BURHAN

Fonctions exponentielles : exercices, niveau examen

2ème Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-experimentales/mathematiques/fonctions-exponentielles/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Fonctions exponentielles	Niveau examen	5

Exercice 1 — 7,25 pts

Problème : asymptote oblique, inflexion et réciproque

Partie A. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x - 2x$.

Partie B. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x + 2(x+1)e^{-x}.$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe dans un repère orthonormé.

A.1. — 0,75 pts

Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Résous $g'(x) = 0$, c'est-à-dire $e^x = 2$.

A.2. — 0,5 pts

En déduire que $g(x) > 0$ pour tout réel x.

INDICE

Compare $\ln 2$ à $\ln e = 1$.

B.1. — 0,75 pts

Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Montrer que la droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

INDICE

Écris $(x+1)e^{-x} = \dfrac{x}{e^x} + e^{-x}$ et utilise une croissance comparée.

B.2. — 0,5 pts

Étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et de Δ.

INDICE

Factorise $f(x) - x$; quel facteur garde un signe constant ?

B.3. — 0,75 pts

Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement.

INDICE

En $-\infty$, e^{-x} tend vers $+\infty$. Pour le quotient, écris $\dfrac{f(x)}{x} = 1 + 2 \times \dfrac{x+1}{x} \times e^{-x}$.

B.4. — 1 pts

Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = e^{-x} g(x)$. Dresser le tableau de variations de f.

INDICE

Dérive $(x+1)e^{-x}$ comme un produit, puis vérifie que $e^{-x} g(x) = 1 - 2xe^{-x}$.

B.5. 0,75 pts

Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$, et que $-0{,}9 < \alpha < -0{,}8$.

INDICE

Continuité, stricte monotonie, image de $\mathbb{R}$, puis le signe de $f(-0{,}9)$ et de $f(-0{,}8)$.

B.6. 0,75 pts

Calculer $f''(x)$ et montrer que $\mathcal{C}$ admet un point d'inflexion dont on donnera les coordonnées.

INDICE

Dérive $f'(x) = 1 - 2xe^{-x}$. Un point d'inflexion exige que f'' s'annule **et change de signe**.

B.7. 0,75 pts

Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$. Calculer $f(-1)$, puis $\left(f^{-1}\right)'(-1)$.

INDICE

Si f est dérivable en a et $f'(a) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $f(a)$ et $\left(f^{-1}\right)'(f(a)) = \dfrac{1}{f'(a)}$.

B.8. 0,75 pts

Construire $\mathcal{C}$ et ses droites remarquables dans un repère orthonormé.

INDICE

Trace d'abord Δ, puis place les points calculés ; respecte la position relative et la branche en $-\infty$.

Exercice 2 5,5 pts

Problème : le logarithme d'un trinôme en e^x

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \ln\left(e^{2x} - e^{x} + 1\right).$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. 0,75 pts

Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$. Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et interpréter graphiquement.

INDICE

Avec $X = e^{x}$, la quantité sous le logarithme est $X^2 - X + 1$: calcule son discriminant.

2. 0,5 pts

Montrer que, pour tout réel x :

$$f(x) = 2x + \ln\left(1 - e^{-x} + e^{-2x}\right).$$

INDICE

Mets e^{2x} en facteur sous le logarithme.

3. 0,75 pts

Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Montrer que la droite D d'équation $y = 2x$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$, puis étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et de D.

INDICE

Compare $1 - e^{-x} + e^{-2x}$ à 1, c'est-à-dire e^{-2x} à e^{-x}.

4. 1 pts

Montrer que, pour tout réel x :

$$f'(x) = \frac{e^{x}\left(2e^{x} - 1\right)}{e^{2x} - e^{x} + 1}.$$

Dresser le tableau de variations de f.

INDICE

Dérive $\ln\left(u(x)\right)$ en $\dfrac{u'(x)}{u(x)}$. Le dénominateur est positif : regarde quand $2e^{x} - 1$ change de signe.

5. 0,5 pts

Donner une équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ à l'origine. Montrer que, pour tout réel x :

$$f(x) - x = \ln\left(\frac{e^{2x} - e^x + 1}{e^x}\right),$$

puis que $\mathcal{C}$ est au-dessus de T.

INDICE

Écris $x = \ln(e^x)$. Pour comparer le quotient à 1, pose $X = e^x$ et pense à $(X-1)^2 \geq 0$.

6. 0,75 pts

Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution réelle α, et que $0{,}6 < \alpha < 0{,}7$. Calculer ensuite la valeur exacte de α.

INDICE

Sur $]-\infty, -\ln 2]$, compare $f(x)$ à 0 grâce au tableau. Sur $[-\ln 2, +\infty[$, utilise la stricte monotonie. Pour la valeur exacte, pose $X = e^x$.

7. 0,5 pts

On admet que, pour tout réel x :

$$f''(x) = \frac{e^x\left(-e^{2x} + 4e^x - 1\right)}{\left(e^{2x} - e^x + 1\right)^2}.$$

Montrer que $\mathcal{C}$ admet deux points d'inflexion, dont on donnera les abscisses.

INDICE

Le signe de $f''(x)$ est celui de $-X^2 + 4X - 1$ avec $X = e^x$. Ses deux racines sont-elles positives ?

8. 0,75 pts

Construire $\mathcal{C}$ et ses droites remarquables dans un repère orthonormé.

INDICE

Place d'abord les asymptotes et la tangente, puis les points connus, et respecte le sens de variation et la position relative.

Exercice 3 5 pts

Problème : deux asymptotes et une réciproque explicite

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \ln\left(1 + 2e^{-x}\right).$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe dans un repère orthonormé.

1. 0,5 pts

Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat.

INDICE

Quand x tend vers $+\infty$, vers quoi tend $1 + 2e^{-x}$? Utilise la continuité de $\ln$ en 1.

2. a) 0,5 pts

Montrer que, pour tout réel x :

$$f(x) = -x + \ln\left(e^{x} + 2\right).$$

INDICE

Mets e^{-x} en facteur dans $1 + 2e^{-x}$, puis utilise $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.

2. b) 0,5 pts

En déduire $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, puis montrer que la droite D d'équation $y = -x + \ln 2$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $-\infty$.

INDICE

Étudie la différence $f(x) - (-x + \ln 2)$ et écris-la avec un seul logarithme.

2. c) 0,25 pts

Étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et de D.

INDICE

Écris $\ln\left(e^{x} + 2\right) - \ln 2 = \ln\left(\dfrac{e^{x} + 2}{2}\right)$ et compare le quotient à 1.

3. 0,75 pts

Montrer que, pour tout réel x :

$$f'(x) = -\frac{2}{e^{x} + 2}.$$

Dresser le tableau de variations de f.

INDICE

La dérivée de $\ln\left(u(x)\right)$ est $\dfrac{u'(x)}{u(x)}$. Multiplie ensuite numérateur et dénominateur par e^{x}.

4. 0,5 pts

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 1$.

INDICE

Pour $A > 0$, $\ln A = 1$ équivaut à $A = e$. Isole ensuite e^{-x}.

5. 0,5 pts

Calculer $f''(x)$ et en déduire que $\mathcal{C}$ n'admet pas de point d'inflexion.

INDICE

Dérive $f'(x) = -2\left(e^{x}+2\right)^{-1}$ comme une composée.

6. a) 1 pts

Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à préciser, et que, pour tout x de J :

$$f^{-1}(x) = \ln 2 - \ln\left(e^{x}-1\right).$$

INDICE

Résous $f(x) = y$ d'inconnue x, pour y dans J : passe à l'exponentielle, puis isole e^{-x}. Le signe de $e^{y}-1$ compte.

6. b) 0,5 pts

Calculer $f(0)$, puis $\left(f^{-1}\right)'(\ln 3)$ de deux façons : avec la formule de la dérivée d'une réciproque, puis en dérivant l'expression de f^{-1}.

INDICE

Si $f'(a) \neq 0$, alors $\left(f^{-1}\right)'(f(a)) = \dfrac{1}{f'(a)}$.

Exercice 4 4,5 pts

Problème : deux points d'inflexion et trois solutions

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x-1)^2 e^x.$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe dans un repère orthonormé.

1. 0,75 pts

Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et interpréter graphiquement.

INDICE

Développe $(x-1)^2$, puis utilise les croissances comparées de $x^2 e^x$ et de xe^x en $-\infty$.

2. 0,5 pts

Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, puis interpréter graphiquement.

INDICE

Pour le quotient, écris $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{(x-1)^2}{x} \times e^x$.

3. 1 pts

Montrer que, pour tout réel x :

$$f'(x) = (x-1)(x+1)e^x.$$

Dresser le tableau de variations de f.

INDICE

Dérive le produit, puis mets $(x-1)e^x$ en facteur.

4. 0,5 pts

Donner une équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

INDICE

Calcule $f(0)$ et $f'(0)$.

5. 0,75 pts

Montrer que, pour tout réel x :

$$f''(x) = \left(x^2 + 2x - 1\right) e^x.$$

En déduire que $\mathcal{C}$ admet deux points d'inflexion, dont on donnera les abscisses.

INDICE

Écris $f'(x) = \left(x^2 - 1\right) e^x$ avant de dériver. Résous ensuite $x^2 + 2x - 1 = 0$.

6. 1 pts

Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet exactement trois solutions réelles : l'une est 0, et les deux autres, notées β et γ, vérifient $-3 < \beta < -2$ et $1{,}4 < \gamma < 1{,}5$.

INDICE

Travaille sur chacun des trois intervalles du tableau de variations, où f est strictement monotone. Compare $\dfrac{4}{e}$ à 1.

Exercice 5 6,25 pts

Problème : continuité en 0 et relation entre f(−x) et f(x)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. 0,75 pts

Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$, puis montrer que f est continue en 0.

INDICE

Pour $x \neq 0$, écris $f(x) = \dfrac{1}{\dfrac{e^x - 1}{x}}$ et utilise la limite de référence $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$, nombre dérivé de l'exponentielle en 0.

2. a) 0,5 pts

Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat.

INDICE

Pour $x > 0$, écris $f(x) = \dfrac{x}{e^x} \times \dfrac{1}{1 - e^{-x}}$.

2. b) 0,5 pts

Établir la relation $f(-x) = f(x) + x$, valable pour chaque réel x.

INDICE

Pour $x \neq 0$, multiplie le numérateur et le dénominateur de $f(-x)$ par e^x. Traite à part le cas $x = 0$.

2. c) 0,75 pts

En déduire $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, puis montrer que la droite D d'équation $y = -x$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $-\infty$. Étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et de D.

INDICE

D'après 2. b), $f(x) - (-x) = f(-x)$. Quand x tend vers $-\infty$, $-x$ tend vers $+\infty$: utilise 2. a). Pour le signe, compare le signe de x et celui de $e^x - 1$.

3. a) 0,75 pts

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = (1 - x)e^x - 1.$$

Étudier les variations de g, puis en déduire que $g(x) < 0$ pour tout réel $x \neq 0$.

INDICE

Dérive le produit $(1 - x)e^x$, puis regarde la valeur de g en 0.

3. b) 1 pts

Montrer que, pour tout réel $x \neq 0$:

$$f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x - 1)^2}.$$

Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Dérive le quotient $\frac{x}{e^x - 1}$. Pour le sens de variation sur $\mathbb{R}$ tout entier, utilise aussi la continuité de f en 0 (question 1).

4. 0,75 pts

Retrouver, à l'aide du tableau de variations de f et sans utiliser le résultat du cours, que, pour tout réel $x \neq 0$, $e^x > 1 + x$. Interpréter graphiquement pour la courbe de la fonction $x \mapsto e^x$.

INDICE

Compare $f(x)$ à $f(0) = 1$ selon le signe de x, puis multiplie par $e^x - 1$ en tenant compte de son signe.

5. 0,75 pts

Déterminer les points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de la droite Δ d'équation $y = x$. Donner une équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse $\ln 2$.

INDICE

Pour $x \neq 0$, l'équation $f(x) - x = 0$ équivaut à $x\,(e^x - 2) = 0$. Pense ensuite à $e^{\ln 2} = 2$ et à $g(\ln 2)$.

6. 0,5 pts

Construire $\mathcal{C}$ et ses droites remarquables dans un repère orthonormé.

INDICE

Place d'abord les asymptotes, puis les points connus et la tangente T ; respecte la décroissance et la position par rapport à D.