BURHAN

Fonctions exponentielles : exercices, niveau examen

2ème Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-experimentales/mathematiques/fonctions-exponentielles/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Fonctions exponentielles	Niveau examen	5

Exercice 1 7,25 pts

Problème : asymptote oblique, inflexion et réciproque

Partie A. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x - 2x$.

Partie B. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x + 2(x+1)e^{-x}.$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe dans un repère orthonormé.

A.1. 0,75 pts

Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Résous $g'(x) = 0$, c'est-à-dire $e^x = 2$.

CORRIGÉ

Dérivée. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $g'(x) = e^x - 2$.

Signe. L'exponentielle étant strictement croissante, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} & e^x - 2 > 0 \\ \iff\ & e^x > 2 \\ \iff\ & x > \ln 2. \end{aligned}$$

De même, $g'(x) < 0$ pour $x < \ln 2$, et $g'(\ln 2) = 0$.

Minimum. Il est atteint en $\ln 2$:

$$\begin{aligned} g(\ln 2) &= e^{\ln 2} - 2\ln 2 \\ &= 2 - 2\ln 2. \end{aligned}$$

Conclusion. g est strictement décroissante sur $]-\infty, \ln 2]$ et strictement croissante sur $[\ln 2, +\infty[$, de minimum $g(\ln 2) = 2 - 2\ln 2$.

A.2. 0,5 pts

En déduire que $g(x) > 0$ pour tout réel x.

INDICE

Compare $\ln 2$ à $\ln e = 1$.

CORRIGÉ

Signe du minimum. Comme $2 < e$ et que $\ln$ est strictement croissante, $\ln 2 < \ln e = 1$, donc $2\ln 2 < 2$ et $2 - 2\ln 2 > 0$.

Conclusion. Le minimum de g est strictement positif : pour tout réel x, $g(x) \geq 2 - 2\ln 2 > 0$.

B.1. 0,75 pts

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Montrer que la droite Δ d'équation $y=x$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

INDICE

Écris $(x+1)e^{-x} = \dfrac{x}{e^x} + e^{-x}$ et utilise une croissance comparée.

CORRIGÉ

Écart à la droite. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f(x) - x &= 2(x+1)e^{-x} \\ &= 2\left(\frac{x}{e^x} + e^{-x}\right). \end{aligned}$$

Limites. Par croissance comparée, $\dfrac{x}{e^x}$ tend vers 0 en $+\infty$; de plus e^{-x} tend vers 0. Donc $f(x)-x$ tend vers 0, et comme x tend vers $+\infty$, $f(x)$ tend vers $+\infty$.

Interprétation. $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=0$: la droite Δ d'équation $y=x$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

Conclusion. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, et Δ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

Coin examen. Dans les barèmes consultés, la limite et son interprétation géométrique sont souvent notées séparément : écris toujours la phrase d'interprétation.

B.2. 0,5 pts

Étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et de Δ.

INDICE

Factorise $f(x)-x$; quel facteur garde un signe constant ?

CORRIGÉ

Signe de l'écart. Pour tout réel x, $f(x)-x = 2(x+1)e^{-x}$. Comme $e^{-x}>0$, cette différence a le signe de $x+1$.

Conclusion.

- Sur $]-1,+\infty[$, $\mathcal{C}$ est au-dessus de Δ ;
- sur $]-\infty,-1[$, $\mathcal{C}$ est au-dessous de Δ ;
- elles se coupent au point de coordonnées $(-1,-1)$.

B.3. 0,75 pts

Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement.

INDICE

En $-\infty$, e^{-x} tend vers $+\infty$. Pour le quotient, écris $\dfrac{f(x)}{x} = 1 + 2 \times \dfrac{x+1}{x} \times e^{-x}$.

CORRIGÉ

Limite de f. Quand x tend vers $-\infty$, $x+1$ tend vers $-\infty$ et e^{-x} vers $+\infty$. Donc $2(x+1)e^{-x}$ tend vers $-\infty$, et par somme, $f(x)$ tend vers $-\infty$.

Limite du quotient. Pour tout réel $x < 0$:

$$\begin{aligned}&\frac{f(x)}{x}\\&= 1 + 2 \times \frac{x+1}{x} \times e^{-x}.\end{aligned}$$

Or $\dfrac{x+1}{x}$ tend vers 1 et e^{-x} vers $+\infty$, donc $\dfrac{f(x)}{x}$ tend vers $+\infty$.

Conclusion. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$: $\mathcal{C}$ admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

B.4. 1 pts

Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = e^{-x}g(x)$. Dresser le tableau de variations de f.

INDICE

Dérive $(x+1)e^{-x}$ comme un produit, puis vérifie que $e^{-x}g(x) = 1 - 2xe^{-x}$.

CORRIGÉ

Dérivée de $(x+1)e^{-x}$. C'est un produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, sa dérivée vaut :

$$e^{-x} - (x+1)e^{-x} = -xe^{-x}.$$

Dérivée de f. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned}f'(x) &= 1 - 2xe^{-x}\\&= e^{-x}\left(e^{x} - 2x\right)\\&= e^{-x}g(x).\end{aligned}$$

Signe. Comme $e^{-x} > 0$ et $g(x) > 0$ (partie A), $f'(x) > 0$: f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Conclusion. Pour tout réel x, $f'(x) = e^{-x}g(x) > 0$; f croît strictement de $-\infty$ à $+\infty$.

B.5. 0,75 pts

Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$, et que $-0{,}9 < \alpha < -0{,}8$.

INDICE

Continuité, stricte monotonie, image de $\mathbb{R}$, puis le signe de $f(-0{,}9)$ et de $f(-0{,}8)$.

CORRIGÉ

Existence et unicité. f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et ses limites donnent $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Comme $0 \in \mathbb{R}$, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α.

Encadrement. À la calculatrice :

- $f(-0{,}9) = -0{,}9 + 0{,}2e^{0{,}9} \approx -0{,}41 < 0$;
- $f(-0{,}8) = -0{,}8 + 0{,}4e^{0{,}8} \approx 0{,}09 > 0$.

Comme $f(\alpha) = 0$, on a $f(-0{,}9) < f(\alpha) < f(-0{,}8)$ et, f étant strictement croissante, $-0{,}9 < \alpha < -0{,}8$.

Conclusion. L'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$, et $-0{,}9 < \alpha < -0{,}8$.

B.6. 0,75 pts

Calculer $f''(x)$ et montrer que $\mathcal{C}$ admet un point d'inflexion dont on donnera les coordonnées.

INDICE

Dérive $f'(x) = 1 - 2xe^{-x}$. Un point d'inflexion exige que f'' s'annule **et change de signe**.

CORRIGÉ

Dérivée seconde. On dérive $f'(x) = 1 - 2xe^{-x}$. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f''(x) &= -2e^{-x} + 2xe^{-x} \\ &= 2(x-1)e^{-x}. \end{aligned}$$

Signe. Comme $e^{-x} > 0$, $f''(x)$ a le signe de $x - 1$: elle s'annule en 1 **et change de signe**.

Ordonnée. $f(1) = 1 + 2 \times 2 \times e^{-1} = 1 + \dfrac{4}{e}$.

Conclusion. Le point $I\left(1, 1 + \dfrac{4}{e}\right)$ est un point d'inflexion de $\mathcal{C}$.

B.7. 0,75 pts

Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$. Calculer $f(-1)$, puis $\left(f^{-1}\right)'(-1)$.

INDICE

Si f est dérivable en a et $f'(a) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $f(a)$ et $\left(f^{-1}\right)'(f(a)) = \dfrac{1}{f'(a)}$.

CORRIGÉ

Existence de la réciproque. f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$: c'est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Elle admet donc une réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$.

Calcul de $f(-1)$ et $f'(-1)$.

- $f(-1) = -1 + 2 \times 0 \times e^{1} = -1$;
- $f'(-1) = 1 - 2 \times (-1) \times e^{1} = 1 + 2e \neq 0$.

Dérivée de la réciproque. f est dérivable en -1 avec $f'(-1) \neq 0$, donc f^{-1} est dérivable en $f(-1) = -1$ et :

$$\begin{aligned}\left(f^{-1}\right)'(-1) &= \frac{1}{f'(-1)} \\ &= \frac{1}{1+2e}.\end{aligned}$$

Conclusion. f admet une réciproque définie sur $\mathbb{R}$, $f(-1) = -1$ et $\left(f^{-1}\right)'(-1) = \dfrac{1}{1+2e}$.

La fonction réciproque est apparue dans 4 des 15 sujets consultés.

B.8. `0,75 pts`

Construire $\mathcal{C}$ et ses droites remarquables dans un repère orthonormé.

INDICE

Trace d'abord Δ, puis place les points calculés ; respecte la position relative et la branche en $-\infty$.

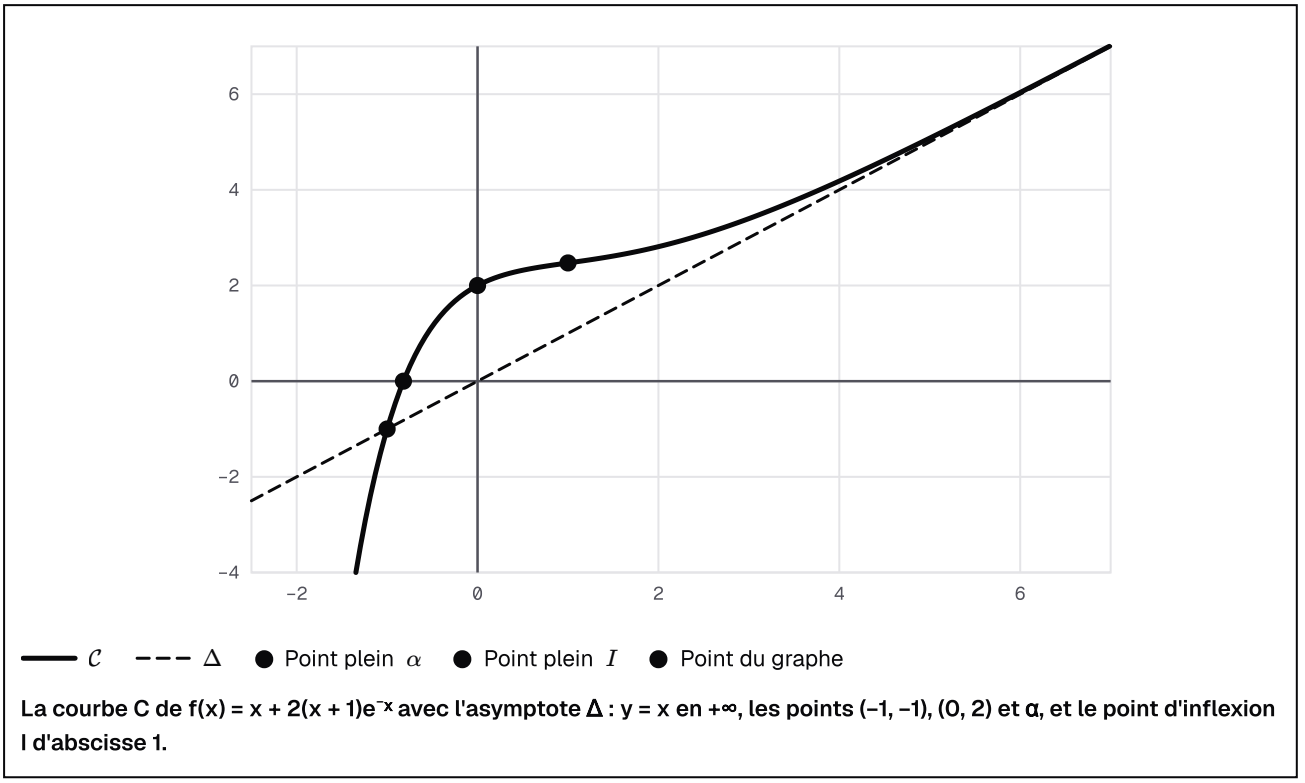
CORRIGÉ

On place, dans l'ordre :

- la droite Δ : $y = x$, asymptote oblique en $+\infty$;
- le point $(-1, -1)$, où $\mathcal{C}$ traverse Δ ;
- le point $(0, 2)$, puis le point d'abscisse $\alpha \approx -0{,}82$ sur l'axe des abscisses ;
- le point d'inflexion $I\left(1, 1 + \dfrac{4}{e}\right)$, avec $1 + \dfrac{4}{e} \approx 2{,}47$.

La courbe monte sur tout $\mathbb{R}$. En $-\infty$, elle plonge sous Δ avec une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

À partir de $x = -1$, elle passe au-dessus de Δ et s'en rapproche en $+\infty$. Avant I elle est tournée vers le bas, après I vers le haut.



La courbe C de f(x) = x + 2(x + 1)e⁻ˣ avec l'asymptote Δ : y = x en +∞, les points (−1, −1), (0, 2) et α, et le point d'inflexion I d'abscisse 1.

Exercice 2 5,5 pts

Problème : le logarithme d'un trinôme en e^x

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \ln\left(e^{2x} - e^x + 1\right).$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. 0,75 pts

Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$. Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et interpréter graphiquement.

INDICE

Avec $X = e^x$, la quantité sous le logarithme est $X^2 - X + 1$: calcule son discriminant.

CORRIGÉ

Ensemble de définition. Soit x un réel et $X = e^x$. Alors $e^{2x} - e^x + 1 = X^2 - X + 1$. Ce trinôme a un coefficient dominant $1 > 0$ et un discriminant $1 - 4 = -3 < 0$: il est strictement positif pour tout réel X. Donc f est définie sur $\mathbb{R}$.

Limite en $-\infty$. Quand x tend vers $-\infty$, e^x et e^{2x} tendent vers 0, donc $e^{2x} - e^x + 1$ tend vers 1. Comme $\ln$ est continue en 1, $f(x)$ tend vers $\ln 1 = 0$.

Conclusion. f est définie sur $\mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$: la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}$ en $-\infty$.

2. 0,5 pts

Montrer que, pour tout réel x :

$$f(x) = 2x + \ln\left(1 - e^{-x} + e^{-2x}\right).$$

INDICE

Mets e^{2x} en facteur sous le logarithme.

CORRIGÉ

Factorisation. Soit x un réel. On met e^{2x} en facteur :

$$e^{2x} - e^{x} + 1 = e^{2x}\left(1 - e^{-x} + e^{-2x}\right).$$

Les deux facteurs sont strictement positifs : le premier est une exponentielle, et le second est le quotient de $e^{2x} - e^{x} + 1 > 0$ par $e^{2x} > 0$.

Logarithme d'un produit. D'après $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ et $\ln\left(e^{2x}\right) = 2x$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln\left(e^{2x}\right) + \ln\left(1 - e^{-x} + e^{-2x}\right) \\ &= 2x + \ln\left(1 - e^{-x} + e^{-2x}\right). \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel x, $f(x) = 2x + \ln\left(1 - e^{-x} + e^{-2x}\right)$.

3. 0,75 pts

Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$. Montrer que la droite D d'équation $y = 2x$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$, puis étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et de D.

INDICE

Compare $1 - e^{-x} + e^{-2x}$ à 1, c'est-à-dire e^{-2x} à e^{-x}.

CORRIGÉ

Limite et asymptote. Quand x tend vers $+\infty$, e^{-x} et e^{-2x} tendent vers 0. D'après la question 2 :

$$\begin{aligned} & f(x) - 2x \\ & = \ln\left(1 - e^{-x} + e^{-2x}\right), \end{aligned}$$

qui tend vers $\ln 1 = 0$. Donc $f(x)$ tend vers $+\infty$, et la droite D est asymptote oblique à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

Signe de l'écart. Pour $t > 0$, $\ln t > 0$ si et seulement si $t > 1$, et $\ln t < 0$ si et seulement si $t < 1$. Le signe de $f(x) - 2x$ est donc celui de :

$$\begin{aligned} & \left(1 - e^{-x} + e^{-2x}\right) - 1 \\ & = e^{-2x} - e^{-x}. \end{aligned}$$

L'exponentielle étant strictement croissante, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} & e^{-2x} < e^{-x} \\ \iff & -2x < -x \\ \iff & x > 0. \end{aligned}$$

Conclusion. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et D est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$. De plus :

- pour $x > 0$, $\mathcal{C}$ est **au-dessous** de D ;
- pour $x < 0$, $\mathcal{C}$ est **au-dessus** de D ;
- elles se coupent à l'origine, car $f(0) = \ln 1 = 0$.

4. 1 pts

Montrer que, pour tout réel x :

$$f'(x) = \frac{e^x\,(2e^x - 1)}{e^{2x} - e^x + 1}.$$

Dresser le tableau de variations de f.

INDICE

Dérive $\ln\left(u(x)\right)$ en $\dfrac{u'(x)}{u(x)}$. Le dénominateur est positif : regarde quand $2e^x - 1$ change de signe.

CORRIGÉ

Dérivée. Posons $u(x) = e^{2x} - e^x + 1$: u est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$, avec :

$$\begin{aligned} u'(x) &= 2e^{2x} - e^x \\ &= e^x\,(2e^x - 1)\,. \end{aligned}$$

D'après $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$, on obtient la formule demandée.

Signe. Comme $e^x > 0$ et $u(x) > 0$, $f'(x)$ a le signe de $2e^x - 1$. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} & 2e^x - 1 > 0 \\ \iff\ & e^x > \frac{1}{2} \\ \iff\ & x > -\ln 2. \end{aligned}$$

Minimum. Comme $e^{-\ln 2} = \dfrac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} f(-\ln 2) &= \ln\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1\right) \\ &= \ln\left(\frac{3}{4}\right). \end{aligned}$$

x	$-\infty$		$-\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	$\ln\left(\frac{3}{4}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

Conclusion. f est strictement décroissante sur $]-\infty, -\ln 2]$ et strictement croissante sur $[-\ln 2, +\infty[$.

5. 0,5 pts

Donner une équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ à l'origine. Montrer que, pour tout réel x :

$$f(x) - x = \ln\left(\frac{e^{2x} - e^{x} + 1}{e^{x}}\right),$$

puis que $\mathcal{C}$ est au-dessus de T.

INDICE

Écris $x = \ln(e^{x})$. Pour comparer le quotient à 1, pose $X = e^{x}$ et pense à $(X-1)^2 \geq 0$.

CORRIGÉ

Tangente. $f(0) = \ln 1 = 0$ et $f'(0) = \dfrac{1 \times 1}{1} = 1$. Donc $T : y = x$.

Écart à la tangente. Soit x un réel. Comme $x = \ln(e^{x})$, d'après le logarithme d'un quotient :

$$\begin{aligned} & f(x) - x \\ &= \ln\left(e^{2x} - e^{x} + 1\right) \\ &\quad - \ln(e^{x}) \\ &= \ln\left(\frac{e^{2x} - e^{x} + 1}{e^{x}}\right). \end{aligned}$$

Comparaison du quotient à 1. Posons $X = e^{x} > 0$. En multipliant par $X > 0$:

$$\begin{aligned} & \frac{X^2 - X + 1}{X} \geq 1 \\ \iff\ & X^2 - 2X + 1 \geq 0 \\ \iff\ & (X-1)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

ce qui est toujours vrai. Donc $f(x) - x \geq 0$, avec égalité seulement pour $X = 1$, soit $x = 0$.

Conclusion. $T : y = x$, et $\mathcal{C}$ est au-dessus de T ; elle ne la touche qu'à l'origine.

6. `0,75 pts`

Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution réelle α, et que $0{,}6 < \alpha < 0{,}7$. Calculer ensuite la valeur exacte de α.

INDICE

Sur $]-\infty, -\ln 2]$, compare $f(x)$ à 0 grâce au tableau. Sur $[-\ln 2, +\infty[$, utilise la stricte monotonie. Pour la valeur exacte, pose $X = e^x$.

CORRIGÉ

Sur $]-\infty, -\ln 2]$**.** f décroît de la limite 0 vers $\ln\left(\frac{3}{4}\right) < 0$. Donc $f(x) < 0 < 1$: aucune solution.

Sur $[-\ln 2, +\infty[$**.** f est continue et strictement croissante, de $\ln\left(\frac{3}{4}\right) < 1$ vers $+\infty$: l'équation y admet une unique solution α.

Encadrement. $f(0{,}6) \approx 0{,}92 < 1$ et $f(0{,}7) \approx 1{,}11 > 1$. Comme $f(\alpha) = 1$, on a $f(0{,}6) < f(\alpha) < f(0{,}7)$ et, par stricte croissance sur $[-\ln 2, +\infty[$, $0{,}6 < \alpha < 0{,}7$.

Valeur exacte. Soit x un réel et $X = e^x > 0$:

$$\begin{aligned} & f(x) = 1 \\ \iff\ & e^{2x} - e^x + 1 = e \\ \iff\ & X^2 - X + 1 - e = 0. \end{aligned}$$

Le discriminant vaut $1 - 4(1-e) = 4e - 3 > 0$. La racine $\dfrac{1 - \sqrt{4e-3}}{2}$ est négative, car $4e - 3 > 1$: elle est rejetée. Il reste $X = \dfrac{1 + \sqrt{4e-3}}{2}$.

Conclusion. L'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution réelle α, avec $0{,}6 < \alpha < 0{,}7$, et :

$$\begin{aligned} \alpha &= \ln\left(\frac{1 + \sqrt{4e-3}}{2}\right) \\ &\approx 0{,}64. \end{aligned}$$

7. 0,5 pts

On admet que, pour tout réel x :

$$f''(x) = \frac{e^x\left(-e^{2x} + 4e^x - 1\right)}{\left(e^{2x} - e^x + 1\right)^2}.$$

Montrer que $\mathcal{C}$ admet deux points d'inflexion, dont on donnera les abscisses.

INDICE

Le signe de $f''(x)$ est celui de $-X^2 + 4X - 1$ avec $X = e^x$. Ses deux racines sont-elles positives ?

CORRIGÉ

Signe de $f''(x)$. Dans l'expression admise, le facteur e^x et le dénominateur, un carré non nul, sont strictement positifs. Le signe de $f''(x)$ est donc celui de $-X^2 + 4X - 1$, avec $X = e^x$.

Racines du trinôme. Son discriminant vaut $16 - 4 = 12$, et ses racines sont $2 - \sqrt{3}$ et $2 + \sqrt{3}$, toutes deux strictement positives. Il est positif entre elles et négatif à l'extérieur.

Retour à x. Comme $X = e^x$ et que $\ln$ est strictement croissante, f'' s'annule **et change de signe** en :

- $x_1 = \ln\left(2 - \sqrt{3}\right) \approx -1{,}32$;
- $x_2 = \ln\left(2 + \sqrt{3}\right) \approx 1{,}32$.

Comme $\left(2 - \sqrt{3}\right)\left(2 + \sqrt{3}\right) = 1$, on a $x_1 = -x_2$.

Conclusion. $\mathcal{C}$ admet deux points d'inflexion, d'abscisses $\ln\left(2 - \sqrt{3}\right)$ et $\ln\left(2 + \sqrt{3}\right)$.

8. 0,75 pts

Construire $\mathcal{C}$ et ses droites remarquables dans un repère orthonormé.

INDICE

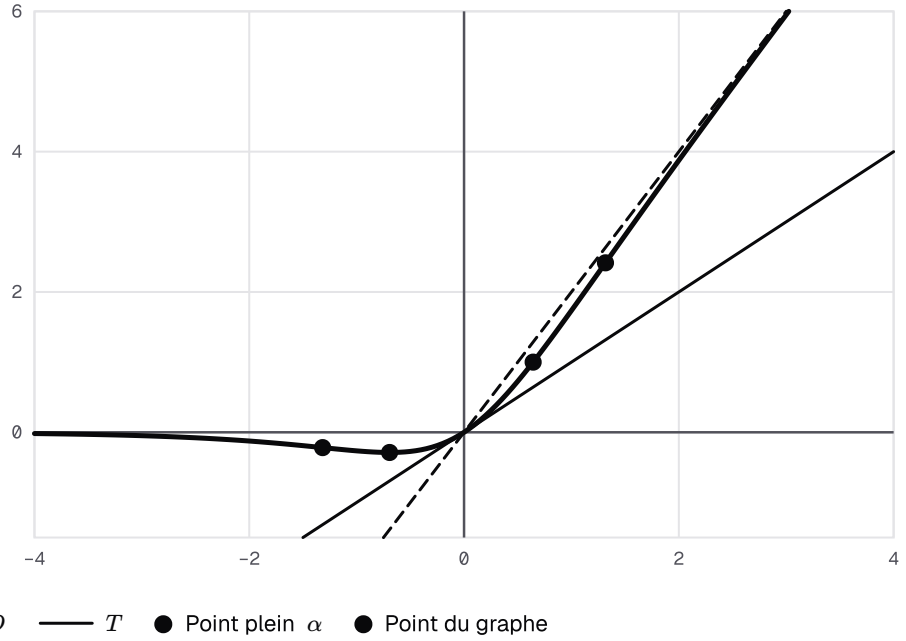
Place d'abord les asymptotes et la tangente, puis les points connus, et respecte le sens de variation et la position relative.

CORRIGÉ

On place, dans l'ordre :

- l'axe des abscisses, asymptote horizontale en $-\infty$, et la droite $D : y = 2x$, asymptote oblique en $+\infty$;
- la tangente $T : y = x$ à l'origine, sous la courbe ;
- le minimum au point d'abscisse $-\ln 2 \approx -0{,}69$, d'ordonnée $\ln\left(\frac{3}{4}\right) \approx -0{,}29$, avec une tangente horizontale ;
- les points d'inflexion d'abscisses $\pm \ln\left(2+\sqrt{3}\right) \approx \pm 1{,}32$;
- le point d'abscisse $\alpha \approx 0{,}64$ et d'ordonnée 1.

La courbe part de l'axe des abscisses en $-\infty$ en passant sous cet axe, descend jusqu'au minimum, remonte en passant par l'origine, puis se rapproche de D par-dessous.



La courbe C de f(x) = ln(e²ˣ − eˣ + 1) avec l'axe des abscisses en −∞, la droite D : y = 2x en +∞, la tangente T : y = x à l'origine et les deux points d'inflexion.

Exercice 3 5 pts

Problème : deux asymptotes et une réciproque explicite

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \ln\left(1 + 2e^{-x}\right).$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe dans un repère orthonormé.

1. 0,5 pts

Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat.

INDICE

Quand x tend vers $+\infty$, vers quoi tend $1 + 2e^{-x}$? Utilise la continuité de $\ln$ en 1.

CORRIGÉ

Limite. Quand x tend vers $+\infty$, e^{-x} tend vers 0, donc $1 + 2e^{-x}$ tend vers 1. Comme $\ln$ est continue en 1, $f(x)$ tend vers $\ln 1 = 0$.

Position. Pour tout réel x, $1 + 2e^{-x} > 1$, donc $f(x) > 0$.

Conclusion. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$: la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}$ en $+\infty$, et la courbe est au-dessus de cette asymptote.

2. a) 0,5 pts

Montrer que, pour tout réel x :

$$f(x) = -x + \ln\left(e^{x} + 2\right).$$

INDICE

Mets e^{-x} en facteur dans $1 + 2e^{-x}$, puis utilise $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.

CORRIGÉ

Factorisation. Soit x un réel. Comme $e^{-x} \times e^{x} = 1$:

$$1 + 2e^{-x} = e^{-x}\left(e^{x} + 2\right).$$

Logarithme d'un produit. Les deux facteurs sont strictement positifs, donc :

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln\left(e^{-x}\right) \\ &\quad + \ln\left(e^{x} + 2\right) \\ &= -x + \ln\left(e^{x} + 2\right). \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel x, $f(x) = -x + \ln\left(e^{x} + 2\right)$.

2. b) 0,5 pts

En déduire $\lim_{x \to -\infty} f(x)$, puis montrer que la droite D d'équation $y = -x + \ln 2$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $-\infty$.

INDICE

Étudie la différence $f(x) - (-x + \ln 2)$ et écris-la avec un seul logarithme.

CORRIGÉ

Limite. Quand x tend vers $-\infty$, $e^x + 2$ tend vers 2, donc $\ln(e^x + 2)$ tend vers $\ln 2$; et $-x$ tend vers $+\infty$. Par somme, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

Asymptote. Pour tout réel x, d'après la question 2. a) :

$$\begin{aligned} &f(x) - (-x + \ln 2) \\ &= \ln(e^x + 2) - \ln 2, \end{aligned}$$

qui tend vers $\ln 2 - \ln 2 = 0$ en $-\infty$.

Conclusion. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, et la droite D est asymptote oblique à $\mathcal{C}$ en $-\infty$.

2. c) 0,25 pts

Étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et de D.

INDICE

Écris $\ln(e^x + 2) - \ln 2 = \ln\left(\dfrac{e^x + 2}{2}\right)$ et compare le quotient à 1.

CORRIGÉ

Écart. Pour tout réel x, d'après le logarithme d'un quotient :

$$\begin{aligned} &f(x) - (-x + \ln 2) \\ &= \ln\left(\frac{e^x + 2}{2}\right). \end{aligned}$$

Signe. Comme $e^x > 0$, on a $e^x + 2 > 2$, donc ce quotient dépasse 1 et son logarithme est strictement positif.

Conclusion. $\mathcal{C}$ est **au-dessus** de D sur $\mathbb{R}$.

3. 0,75 pts

Montrer que, pour tout réel x :

$$f'(x) = -\frac{2}{e^x + 2}.$$

Dresser le tableau de variations de f.

INDICE

La dérivée de $\ln(u(x))$ est $\dfrac{u'(x)}{u(x)}$. Multiplie ensuite numérateur et dénominateur par e^x.

CORRIGÉ

Dérivée. Posons $u(x) = 1 + 2e^{-x}$: u est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$, avec $u'(x) = -2e^{-x}$. D'après $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$, puis en multipliant le numérateur et le dénominateur par e^x :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-2e^{-x}}{1 + 2e^{-x}} \\ &= -\frac{2}{e^x + 2}. \end{aligned}$$

Signe. Pour tout réel x, $e^x + 2 > 0$, donc $f'(x) < 0$: f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Les limites viennent des questions 1 et 2. b).

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0

Conclusion. Pour tout réel x, $f'(x) = -\dfrac{2}{e^x + 2}$; f décroît strictement de $+\infty$ à 0.

4. 0,5 pts

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 1$.

INDICE

Pour $A > 0$, $\ln A = 1$ équivaut à $A = e$. Isole ensuite e^{-x}.

CORRIGÉ

Passage à l'exponentielle. Soit x un réel. Pour $A > 0$, $\ln A = 1$ équivaut à $A = e$, donc :

$$\begin{aligned} & f(x) = 1 \\ \iff\ & 1 + 2e^{-x} = e \\ \iff\ & e^{-x} = \frac{e - 1}{2}. \end{aligned}$$

Résolution. Comme $\dfrac{e-1}{2} > 0$, on obtient $-x = \ln\left(\dfrac{e-1}{2}\right)$, soit :

$$x = \ln\left(\frac{2}{e-1}\right) \approx 0{,}15.$$

Conclusion. $S = \left\{\ln\left(\dfrac{2}{e-1}\right)\right\}$.

5. 0,5 pts

Calculer $f''(x)$ et en déduire que $\mathcal{C}$ n'admet pas de point d'inflexion.

INDICE

Dérive $f'(x) = -2\left(e^x + 2\right)^{-1}$ comme une composée.

CORRIGÉ

Dérivée seconde. On a $f'(x) = -2\left(e^x + 2\right)^{-1}$. D'après la dérivée d'une composée, pour tout réel x :

$$f''(x) = \frac{2e^x}{\left(e^x + 2\right)^2} > 0.$$

Conclusion. f'' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$: $\mathcal{C}$ n'a aucun point d'inflexion ; elle est convexe sur $\mathbb{R}$.

6. a) 1 pts

Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à préciser, et que, pour tout x de J :

$$f^{-1}(x) = \ln 2 - \ln\left(e^x - 1\right).$$

INDICE

Résous $f(x) = y$ d'inconnue x, pour y dans J : passe à l'exponentielle, puis isole e^{-x}. Le signe de $e^y - 1$ compte.

CORRIGÉ

Bijection. f est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, de limite $+\infty$ en $-\infty$ et 0 en $+\infty$. C'est donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $J = f(\mathbb{R}) =]0, +\infty[$.

Résolution de $f(x) = y$. Soit $y > 0$ et x un réel :

$$\begin{aligned} & f(x) = y \\ \iff\ & 1 + 2e^{-x} = e^y \\ \iff\ & e^{-x} = \frac{e^y - 1}{2}. \end{aligned}$$

Comme $y > 0$, $e^y > 1$ et le second membre est strictement positif. D'où $-x = \ln\left(e^y - 1\right) - \ln 2$, soit $x = \ln 2 - \ln\left(e^y - 1\right)$.

Conclusion. f admet une réciproque définie sur $J =]0, +\infty[$ et, pour tout $x > 0$, $f^{-1}(x) = \ln 2 - \ln\left(e^x - 1\right)$.

6. b) `0,5 pts`

Calculer $f(0)$, puis $\left(f^{-1}\right)'(\ln 3)$ de deux façons : avec la formule de la dérivée d'une réciproque, puis en dérivant l'expression de f^{-1}.

INDICE

Si $f'(a) \neq 0$, alors $\left(f^{-1}\right)'(f(a)) = \dfrac{1}{f'(a)}$.

CORRIGÉ

Avec la formule. $f(0) = \ln(1+2) = \ln 3$ et $f'(0) = -\dfrac{2}{3} \neq 0$. Donc f^{-1} est dérivable en $\ln 3$ et :

$$\begin{aligned}\left(f^{-1}\right)'(\ln 3) &= \frac{1}{f'(0)} \\ &= -\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Autre méthode. Pour tout $x > 0$, $\left(f^{-1}\right)'(x) = -\dfrac{e^x}{e^x - 1}$. En $\ln 3$, on trouve $-\dfrac{3}{3-1} = -\dfrac{3}{2}$.

Conclusion. $f(0) = \ln 3$ et $\left(f^{-1}\right)'(\ln 3) = -\dfrac{3}{2}$; les deux calculs concordent.

Exercice 4 4,5 pts

Problème : deux points d'inflexion et trois solutions

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x-1)^2 e^x.$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe dans un repère orthonormé.

1. 0,75 pts

Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et interpréter graphiquement.

INDICE

Développe $(x-1)^2$, puis utilise les croissances comparées de $x^2 e^x$ et de xe^x en $-\infty$.

CORRIGÉ

Développement. Pour tout réel x :

$$f(x) = x^2 e^x - 2xe^x + e^x.$$

Limite. En $-\infty$, par croissance comparée, $x^2 e^x$ et xe^x tendent vers 0 ; de plus e^x tend vers 0. Par somme, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

Conclusion. La droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}$ en $-\infty$. Comme $f(x) \geq 0$, la courbe est au-dessus ; elle ne touche l'axe qu'au point d'abscisse 1.

2. 0,5 pts

Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, puis interpréter graphiquement.

INDICE

Pour le quotient, écris $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{(x-1)^2}{x} \times e^x$.

CORRIGÉ

Limite de f. En $+\infty$, $(x-1)^2$ et e^x tendent vers $+\infty$, donc par produit $f(x)$ tend vers $+\infty$.

Limite du quotient. Pour tout réel $x > 0$:

$$\frac{(x-1)^2}{x} = x - 2 + \frac{1}{x},$$

qui tend vers $+\infty$. Comme $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{(x-1)^2}{x} \times e^x$, $\dfrac{f(x)}{x}$ tend vers $+\infty$.

Conclusion. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$: $\mathcal{C}$ admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

3. 1 pts

Montrer que, pour tout réel x :

$$f'(x) = (x-1)(x+1)e^x.$$

Dresser le tableau de variations de f.

INDICE

Dérive le produit, puis mets $(x-1)e^x$ en facteur.

CORRIGÉ

Dérivée. f est le produit de $x \mapsto (x-1)^2$ et de $x \mapsto e^x$, dérivables sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(x-1)e^x \\ &\quad + (x-1)^2 e^x \\ &= (x-1)e^x\,(2 + x - 1) \\ &= (x-1)(x+1)e^x. \end{aligned}$$

Signe. Comme $e^x > 0$, $f'(x)$ a le signe de $(x-1)(x+1)$: positif à l'extérieur de -1 et 1, négatif entre eux.

Valeurs. $f(-1) = 4e^{-1} = \dfrac{4}{e}$ et $f(1) = 0$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	0	$\nearrow$	$\dfrac{4}{e}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Conclusion. f est strictement croissante sur $]-\infty, -1]$, strictement décroissante sur $[-1, 1]$ et strictement croissante sur $[1, +\infty[$.

4. 0,5 pts

Donner une équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

INDICE

Calcule $f(0)$ et $f'(0)$.

CORRIGÉ

Valeurs en 0. $f(0) = 1$ et $f'(0) = (0-1)(0+1)e^0 = -1$.

Équation. La tangente a pour équation $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$.

Conclusion. $T : y = -x + 1$.

5. 0,75 pts

Montrer que, pour tout réel x :

$$f''(x) = \left(x^2 + 2x - 1\right) e^x.$$

En déduire que $\mathcal{C}$ admet deux points d'inflexion, dont on donnera les abscisses.

INDICE

Écris $f'(x) = \left(x^2 - 1\right) e^x$ avant de dériver. Résous ensuite $x^2 + 2x - 1 = 0$.

CORRIGÉ

Dérivée seconde. Pour tout réel x, $f'(x) = \left(x^2 - 1\right) e^x$. En dérivant ce produit :

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2xe^x + \left(x^2 - 1\right) e^x \\ &= \left(x^2 + 2x - 1\right) e^x. \end{aligned}$$

Signe. Comme $e^x > 0$, $f''(x)$ a le signe de $x^2 + 2x - 1$. Ce trinôme a pour discriminant $4 + 4 = 8$ et pour racines $-1 - \sqrt{2}$ et $-1 + \sqrt{2}$. Il est positif à l'extérieur des racines et négatif entre elles : f'' s'annule en chacune **et change de signe**.

Conclusion. $\mathcal{C}$ admet deux points d'inflexion, d'abscisses $-1 - \sqrt{2} \approx -2{,}41$ et $-1 + \sqrt{2} \approx 0{,}41$.

6. 1 pts

Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet exactement trois solutions réelles : l'une est 0, et les deux autres, notées β et γ, vérifient $-3 < \beta < -2$ et $1{,}4 < \gamma < 1{,}5$.

INDICE

Travaille sur chacun des trois intervalles du tableau de variations, où f est strictement monotone. Compare $\dfrac{4}{e}$ à 1.

CORRIGÉ

Sur chacun des trois intervalles du tableau, f est continue et strictement monotone. Notons que $\dfrac{4}{e} \approx 1{,}47 > 1$.

Sur $]-\infty, -1]$. f croît de 0 (limite, non atteinte) à $\dfrac{4}{e} > 1$: l'équation $f(x) = 1$ y a une unique solution β. Comme $f(-3) = 16e^{-3} \approx 0{,}80 < 1$ et $f(-2) = 9e^{-2} \approx 1{,}22 > 1$, on a $-3 < \beta < -2$.

Sur $[-1, 1]$. f décroît de $\dfrac{4}{e}$ à 0 : une unique solution, qui est 0, puisque $f(0) = 1$.

Sur $[1, +\infty[$. f croît de 0 à $+\infty$: une unique solution γ. Comme $f(1{,}4) = 0{,}16e^{1{,}4} \approx 0{,}65 < 1$ et $f(1{,}5) = 0{,}25e^{1{,}5} \approx 1{,}12 > 1$, on a $1{,}4 < \gamma < 1{,}5$.

Conclusion. L'équation $f(x) = 1$ a exactement trois solutions réelles : β, 0 et γ, avec $-3 < \beta < -2$ et $1{,}4 < \gamma < 1{,}5$.

Le théorème des valeurs intermédiaires est apparu dans 4 des 15 sujets consultés.

Exercice 5 6,25 pts

Problème : continuité en 0 et relation entre f(−x) et f(x)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. 0,75 pts

Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$, puis montrer que f est continue en 0.

INDICE

Pour $x \neq 0$, écris $f(x) = \dfrac{1}{\dfrac{e^x - 1}{x}}$ et utilise la limite de référence $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$, nombre dérivé de l'exponentielle en 0.

CORRIGÉ

Ensemble de définition. L'exponentielle étant strictement croissante, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} & e^x - 1 = 0 \\ \iff\ & e^x = e^0 \\ \iff\ & x = 0. \end{aligned}$$

Pour $x \neq 0$, le dénominateur ne s'annule donc pas, et $f(0) = 1$ est donné : f est définie sur $\mathbb{R}$.

Continuité en 0. Pour $x \neq 0$, $f(x) = \dfrac{1}{\dfrac{e^x - 1}{x}}$. Or $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$, car c'est le nombre dérivé de $x \mapsto e^x$ en 0, égal à $e^0 = 1$. Par quotient :

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} f(x) &= \frac{1}{1} \\ &= 1 = f(0). \end{aligned}$$

Conclusion. f est définie sur $\mathbb{R}$ et continue en 0.

2. a) 0,5 pts

Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat.

INDICE

Pour $x > 0$, écris $f(x) = \dfrac{x}{e^x} \times \dfrac{1}{1 - e^{-x}}$.

CORRIGÉ

Écriture. Pour tout réel $x > 0$, $e^x - 1 = e^x\,(1 - e^{-x})$, donc :

$$f(x) = \frac{x}{e^x} \times \frac{1}{1 - e^{-x}}.$$

Limites. Par croissance comparée, $\dfrac{x}{e^x}$ tend vers 0 en $+\infty$. De plus e^{-x} tend vers 0, donc $\dfrac{1}{1 - e^{-x}}$ tend vers 1. Par produit, $f(x)$ tend vers 0.

Conclusion. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$: la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

2. b) 0,5 pts

Établir la relation $f(-x) = f(x) + x$, valable pour chaque réel x.

INDICE

Pour $x \neq 0$, multiplie le numérateur et le dénominateur de $f(-x)$ par e^x. Traite à part le cas $x = 0$.

CORRIGÉ

Cas $x \neq 0$. On multiplie le numérateur et le dénominateur de $f(-x)$ par e^x, avec $e^{-x} \times e^x = 1$:

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{-x}{e^{-x} - 1} \\ &= \frac{-xe^x}{1 - e^x} \\ &= \frac{xe^x}{e^x - 1}. \end{aligned}$$

D'autre part, en réduisant au même dénominateur :

$$\begin{aligned} f(x) + x &= \frac{x + x\,(e^x - 1)}{e^x - 1} \\ &= \frac{xe^x}{e^x - 1}. \end{aligned}$$

Les deux expressions sont égales.

Cas $x = 0$. $f(-0) = f(0) = 1$ et $f(0) + 0 = 1$.

Conclusion. Pour tout réel x, $f(-x) = f(x) + x$.

2. c) 0,75 pts

En déduire $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, puis montrer que la droite D d'équation $y=-x$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $-\infty$. Étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et de D.

INDICE

D'après 2. b), $f(x)-(-x)=f(-x)$. Quand x tend vers $-\infty$, $-x$ tend vers $+\infty$: utilise 2. a). Pour le signe, compare le signe de x et celui de e^x-1.

CORRIGÉ

Limite. D'après 2. b), pour tout réel x, $f(x)=-x+f(-x)$. Quand x tend vers $-\infty$, $-x$ tend vers $+\infty$, donc $f(-x)$ tend vers 0 d'après 2. a). Par somme, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

Asymptote. $f(x)-(-x)=f(-x)$ tend vers 0 en $-\infty$: la droite D d'équation $y=-x$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}$ en $-\infty$.

Signe de f. Soit $t\neq 0$. L'exponentielle étant strictement croissante, $e^t-1>0$ si et seulement si $t>0$: t et e^t-1 ont le même signe, donc $f(t)>0$. De plus $f(0)=1>0$.

Conclusion. $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$, D est asymptote à $\mathcal{C}$ en $-\infty$, et pour tout réel x, $f(x)-(-x)=f(-x)>0$: $\mathcal{C}$ est **au-dessus** de D sur $\mathbb{R}$.

3. a) 0,75 pts

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x)=(1-x)e^x-1.$$

Étudier les variations de g, puis en déduire que $g(x)<0$ pour tout réel $x\neq 0$.

INDICE

Dérive le produit $(1-x)e^x$, puis regarde la valeur de g en 0.

CORRIGÉ

Dérivée. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} g'(x) &= -e^x+(1-x)e^x \\ &= -xe^x. \end{aligned}$$

Variations. Comme $e^x>0$, $g'(x)$ a le signe de $-x$: g est strictement croissante sur $]-\infty,0]$ et strictement décroissante sur $[0,+\infty[$. Son maximum est $g(0)=1-1=0$.

Signe. Par stricte monotonie, pour $x<0$, $g(x)<g(0)=0$; pour $x>0$, $g(x)<g(0)=0$.

Conclusion. Pour tout réel $x\neq 0$, $g(x)<0$.

3. b) 1 pts

Montrer que, pour tout réel $x \neq 0$:

$$f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x - 1)^2}.$$

Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Dérive le quotient $\dfrac{x}{e^x - 1}$. Pour le sens de variation sur $\mathbb{R}$ tout entier, utilise aussi la continuité de f en 0 (question 1).

CORRIGÉ

Dérivée. Sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, f est un quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. Pour tout réel $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(e^x - 1) - xe^x}{(e^x - 1)^2} \\ &= \frac{(1 - x)e^x - 1}{(e^x - 1)^2} \\ &= \frac{g(x)}{(e^x - 1)^2}. \end{aligned}$$

Signe. Le dénominateur est un carré non nul et $g(x) < 0$ (3. a)) : $f'(x) < 0$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.

Raccord en 0. Comme f est continue en 0 (question 1), elle est continue et strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$ et sur $[0, +\infty[$, donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	0

Conclusion. Pour tout réel $x \neq 0$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(e^x - 1)^2}$, et f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

4. 0,75 pts

Retrouver, à l'aide du tableau de variations de f et sans utiliser le résultat du cours, que, pour tout réel $x \neq 0$, $e^x > 1 + x$. Interpréter graphiquement pour la courbe de la fonction $x \mapsto e^x$.

INDICE

Compare $f(x)$ à $f(0) = 1$ selon le signe de x, puis multiplie par $e^x - 1$ en tenant compte de son signe.

CORRIGÉ

f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et $f(0) = 1$. Soit $x \neq 0$; on rappelle que $x = f(x)\,(e^x - 1)$.

Cas $x > 0$. $f(x) < 1$ et $e^x - 1 > 0$, donc $x = f(x)\,(e^x - 1) < e^x - 1$.

Cas $x < 0$. $f(x) > 1$ et $e^x - 1 < 0$; en multipliant par ce nombre négatif, le sens s'inverse : $x = f(x)\,(e^x - 1) < e^x - 1$.

Conclusion. Dans les deux cas, $e^x > 1 + x$ pour tout réel $x \neq 0$.

Interprétation. La droite d'équation $y = x + 1$ est la tangente à la courbe de $x \mapsto e^x$ au point d'abscisse 0 : cette courbe est strictement au-dessus de sa tangente, sauf au point de contact $(0, 1)$.

5. 0,75 pts

Déterminer les points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de la droite Δ d'équation $y = x$. Donner une équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse $\ln 2$.

INDICE

Pour $x \neq 0$, l'équation $f(x) - x = 0$ équivaut à $x\,(e^x - 2) = 0$. Pense ensuite à $e^{\ln 2} = 2$ et à $g(\ln 2)$.

CORRIGÉ

Intersection. Pour $x = 0$: $f(0) = 1 \neq 0$, pas d'intersection. Soit $x \neq 0$; comme $e^x - 1 \neq 0$:

$$\begin{aligned} & f(x) = x \\ \iff\ & x = x\,(e^x - 1) \\ \iff\ & x\,(e^x - 2) = 0 \\ \iff\ & e^x = 2 \\ \iff\ & x = \ln 2. \end{aligned}$$

Le passage à $e^x = 2$ utilise $x \neq 0$. De plus $f(\ln 2) = \dfrac{\ln 2}{e^{\ln 2} - 1} = \dfrac{\ln 2}{2 - 1} = \ln 2$.

Pente de la tangente. Comme $e^{\ln 2} = 2$:

$$\begin{aligned} f'(\ln 2) &= \frac{g(\ln 2)}{(2-1)^2} \\ &= (1 - \ln 2) \times 2 - 1 \\ &= 1 - 2\ln 2. \end{aligned}$$

Équation de T.

$$\begin{aligned} y &= (1 - 2\ln 2)(x - \ln 2) \\ &\quad + \ln 2 \\ &= (1 - 2\ln 2)x + 2(\ln 2)^2. \end{aligned}$$

La pente $1 - 2\ln 2 \approx -0{,}39$ est négative, en accord avec la décroissance de f.

Conclusion. $\mathcal{C}$ et Δ ont un seul point commun, $A(\ln 2, \ln 2)$, et $T : y = (1 - 2\ln 2)x + 2(\ln 2)^2$.

6. 0,5 pts

Construire $\mathcal{C}$ et ses droites remarquables dans un repère orthonormé.

INDICE

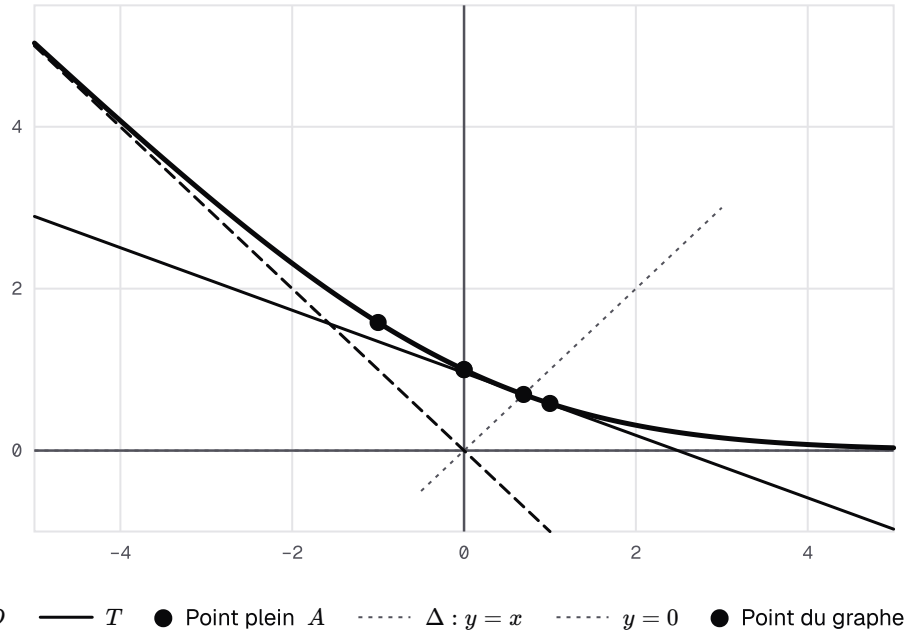
Place d'abord les asymptotes, puis les points connus et la tangente T ; respecte la décroissance et la position par rapport à D.

CORRIGÉ

On place, dans l'ordre :

- l'axe des abscisses, asymptote horizontale en $+\infty$, et la droite $D : y = -x$, asymptote oblique en $-\infty$;
- le point $(0, 1)$;
- le point $A(\ln 2, \ln 2)$, avec $\ln 2 \approx 0{,}69$, sur la droite Δ, et la tangente T en ce point ;
- les points d'abscisses -1 et 1, d'ordonnées $f(-1) = \dfrac{e}{e-1} \approx 1{,}58$ et $f(1) = \dfrac{1}{e-1} \approx 0{,}58$.

La courbe descend sur tout $\mathbb{R}$. Elle part de $+\infty$ en $-\infty$ en restant au-dessus de D et en s'en rapprochant, passe par $(0, 1)$ puis par A, et se rapproche de l'axe des abscisses en $+\infty$ en restant au-dessus.



La courbe C de f(x) = x/(eˣ − 1), décroissante, avec la droite D : y = −x en −∞, l'axe des abscisses en +∞, le point (0, 1) et la tangente T au point A(ln 2, ln 2).