BURHAN

Fonctions exponentielles : exercices, entraînement

2ème Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-experimentales/mathematiques/fonctions-exponentielles/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Fonctions exponentielles	Entraînement	7

Exercice 1

Le changement de variable X = e^x

Dans chaque question, on pose $X = e^x$, avec $X > 0$. Résoudre dans $\mathbb{R}$.

1.

$$e^{2x} + e^x - 6 = 0$$

INDICE

$e^{2x} = (e^x)^2 = X^2$. Résous l'équation du second degré en X, puis ne garde que les racines strictement positives.

2.

$$e^x - 6e^{-x} = 1$$

INDICE

Multiplie les deux membres par e^x, qui n'est pas nul, pour faire disparaître e^{-x}.

3.

$$e^{2x} - 4e^x + 3 < 0$$

INDICE

Factorise le trinôme en X, étudie son signe, puis transforme l'encadrement de X en un encadrement de x.

4.

$$2e^{2x} - 3e^x - 2 \geq 0$$

INDICE

Calcule le discriminant du trinôme $2X^2 - 3X - 2$, factorise-le, puis regarde le signe de chaque facteur lorsque $X > 0$.

Exercice 2

Bonus : systèmes en e^x et e^y

Bonus. Un document non authentifié cite les systèmes d'équations exponentielles ; non relevés dans les 15 sujets consultés ; leur place au chapitre reste à décider.

On cherche les couples de réels (x, y) solutions. Dans chaque cas, pose $a = e^x$ et $b = e^y$, avec $a > 0$ et $b > 0$.

1.

Résoudre le système :

$$\begin{cases} e^x + e^y = 5 \\ e^{x+y} = 6 \end{cases}$$

INDICE

$e^{x+y} = e^x e^y$. Deux nombres de somme 5 et de produit 6 sont les racines de $t^2 - 5t + 6 = 0$.

2.

Résoudre le système :

$$\begin{cases} 3e^x - e^y = 5 \\ e^x + 2e^y = 4 \end{cases}$$

INDICE

C'est un système linéaire en a et b : résous-le par substitution, puis vérifie que $a > 0$ et $b > 0$.

3.

Résoudre le système :

$$\begin{cases} e^x - e^y = 2 \\ e^{x+y} = 3 \end{cases}$$

INDICE

Exprime a en fonction de b, reporte dans $ab = 3$, puis élimine la valeur qui ne convient pas.

Exercice 3

Formes indéterminées : choisir la bonne écriture

Calculer chaque limite. Plusieurs d'entre elles demandent un **changement de variable** pour revenir à une croissance comparée connue.

1.

$$\lim_{x \to +\infty} \left(e^{2x} - xe^{x}\right)$$

INDICE

Mets e^x en facteur : il reste une parenthèse que tu sais traiter.

2.

$$\lim_{x \to +\infty} \left(x^2 + 1\right) e^{-x}$$

INDICE

Développe, puis écris $x^2 e^{-x} = \dfrac{x^2}{e^x}$.

3.

$$\lim_{x \to -\infty} xe^{2x}$$

INDICE

Pose $t = 2x$ et fais apparaître te^t.

4.

$$\lim_{x \to 0^+} xe^{\frac{1}{x}}$$

INDICE

Pose $t = \dfrac{1}{x}$: vers quoi tend t quand $x \to 0^+$, et que devient x ?

5.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{x}$$

INDICE

Pose $t = \sqrt{x}$, donc $x = t^2$.

6.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x + x^2}{e^x - 1}$$

INDICE

Mets e^x en facteur au numérateur comme au dénominateur.

Exercice 4

Deux asymptotes obliques et un centre de symétrie

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x + 3 - \frac{4}{e^x + 1}.$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe dans un repère orthonormé.

1.

Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

INDICE

Cherche d'abord la limite de $\dfrac{4}{e^x + 1}$ en chaque borne.

2.

Montrer que, pour tout réel x :

$$f'(x) = 1 + \frac{4e^x}{(e^x + 1)^2}.$$

En déduire le sens de variation de f.

INDICE

La dérivée de $\dfrac{1}{v}$ est $-\dfrac{v'}{v^2}$, avec ici $v(x) = e^x + 1$.

3.

Montrer que la droite Δ_1 d'équation $y = x + 3$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$, et que la droite Δ_2 d'équation $y = x - 1$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $-\infty$. Préciser la position de $\mathcal{C}$ par rapport à chacune.

INDICE

Pour Δ_2, réduis $4 - \dfrac{4}{e^x + 1}$ au même dénominateur.

4.

Montrer que, pour tout réel x, $f(-x) + f(x) = 2$. Interpréter graphiquement.

INDICE

Multiplie numérateur et dénominateur de $\dfrac{4}{e^{-x} + 1}$ par e^x.

5.

Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle β, et que $-1 < \beta < 0$.

INDICE

Utilise les questions 1 et 2, puis calcule $f(-1)$ et $f(0)$.

Exercice 5

Exponentielle et logarithme dans la même fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \ln\left(e^{x} + e^{-x}\right).$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe.

1.

Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est paire. Montrer que, pour tout réel x :

$$f(x) = x + \ln\left(1 + e^{-2x}\right).$$

INDICE

Pour la seconde égalité, mets e^{x} en facteur dans la parenthèse, puis utilise $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ et $\ln\left(e^{x}\right) = x$.

2.

Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, montrer que la droite d'équation $y = x$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$ et préciser leur position relative. En utilisant la parité de f, en déduire $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, puis montrer que la droite d'équation $y = -x$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $-\infty$.

INDICE

Utilise l'écriture obtenue à la question 1. Pour $-\infty$, pose $t = -x$ et écris $f(x) = f(t)$.

3.

Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.

INDICE

La dérivée de $\ln\left(u(x)\right)$ est $\dfrac{u'(x)}{u(x)}$. Pour le signe, compare e^{x} et e^{-x}.

4.

En déduire que, pour tout réel x, $e^{x} + e^{-x} \geq 2$.

INDICE

Le minimum de f fournit une inégalité entre deux logarithmes ; l'exponentielle, croissante, la transporte.

Exercice 6

Bonus : puissances de 5 et de 0,8

Bonus. Un document non authentifié cite l'exponentielle de base a ; non relevée dans les 15 sujets consultés ; sa place au chapitre reste à décider.

Rappel : pour $a > 0$ et pour tout réel x, $a^x = e^{x \ln a}$.

1.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$25^x - 6 \times 5^x + 5 = 0$$

INDICE

$25^x = (5^x)^2$. Pose $X = 5^x$, avec $X > 0$.

2.

Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $(0{,}8)^n < \dfrac{1}{2}$.

INDICE

Passe au logarithme, puis surveille le signe du nombre par lequel tu divises.

3.

Calculer :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{5^x}{x}$$

INDICE

Écris $5^x = e^{x \ln 5}$ et pose $t = x \ln 5$.

4.

Soit k la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $k(x) = x(0{,}8)^x$. Étudier ses variations, puis donner l'abscisse et la valeur de son maximum.

INDICE

Dérive un produit ; la dérivée de $(0{,}8)^x$ est $(0{,}8)^x \ln 0{,}8$.

Exercice 7

Une solution que l'on ne sait pas calculer

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x + x - 2$.

1.

Étudier le sens de variation de g et calculer ses limites en $-\infty$ et en $+\infty$.

INDICE

Calcule $g'(x)$ et étudie son signe.

2.

Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution réelle α, puis que $0{,}4 < \alpha < 0{,}5$.

INDICE

Utilise le théorème des valeurs intermédiaires pour une fonction continue et strictement monotone. Calcule $g(0{,}4)$ et $g(0{,}5)$ à la calculatrice.

3.

En déduire le signe de $g(x)$ selon x, et justifier que $e^{\alpha} = 2 - \alpha$.

INDICE

g est croissante et s'annule en α. Pour l'égalité, écris simplement ce que signifie $g(\alpha) = 0$.

4.

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = e^x + \frac{x^2}{2} - 2x.$$

Montrer que $h'(x) = g(x)$, calculer les limites de h en $-\infty$ et en $+\infty$, dresser le tableau de variations de h et prouver que $h(\alpha) = \dfrac{\alpha^2}{2} - 3\alpha + 2$.

INDICE

Pour la valeur du minimum, remplace e^{α} par $2 - \alpha$: c'est ce qui évite toute valeur approchée.

5.

En déduire que $h(x) > 0$ pour tout réel x.

INDICE

Encadre 3α à l'aide de l'inégalité $\alpha < 0{,}5$.