive pas en inversant. La dérivée d'un carré w^2 est $2w'w$.

C. C'est faux : c'est le carré du nombre $\ln x$, donc la dérivée vaut $\dfrac{2\ln x}{x}$.

Juste.
La dérivée d'un carré w^2 est $2w'w$, avec ici $w' = \dfrac{1}{x}$.

D. C'est faux : la dérivée vaut $2\ln x$.

Faux.
Il manque le facteur $\dfrac{1}{x}$, dérivée de $\ln x$.

Correction

$(\ln x)^2$ est le carré du nombre $\ln x$. La dérivée d'un carré w^2 est $2w'w$, avec ici $w' = \dfrac{1}{x}$. Pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned}\left((\ln x)^2\right)' &= 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x \\ &= \frac{2\ln x}{x}.\end{aligned}$$

La fonction $x \mapsto \ln(x^2)$, elle, a pour dérivée $x \mapsto \dfrac{2x}{x^2} = \dfrac{2}{x}$: ne confonds pas les deux.

S'entraîner à dériver

Attention : Le u′ au numérateur

La dérivée de $\ln(u)$ est $\dfrac{u'}{u}$, pas $\dfrac{1}{u}$.

Pour $x > -1$, la dérivée de $x \mapsto \ln(x+1)$ est bien $\dfrac{1}{x+1}$, car la dérivée de $x+1$ vaut 1.

Mais pour $x \mapsto \ln(x^2+1)$, il faut $\dfrac{2x}{x^2+1}$, et non $\dfrac{1}{x^2+1}$.

À toi : Dériver une différence

Pour $x > 1$, quelle est la dérivée de $x \mapsto \ln(x+1) - \ln(x-1)$?

A. $-\dfrac{2}{x^2-1}$

Juste.

$\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{(x-1)-(x+1)}{x^2-1}$.

B. $\dfrac{2x}{x^2-1}$

Faux.

C'est la dérivée de la **somme** $\ln(x+1) + \ln(x-1)$.

C. $\dfrac{2}{x^2-1}$

Faux.

Attention au signe : pour $x > 1$, $\dfrac{1}{x+1} < \dfrac{1}{x-1}$, donc la différence est négative.

D. 0

Faux.

Les dérivées $\dfrac{1}{x+1}$ et $\dfrac{1}{x-1}$ ne sont pas égales.

Correction

Pour $x > 1$, on a $x+1 > 0$ et $x-1 > 0$. Par la règle $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$, la dérivée vaut :

$$\begin{aligned}\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}&=\frac{(x-1)-(x+1)}{(x+1)(x-1)}\\&=-\frac{2}{x^2-1}.\end{aligned}$$

Pour $x>1$, $x^2-1>0$: la dérivée est négative, et la fonction décroît sur $]1,+\infty[$.

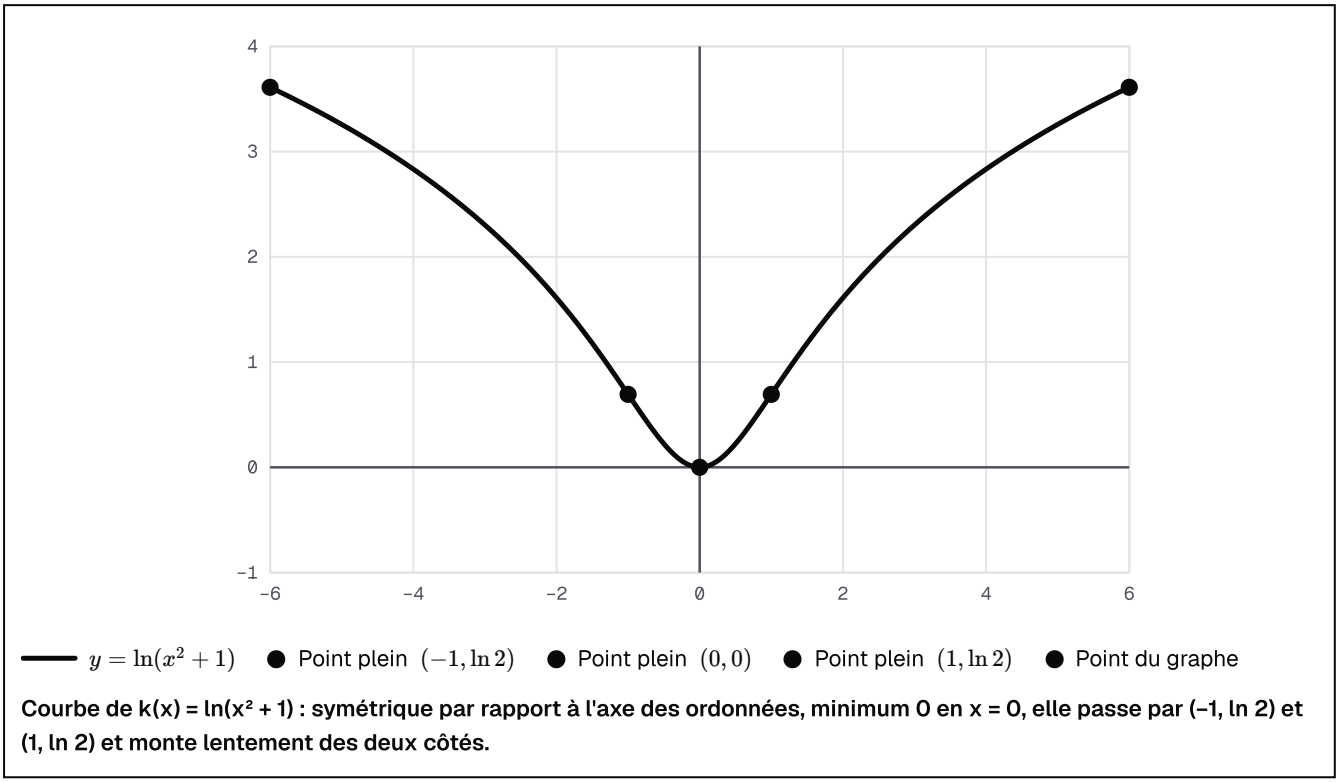
Les variations de k

Pour tout réel x, $x^2+1>0$: le signe de $k'(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$ est celui de $2x$. De plus, $k(0)=\ln 1=0$.

Enfin, x^2+1 tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et en $-\infty$. Par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty}k(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}k(x)=+\infty$.

Variations de k(x) = ln(x² + 1) : décroissante sur]−∞, 0], croissante sur [0, +∞[, minimum k(0) = 0.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$k'(x)$		−	0	+	
$k(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$



Courbe de k(x) = ln(x² + 1) : symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, minimum 0 en x = 0, elle passe par (−1, ln 2) et (1, ln 2) et monte lentement des deux côtés.

Avec une valeur absolue

Propriété : Dérivée de ln|u|

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I qui **ne s'annule pas** sur I. Alors $x \mapsto \ln|u(x)|$ est dérivable sur I et, pour tout $x \in I$:

$$(\ln|u(x)|)' = \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

Le quotient $\frac{u'}{u}$ s'appelle la **dérivée logarithmique** de u.

Exemple : Dériver ln|x – 1| (guidé)

La fonction $x \mapsto \ln|x-1|$ est définie pour $x \neq 1$, c'est-à-dire sur $]-\infty, 1[$ et sur $]1, +\infty[$.

Sur chacun de ces intervalles, $x - 1$ ne s'annule pas et a pour dérivée 1. Par la règle $(\ln|u|)' = \frac{u'}{u}$, sa dérivée vaut $\frac{1}{x-1}$ des deux côtés.

Sur $]-\infty, 1[$, cette dérivée est négative : la fonction y décroît.

Remonter aux primitives

Propriété : Primitives de u'/u

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I, de dérivée u' continue, qui ne s'annule pas sur I. Les primitives de $\frac{u'}{u}$ sur I sont les fonctions

$$x \mapsto \ln|u(x)| + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Si $u > 0$ sur I, elles s'écrivent $x \mapsto \ln(u(x)) + c$.

Méthode : Reconnaître une forme u'/u

1. **Regarde le dénominateur** u et calcule sa dérivée u'.
2. **Compare** avec le numérateur : il doit valoir u', à un facteur constant près.
3. **Ajuste** ce facteur, puis écris $\ln|u| + c$. Remplace $|u|$ par u si $u > 0$ sur l'intervalle.

Exemple. Pour tout réel x :

$$\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{2} \times \frac{2x}{x^2+1}.$$

Les primitives de $x \mapsto \frac{x}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$ sont donc les fonctions $x \mapsto \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c$, où c est une constante réelle.

À toi : Trouver une primitive

Sur $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$, quelle fonction est une primitive de $x \mapsto \frac{3}{2x+1}$?

A. $x \mapsto \frac{2}{3}\ln(2x+1)$

Faux.

Sa dérivée vaut $\frac{2}{3} \times \frac{2}{2x+1} = \frac{4}{3(2x+1)}$.

B. $x \mapsto \frac{3}{2}\ln(2x+1)$

Juste.

Sa dérivée vaut $\frac{3}{2} \times \frac{2}{2x+1} = \frac{3}{2x+1}$.

C. $x \mapsto 3\ln(2x+1)$

Faux.

Sa dérivée vaut $3 \times \frac{2}{2x+1} = \frac{6}{2x+1}$: deux fois trop.

Indice 1

Fais apparaître $\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = 2x+1$, dont la dérivée vaut 2.

Correction

Pour $x > -\frac{1}{2}$, posons $u(x) = 2x+1$: alors $u(x) > 0$ et $u'(x) = 2$. On écrit :

$$\frac{3}{2x+1} = \frac{3}{2} \times \frac{2}{2x+1}.$$

C'est $\frac{3}{2} \times \frac{u'}{u}$: une primitive est $x \mapsto \frac{3}{2}\ln(2x+1)$.

Vérification. Sa dérivée vaut $\frac{3}{2} \times \frac{2}{2x+1} = \frac{3}{2x+1}$.

À toi : Une primitive à gauche de 1

Détermine les primitives de $x \mapsto \frac{1}{x-1}$ sur $]-\infty, 1[$.

Indice 1

Le numérateur 1 est la dérivée du dénominateur $x-1$.

Indice 2

Sur $]-\infty, 1[$, $x-1 < 0$: la valeur absolue est indispensable.

Réponse

Sur $]-\infty, 1[$, le dénominateur $x-1$ ne s'annule pas et a pour dérivée 1.

Les primitives de $x \mapsto \frac{1}{x-1}$ sur cet intervalle sont donc les fonctions $x \mapsto \ln|x-1| + c$, avec $c \in \mathbb{R}$.

> Écrire $\ln(x-1)$ serait faux : ce logarithme n'existe pas pour $x < 1$.

Une étude complète, comme au bac

Le plan du problème

Voici une étude complète, organisée comme un problème de bac.

Dans 5 des 15 sujets consultés, une **fonction auxiliaire** contenant $\ln$ est étudiée pour son signe. Ici, ce signe donnera celui de la dérivée.

On considère les fonctions f et g définies sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = x - \frac{\ln x}{x}$$

et

$$g(x) = x^2 - 1 + \ln x.$$

Partie A : le signe de g

Exemple : Étude de g (guidé)

1. **Dérivée** : pour tout $x > 0$, $g'(x) = 2x + \dfrac{1}{x}$. Les deux termes sont strictement positifs, donc $g'(x) > 0$: g est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.
2. **Valeur clé** : $g(1) = 1 - 1 + \ln 1 = 0$.
3. **Signe** : g est strictement croissante et s'annule en 1. Donc $g(x) < 0$ sur $]0, 1[$ et $g(x) > 0$ sur $]1, +\infty[$.

Signe de g(x) = x² − 1 + ln x : négatif sur]0, 1[, nul en 1, positif sur]1, +∞[.

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$	‖	−	0	+	

Partie B : la dérivée de f

À toi : Montrer une formule de dérivée

Montre que, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

Indice 1
Dérive $\dfrac{\ln x}{x}$ comme un quotient, avec $\ln x$ en haut et x en bas.
Indice 2

Tu dois trouver $\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)' = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

Indice 3

Mets $1 - \dfrac{1-\ln x}{x^2}$ au même dénominateur x^2.

Réponse

Dérivée du quotient. Par la règle de dérivation d'un quotient, pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\ln x}{x}\right)' \\ &= \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x \times 1}{x^2} \\ &= \frac{1-\ln x}{x^2}.\end{aligned}$$

Dérivée de f. Donc, pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned}f'(x) &= 1 - \frac{1-\ln x}{x^2} \\ &= \frac{x^2 - 1 + \ln x}{x^2} \\ &= \frac{g(x)}{x^2}.\end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

Méthode : Coin examen : la dérivée et son signe

Dans 12 des 15 sujets consultés, une question demande de montrer une formule de dérivée, pour $0{,}5$ à 1 point.

Certains barèmes notent à part la règle de dérivation et le calcul : écris la règle que tu utilises. Ensuite, rédige le signe ainsi :

> Pour tout $x > 0$, $x^2 > 0$, donc $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$.

Vérifie : Le minimum de f

Quel est le minimum de f sur $]0, +\infty[$?

A. 0, atteint en $x = 1$

Faux.

$f(1) = 1 - \dfrac{\ln 1}{1} = 1 - 0 = 1.$

B. 1, atteint en $x = 1$

Juste.

f' a le signe de g : f décroît avant 1, croît après, et $f(1) = 1$.

C. Il n'y en a pas, car f n'est pas monotone.

Faux.

Justement : f décroît puis croît. Elle atteint donc un minimum là où elle change de sens.

D. 1, atteint en $x = \mathrm{e}$

Faux.

$g(\mathrm{e}) = \mathrm{e}^2 \neq 0$: f' ne s'annule pas en e. Et $f(\mathrm{e}) = \mathrm{e} - \dfrac{1}{\mathrm{e}} \approx 2{,}35$.

Indice 1

Le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$, que tu connais par la partie A.

Correction

Pour tout $x > 0$, $f'(x)$ a le signe de $g(x)$: négatif sur $]0, 1[$, positif sur $]1, +\infty[$.

Donc f décroît sur $]0, 1]$ et croît sur $[1, +\infty[$. Son minimum est :

$$f(1) = 1 - \frac{\ln 1}{1} = 1.$$

Ainsi, pour tout $x > 0$, $f(x) \geq 1$.

Partie C : limites et asymptotes

Exemple : Limites aux bornes (guidé)

En 0^+. $\ln x \to -\infty$ et $\dfrac{1}{x} \to +\infty$, donc $\dfrac{\ln x}{x} \to -\infty$. Comme $x \to 0$, on obtient $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$.

Interprétation : la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à la courbe de f.

En $+\infty$. Par croissance comparée, $\dfrac{\ln x}{x} \to 0$. Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. De plus, $f(x) - x = -\dfrac{\ln x}{x}$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x) = 0$.

Interprétation : la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote oblique à la courbe de f en $+\infty$.

Vérifie : Au-dessus ou au-dessous ?

Sur quel intervalle la courbe de f est-elle **au-dessus** de la droite (D) d'équation $y = x$?

A. $]1, +\infty[$

Faux.

Pour $x > 1$, $\ln x > 0$, donc $f(x) - x = -\dfrac{\ln x}{x} < 0$: la courbe est en dessous.

B. $]0, +\infty[$

Faux.

La différence $f(x) - x$ s'annule en 1 et change de signe.

C. Nulle part : une courbe reste toujours d'un seul côté de son asymptote.

Faux.

Une courbe peut passer d'un côté à l'autre de son asymptote. Ici, elles se coupent en $(1, 1)$.

D. $]0,1[$

Juste.

Pour $0<x<1$, $\ln x<0$ et $x>0$, donc $f(x)-x>0$.

Indice 1

Étudie le signe de $f(x)-x$.

Correction

On étudie le signe de $f(x)-x=-\dfrac{\ln x}{x}$. Comme $x>0$, il est l'opposé de celui de $\ln x$:

- positif sur $]0,1[$;
- nul en 1 ;
- négatif sur $]1,+\infty[$.

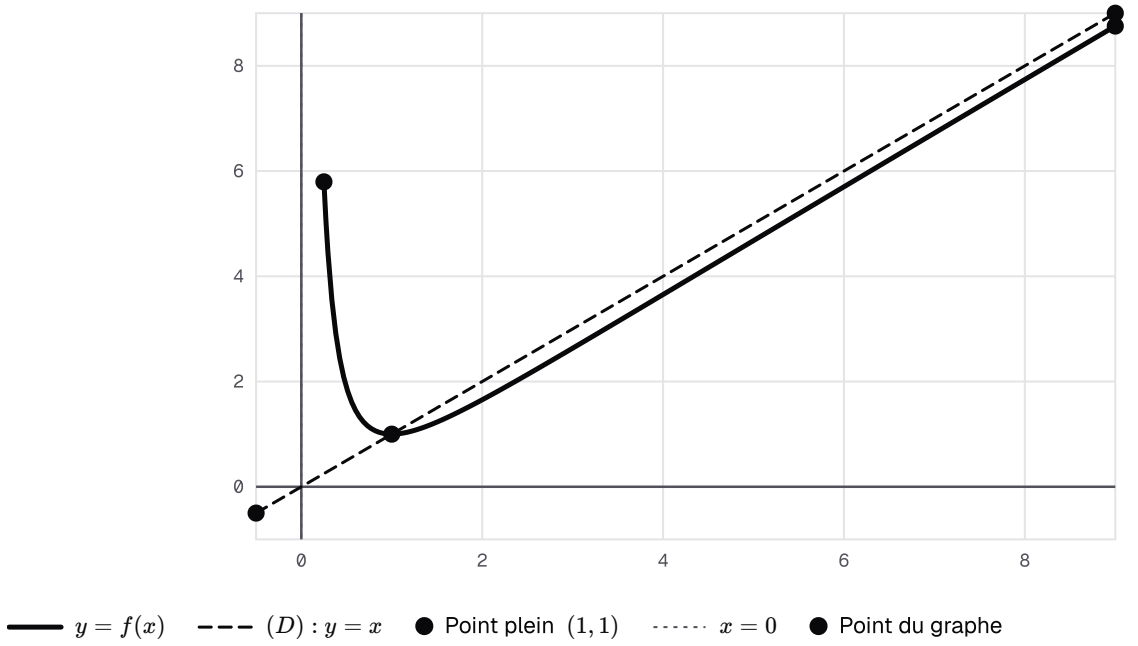
Conclusion. La courbe est au-dessus de (D) sur $]0,1[$, en dessous sur $]1,+\infty[$, et la coupe au point $(1,1)$.

Cette question de position figure dans 5 des 15 sujets consultés.

Partie D : tableau et courbe

Variations de f : le signe de f′(x) est celui de g(x). f décroît sur]0, 1], croît sur [1, +∞[, et atteint son minimum f(1) = 1.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	−	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$



Courbe de f et son asymptote oblique (D) : y = x. La courbe descend le long de l'asymptote verticale x = 0 jusqu'au minimum (1, 1), où elle coupe (D), puis remonte sous (D) en s'en rapprochant.

À toi : Une tangente parallèle à l'asymptote

Montre que la tangente à la courbe de f au point d'abscisse e est parallèle à (D).

Indice 1

Deux droites sont parallèles si elles ont la même pente. Quelle est la pente de (D) ?

Indice 2

Calcule $f'(\mathrm{e}) = \dfrac{g(\mathrm{e})}{\mathrm{e}^2}$, avec $\ln \mathrm{e} = 1$.

Réponse

Pente. On a $g(\mathrm{e}) = \mathrm{e}^2 - 1 + \ln \mathrm{e} = \mathrm{e}^2$, donc :

$$f'(\mathrm{e}) = \frac{g(\mathrm{e})}{\mathrm{e}^2} = \frac{\mathrm{e}^2}{\mathrm{e}^2} = 1.$$

Conclusion. La tangente au point d'abscisse e a pour pente 1, comme (D) : elles sont parallèles.

Comme $f(\mathrm{e}) = \mathrm{e} - \dfrac{1}{\mathrm{e}}$, cette tangente a pour équation $y = x - \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

Le mot du prof. Tu viens de traiter les questions les plus fréquentes du problème : dérivée, signe par une fonction auxiliaire, limites avec leur interprétation, position par rapport à une droite.

D'un sujet à l'autre, elles se rédigent presque de la même façon.

Logarithme de base a et logarithme décimal

Changer de base

En chimie, le **pH** d'une solution aqueuse se calcule avec un logarithme en base 10. Si la concentration en ions oxonium vaut 10^{-3} mole par litre, le pH vaut 3.

Ce logarithme se construit à partir de $\ln$.

Définition : Logarithme de base a

Soit a un réel tel que $a > 0$ et $a \neq 1$. La **fonction logarithme de base** a, notée $\log_a$, est définie sur $]0, +\infty[$ par

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

On a $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$, et $\log_{\mathrm{e}} = \ln$.

Propriété : Propriétés du logarithme de base a

Soit $a > 0$ avec $a \neq 1$. Pour tous réels $x > 0$ et $y > 0$ et tout rationnel r :

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y, \qquad \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y, \qquad \log_a(x^r) = r \log_a x.$$

En particulier $\log_a(a^r) = r$. La fonction $\log_a$ est dérivable sur $]0, +\infty[$, de dérivée $x \mapsto \dfrac{1}{x \ln a}$: elle est strictement croissante si $a > 1$, strictement décroissante si $0 < a < 1$.

Exemple : Calculer en base 2 (guidé)

Par définition du logarithme de base 2 :

$$\log_2 8 = \frac{\ln 8}{\ln 2} = \frac{3 \ln 2}{\ln 2} = 3.$$

De même, $\log_2\left(\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{-2 \ln 2}{\ln 2} = -2$, et $\log_2 \sqrt{2} = \dfrac{1}{2}$.

En base 2, le logarithme compte les doublements.

À toi : Une base inférieure à 1

Que vaut $\log_{\frac{1}{2}} 8$?

A. -3

Juste.

$\ln\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\ln 2$, d'où le signe moins.

B. 3

Faux.

C'est $\log_2 8$. Ici la base est $\dfrac{1}{2}$, dont le logarithme est négatif.

C. $-\dfrac{1}{3}$

Faux.

Le quotient est à l'envers : $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$, avec $\ln x$ en haut.

D. 4

Faux.

Ce n'est pas $8 \times \dfrac{1}{2}$: un logarithme n'est pas un produit.

Correction

Par définition, et comme $\ln\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\ln 2$:

$$\log_{\frac{1}{2}} 8 = \frac{\ln 8}{\ln \frac{1}{2}} = \frac{3\ln 2}{-\ln 2} = -3.$$

Vérification. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3} = 2^3 = 8.$

Le logarithme décimal

Propriété : Logarithme décimal

Le **logarithme décimal**, noté $\log$, est le logarithme de base 10 : $\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$ pour $x > 0$.

Pour tout rationnel r, $\log(10^r) = r$; par exemple $\log 1000 = 3$ et $\log 0{,}01 = -2$. Pour $x > 0$ et r rationnel : $\log x = r \iff x = 10^r$.

Vérifie : Une équation en base 10

Pour $x > 0$, l'équation $\log x = 4$ équivaut à :

A. $x = 40$

Faux.

$\log 40 = \log 4 + 1 \approx 1{,}60$: on est loin de 4.

B. $x = \mathrm{e}^4$

Faux.

C'est la solution de $\ln x = 4$, environ $54{,}6$. $\log$ et $\ln$ n'ont pas la même base.

C. $x = 10\,000$

Juste.

$\log x = 4 \iff x = 10^4$.

D. $x = 4^{10}$

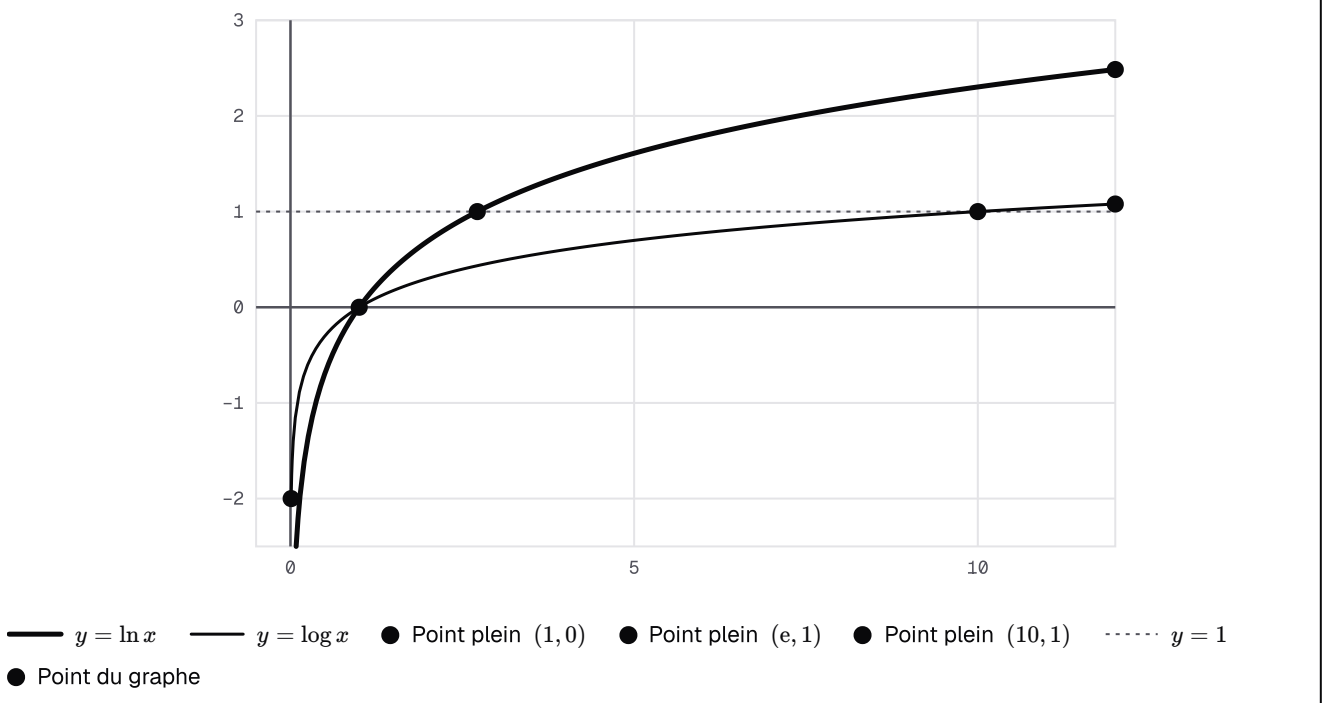
Faux.

Base et exposant sont échangés : $\log(4^{10}) = 10\log 4 \approx 6{,}02$.

Correction

Pour $x > 0$: $\log x = 4 \iff x = 10^4 = 10\,000$.

Vérification. $\log 10\,000 = \log(10^4) = 4$.



Courbes de ln et de log : toutes deux passent par (1, 0). La droite y = 1 coupe celle de ln en x = e et celle de log en x = 10. Les ordonnées de log sont celles de ln divisées par ln 10 ≈ 2,30.

Retour au pH. Le pH vaut $-\log c$, où c est la concentration en ions oxonium, en mole par litre.

Si c est divisée par 10, le pH augmente de 1 :

$$-\log\left(\frac{c}{10}\right) = -\log c + 1.$$

Les logarithmes de base a et décimal sont absents des 15 sujets de bac consultés : cette partie reste courte.

Bilan du chapitre

Ce qu'il faut retenir

À retenir : L'essentiel en six lignes

- $\ln$ est définie sur $]0, +\infty[$, avec $\ln 1 = 0$, $\ln \mathrm{e} = 1$ et $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.
- Elle est strictement croissante : négative avant 1, positive après.
- Elle change les produits en sommes, pour des nombres **strictement positifs**.
- Équations et inéquations : le domaine d'abord, le tri des solutions à la fin.

- Limites : $-\infty$ en 0^+, $+\infty$ en $+\infty$; en croissance comparée, les puissances de x l'emportent sur $\ln x$.
- $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$ quand $u > 0$; les primitives de $\dfrac{u'}{u}$ sont les $\ln|u| + c$.

Limite en 0⁺

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$$

Limite en +∞

$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$$

Croissance comparée en +∞

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

Croissance comparée en 0⁺

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0$$

Taux en 1

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Produit, pour a > 0 et b > 0

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b$$

Un dernier test

Vérifie : Une seule est vraie

Parmi ces affirmations, laquelle est vraie ?

A. Pour tout réel $x \neq 0$, $\ln(x^2) = 2\ln x$.

Faux.

Pour $x < 0$, $\ln x$ n'existe pas. On écrit $2\ln|x|$.

B. $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x = -\infty$

Faux.

Croissance comparée : $x \ln x \to 0$ en 0^+.

C. La dérivée de $x \mapsto \ln(2x+1)$ est $\dfrac{1}{2x+1}$.

Faux.

Il manque la dérivée de $2x+1$ au numérateur : $\dfrac{2}{2x+1}$.

D. Pour tout $x > 0$, $\ln(x+1) > \ln x$.

Juste.

$x + 1 > x > 0$ et $\ln$ est strictement croissante.

Correction

Pour $x > 0$, on a $x + 1 > x > 0$, et $\ln$ est strictement croissante. Donc $\ln(x+1) > \ln x$.

Les trois autres affirmations sont fausses. Voici les énoncés exacts :

- pour $x \neq 0$, $\ln(x^2) = 2\ln|x|$;
- $x \ln x \to 0$ en 0^+ ;

- la dérivée de $x \mapsto \ln(2x+1)$ est $x \mapsto \dfrac{2}{2x+1}$.

Le mot du prof. Tu sais maintenant étudier une fonction avec $\ln$ de bout en bout.

C'est le cœur du problème de bac : $\ln$ apparaît dans 12 des 15 sujets consultés, et la fonction principale du problème la contient dans 10 des 15.

Le chapitre suivant, sur l'exponentielle, s'appuiera sur tout ce que tu viens d'apprendre.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Fonctions logarithmiques » (2bac · sciences-experimentales · mathematiques)