BURHAN

Fonctions exponentielles : exercices, entraînement

2ème Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-experimentales/mathematiques/fonctions-exponentielles/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Fonctions exponentielles	Entraînement	7

Exercice 1

Le changement de variable X = e^x

Dans chaque question, on pose $X = e^x$, avec $X > 0$. Résoudre dans $\mathbb{R}$.

1.

$$e^{2x} + e^x - 6 = 0$$

INDICE

$e^{2x} = (e^x)^2 = X^2$. Résous l'équation du second degré en X, puis ne garde que les racines strictement positives.

CORRIGÉ

Équation en X. Soit x un réel et $X = e^x > 0$. Comme $e^{2x} = (e^x)^2 = X^2$, l'équation devient :

$$\begin{aligned} & X^2 + X - 6 = 0 \\ \iff\ & (X-2)(X+3) = 0. \end{aligned}$$

Retour à x.

- $X = 2$ convient : $e^x = 2$ équivaut à $x = \ln 2$.
- $X = -3$ est rejetée, car $X = e^x > 0$.

Vérification. $e^{2\ln 2} + e^{\ln 2} - 6 = 4 + 2 - 6 = 0$.

Conclusion. $S = \{\ln 2\}$.

2.

$$e^x - 6e^{-x} = 1$$

INDICE

Multiplie les deux membres par e^x, qui n'est pas nul, pour faire disparaître e^{-x}.

CORRIGÉ

Multiplication par e^x. Soit x un réel. Comme $e^x > 0$, multiplier les deux membres par e^x donne une équation équivalente ; et $e^{-x} \times e^x = 1$:

$$\begin{aligned} & e^x - 6e^{-x} = 1 \\ \iff\ & e^{2x} - 6 = e^x. \end{aligned}$$

Équation en X. Avec $X = e^x > 0$:

$$\begin{aligned} & X^2 - X - 6 = 0 \\ \iff\ & (X-3)(X+2) = 0. \end{aligned}$$

Retour à x. Seule $X = 3$ est strictement positive. Donc $e^x = 3$, c'est-à-dire $x = \ln 3$.

Conclusion. $S = \{\ln 3\}$.

3.

$$e^{2x} - 4e^{x} + 3 < 0$$

INDICE

Factorise le trinôme en X, étudie son signe, puis transforme l'encadrement de X en un encadrement de x.

CORRIGÉ

Inéquation en X. Avec $X = e^{x} > 0$, l'inéquation devient $X^2 - 4X + 3 < 0$, soit $(X-1)(X-3) < 0$. Ce trinôme est strictement négatif entre ses racines, c'est-à-dire pour $1 < X < 3$.

Retour à x. Comme $\ln$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} & 1 < e^{x} < 3 \\ \iff\ & \ln 1 < x < \ln 3 \\ \iff\ & 0 < x < \ln 3. \end{aligned}$$

Conclusion. $S =]0, \ln 3[$.

4.

$$2e^{2x} - 3e^{x} - 2 \geq 0$$

INDICE

Calcule le discriminant du trinôme $2X^2 - 3X - 2$, factorise-le, puis regarde le signe de chaque facteur lorsque $X > 0$.

CORRIGÉ

Factorisation du trinôme. Le trinôme $2X^2 - 3X - 2$ a pour discriminant $9 + 16 = 25$, d'où les racines $\dfrac{3+5}{4} = 2$ et $\dfrac{3-5}{4} = -\dfrac{1}{2}$. Donc :

$$\begin{aligned} & 2X^2 - 3X - 2 \\ & = (2X+1)(X-2). \end{aligned}$$

Signe pour $X > 0$. Si $X > 0$, alors $2X + 1 > 0$, donc le trinôme a le signe de $X - 2$.

Retour à x. Avec $X = e^{x} > 0$, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} & 2e^{2x} - 3e^{x} - 2 \geq 0 \\ \iff\ & e^{x} \geq 2 \\ \iff\ & x \geq \ln 2. \end{aligned}$$

Conclusion. $S = [\ln 2, +\infty[$.

Attention. Sans la condition $X > 0$, tu aurais gardé à tort la zone $X \leq -\dfrac{1}{2}$, qui ne correspond à aucun réel x.

Exercice 2

Bonus : systèmes en e^x et e^y

Bonus. Un document non authentifié cite les systèmes d'équations exponentielles ; non relevés dans les 15 sujets consultés ; leur place au chapitre reste à décider.

On cherche les couples de réels (x, y) solutions. Dans chaque cas, pose $a = e^x$ et $b = e^y$, avec $a > 0$ et $b > 0$.

1.

Résoudre le système :

$$\begin{cases} e^x + e^y = 5 \\ e^{x+y} = 6 \end{cases}$$

INDICE

$e^{x+y} = e^x e^y$. Deux nombres de somme 5 et de produit 6 sont les racines de $t^2 - 5t + 6 = 0$.

CORRIGÉ

Système en a et b. Comme $e^{x+y} = e^x e^y$, le système s'écrit $a + b = 5$ et $ab = 6$.

Somme et produit. Les nombres a et b sont donc les racines du trinôme :

$$\begin{aligned} &t^2 - 5t + 6 \\ &= (t - 2)(t - 3), \end{aligned}$$

c'est-à-dire 2 et 3. Toutes deux sont strictement positives.

Retour à x et y.

- $a = 2$ et $b = 3$: $(x, y) = (\ln 2, \ln 3)$;
- $a = 3$ et $b = 2$: $(x, y) = (\ln 3, \ln 2)$.

Conclusion. $S = \{(\ln 2, \ln 3)\,;\ (\ln 3, \ln 2)\}$.

2.

Résoudre le système :

$$\begin{cases} 3e^{x} - e^{y} = 5 \\ e^{x} + 2e^{y} = 4 \end{cases}$$

INDICE

C'est un système linéaire en a et b : résous-le par substitution, puis vérifie que $a > 0$ et $b > 0$.

CORRIGÉ

Système linéaire. En a et b, le système s'écrit $3a - b = 5$ et $a + 2b = 4$. La première équation donne $b = 3a - 5$. En reportant dans la seconde :

$$\begin{aligned} & a + 2(3a - 5) = 4 \\ \iff\ & 7a = 14 \\ \iff\ & a = 2. \end{aligned}$$

Puis $b = 3 \times 2 - 5 = 1$.

Retour à x et y. Les deux valeurs sont strictement positives : $e^{x} = 2$ et $e^{y} = 1$, soit $x = \ln 2$ et $y = 0$.

Conclusion. $S = \{(\ln 2, 0)\}$.

3.

Résoudre le système :

$$\begin{cases} e^{x} - e^{y} = 2 \\ e^{x+y} = 3 \end{cases}$$

INDICE

Exprime a en fonction de b, reporte dans $ab = 3$, puis élimine la valeur qui ne convient pas.

CORRIGÉ

Équation en b. Le système s'écrit $a = b + 2$ et $ab = 3$. En reportant :

$$\begin{aligned} & b(b + 2) = 3 \\ \iff\ & b^{2} + 2b - 3 = 0 \\ \iff\ & (b - 1)(b + 3) = 0. \end{aligned}$$

Tri des valeurs.

- $b = -3$ est rejetée, car $b = e^{y} > 0$;
- $b = 1$ donne $a = 3$, d'où $y = 0$ et $x = \ln 3$.

Conclusion. $S = \{(\ln 3, 0)\}$.

Exercice 3

Formes indéterminées : choisir la bonne écriture

Calculer chaque limite. Plusieurs d'entre elles demandent un **changement de variable** pour revenir à une croissance comparée connue.

1.

$$\lim_{x \to +\infty} \left(e^{2x} - xe^{x}\right)$$

INDICE

Mets e^x en facteur : il reste une parenthèse que tu sais traiter.

CORRIGÉ

Mise en facteur. C'est une forme $\infty - \infty$. Pour tout réel x :

$$e^{2x} - xe^{x} = e^{x}\left(e^{x} - x\right).$$

Limite de la parenthèse. Pour $x > 0$, $e^{x} - x = x\left(\dfrac{e^{x}}{x} - 1\right)$. Par croissance comparée, $\dfrac{e^{x}}{x}$ tend vers $+\infty$, donc $e^{x} - x$ tend vers $+\infty$.

Produit. e^{x} et $e^{x} - x$ tendent tous deux vers $+\infty$, leur produit aussi.

Conclusion. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(e^{2x} - xe^{x}\right) = +\infty$.

2.

$$\lim_{x \to +\infty} \left(x^{2} + 1\right) e^{-x}$$

INDICE

Développe, puis écris $x^{2}e^{-x} = \dfrac{x^{2}}{e^{x}}$.

CORRIGÉ

Découpage. Pour tout réel x :

$$\left(x^{2} + 1\right) e^{-x} = \frac{x^{2}}{e^{x}} + e^{-x}.$$

Premier terme. Pour $x > 0$, $\dfrac{x^{2}}{e^{x}}$ est l'inverse de $\dfrac{e^{x}}{x^{2}}$, qui tend vers $+\infty$ par croissance comparée : il tend donc vers 0.

Second terme. e^{-x} tend vers 0.

Conclusion. Par somme, $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^{2} + 1\right) e^{-x} = 0$.

3.

$$\lim_{x \to -\infty} xe^{2x}$$

INDICE

Pose $t = 2x$ et fais apparaître te^t.

CORRIGÉ

Changement de variable. Posons $t = 2x$. Pour tout réel x, $xe^{2x} = \dfrac{1}{2}te^t$.

Passage à la limite. Quand x tend vers $-\infty$, t tend vers $-\infty$, et te^t tend vers 0 par croissance comparée.

Conclusion. $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^{2x} = \dfrac{1}{2} \times 0 = 0$.

4.

$$\lim_{x \to 0^+} xe^{\frac{1}{x}}$$

INDICE

Pose $t = \dfrac{1}{x}$: vers quoi tend t quand $x \to 0^+$, et que devient x ?

CORRIGÉ

Changement de variable. Pour $x > 0$, posons $t = \dfrac{1}{x}$. Alors $x = \dfrac{1}{t}$, et t tend vers $+\infty$ quand x tend vers 0^+. On a :

$$xe^{\frac{1}{x}} = \frac{e^t}{t}.$$

Passage à la limite. Par croissance comparée, $\dfrac{e^t}{t}$ tend vers $+\infty$ quand t tend vers $+\infty$.

Conclusion. $\lim\limits_{x \to 0^+} xe^{\frac{1}{x}} = +\infty$.

5.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{x}$$

INDICE

Pose $t = \sqrt{x}$, donc $x = t^2$.

CORRIGÉ

Changement de variable. Pour $x > 0$, posons $t = \sqrt{x}$, donc $x = t^2$. Quand x tend vers $+\infty$, t tend vers $+\infty$, et :

$$\frac{e^{\sqrt{x}}}{x} = \frac{e^t}{t^2}.$$

Passage à la limite. Par croissance comparée avec $n = 2$, $\dfrac{e^t}{t^2}$ tend vers $+\infty$.

Conclusion. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{x} = +\infty$.

6.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x + x^2}{e^x - 1}$$

INDICE

Mets e^x en facteur au numérateur comme au dénominateur.

CORRIGÉ

Mise en facteur. Pour $x > 0$, $e^x - 1 > 0$. En divisant le numérateur et le dénominateur par e^x :

$$\frac{e^x + x^2}{e^x - 1} = \frac{1 + x^2 e^{-x}}{1 - e^{-x}}.$$

Passage à la limite. $x^2 e^{-x}$ tend vers 0 (question 2) et e^{-x} tend vers 0. Le numérateur et le dénominateur tendent donc vers 1.

Conclusion. $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x + x^2}{e^x - 1} = \frac{1}{1} = 1$.

Exercice 4

Deux asymptotes obliques et un centre de symétrie

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x + 3 - \frac{4}{e^x + 1}.$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe dans un repère orthonormé.

1.

Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

INDICE

Cherche d'abord la limite de $\dfrac{4}{e^x + 1}$ en chaque borne.

CORRIGÉ

En $+\infty$. $e^x + 1$ tend vers $+\infty$, donc $\dfrac{4}{e^x + 1}$ tend vers 0. Comme $x + 3$ tend vers $+\infty$, par somme, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

En $-\infty$. $e^x + 1$ tend vers 1, donc $\dfrac{4}{e^x + 1}$ tend vers 4. Comme $x + 3$ tend vers $-\infty$, par somme, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

Conclusion. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

2.

Montrer que, pour tout réel x :

$$f'(x) = 1 + \frac{4e^x}{(e^x + 1)^2}.$$

En déduire le sens de variation de f.

INDICE

La dérivée de $\dfrac{1}{v}$ est $-\dfrac{v'}{v^2}$, avec ici $v(x) = e^x + 1$.

CORRIGÉ

Dérivée. Posons $v(x) = e^x + 1$; v est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$, avec $v'(x) = e^x$. D'après $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$, la dérivée de $x \mapsto \dfrac{4}{v(x)}$ est $x \mapsto -\dfrac{4e^x}{(e^x + 1)^2}$. Donc, pour tout réel x :

$$f'(x) = 1 + \frac{4e^x}{(e^x + 1)^2}.$$

Signe. Les deux termes sont strictement positifs, donc $f'(x) > 0$.

Conclusion. f est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

3.

Montrer que la droite Δ_1 d'équation $y = x + 3$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$, et que la droite Δ_2 d'équation $y = x - 1$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $-\infty$. Préciser la position de $\mathcal{C}$ par rapport à chacune.

INDICE

Pour Δ_2, réduis $4 - \dfrac{4}{e^x + 1}$ au même dénominateur.

CORRIGÉ

Droite Δ_1. Pour tout réel x :

$$f(x) - (x + 3) = -\frac{4}{e^x + 1}.$$

Cette différence tend vers 0 en $+\infty$: Δ_1 est asymptote oblique à $\mathcal{C}$ en $+\infty$. Elle est strictement négative : $\mathcal{C}$ est **au-dessous** de Δ_1 sur $\mathbb{R}$.

Droite Δ_2. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f(x) - (x - 1) &= 4 - \frac{4}{e^x + 1} \\ &= \frac{4e^x}{e^x + 1}. \end{aligned}$$

Cette différence tend vers $\dfrac{0}{1} = 0$ en $-\infty$: Δ_2 est asymptote oblique à $\mathcal{C}$ en $-\infty$. Elle est strictement positive : $\mathcal{C}$ est **au-dessus** de Δ_2 sur $\mathbb{R}$.

Conclusion. Δ_1 est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$, avec $\mathcal{C}$ au-dessous ; Δ_2 est asymptote à $\mathcal{C}$ en $-\infty$, avec $\mathcal{C}$ au-dessus. La courbe reste dans la bande comprise entre les deux droites parallèles.

4.

Montrer que, pour tout réel x, $f(-x)+f(x)=2$. Interpréter graphiquement.

INDICE

Multiplie numérateur et dénominateur de $\dfrac{4}{e^{-x}+1}$ par e^{x}.

CORRIGÉ

Écriture de $f(-x)$. Soit x un réel. En multipliant le numérateur et le dénominateur par e^{x} :

$$\frac{4}{e^{-x}+1}=\frac{4e^{x}}{1+e^{x}}.$$

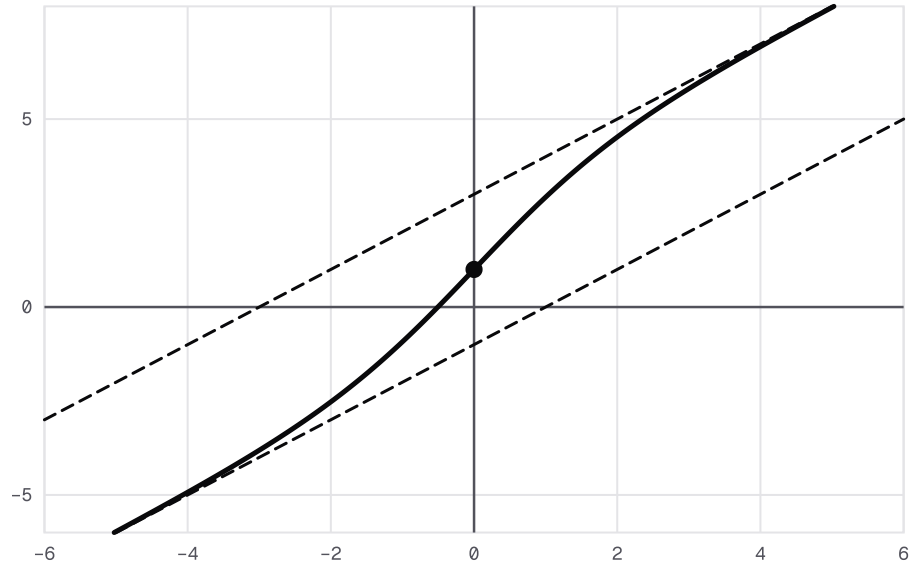
Donc $f(-x)=-x+3-\dfrac{4e^{x}}{e^{x}+1}$.

Somme. Les termes en x s'éliminent :

$$\begin{aligned} &f(-x)+f(x)\\ &=6-\frac{4e^{x}}{e^{x}+1}-\frac{4}{e^{x}+1}\\ &=6-\frac{4\left(e^{x}+1\right)}{e^{x}+1}\\ &=6-4=2. \end{aligned}$$

Interprétation. Le milieu des points de $\mathcal{C}$ d'abscisses x et $-x$ est toujours $\Omega(0,1)$: ce point est **centre de symétrie** de $\mathcal{C}$. On retrouve $f(0)=3-2=1$.

Conclusion. Pour tout réel x, $f(-x)+f(x)=2$, et le point $\Omega(0,1)$ est centre de symétrie de $\mathcal{C}$.



La courbe de f(x) = x + 3 − 4/(eˣ + 1), entre ses asymptotes Δ_1 : y = x + 3 et Δ_2 : y = x − 1, symétrique par rapport au point Ω(0, 1).

5.

Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle β, et que $-1 < \beta < 0$.

INDICE

Utilise les questions 1 et 2, puis calcule $f(-1)$ et $f(0)$.

CORRIGÉ

Existence et unicité. f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et ses limites en $-\infty$ et $+\infty$ donnent $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, qui contient 0. L'équation $f(x) = 0$ admet donc une unique solution β.

Encadrement. On calcule $f(-1) = 2 - \dfrac{4}{e^{-1}+1} \approx -0{,}92 < 0$ et $f(0) = 1 > 0$. Comme $f(\beta) = 0$, on a $f(-1) < f(\beta) < f(0)$ et, f étant strictement croissante, $-1 < \beta < 0$.

Conclusion. L'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle β, et $-1 < \beta < 0$.

Exercice 5

Exponentielle et logarithme dans la même fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \ln\left(e^{x} + e^{-x}\right).$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe.

1.

Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est paire. Montrer que, pour tout réel x :

$$f(x) = x + \ln\left(1 + e^{-2x}\right).$$

INDICE

Pour la seconde égalité, mets e^{x} en facteur dans la parenthèse, puis utilise $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ et $\ln\left(e^{x}\right) = x$.

CORRIGÉ

Ensemble de définition. Pour tout réel x, $e^{x} + e^{-x} > 0$, donc $f(x)$ existe : f est définie sur $\mathbb{R}$.

Parité. $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0 et, pour tout réel x, $f(-x) = \ln\left(e^{-x} + e^{x}\right) = f(x)$: f est paire.

Autre écriture. Soit x un réel. On a $e^{x} + e^{-x} = e^{x}\left(1 + e^{-2x}\right)$, produit de deux nombres strictement positifs. D'après $\ln(ab) = \ln a + \ln b$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln\left(e^{x}\right) \\ &\quad + \ln\left(1 + e^{-2x}\right) \\ &= x + \ln\left(1 + e^{-2x}\right). \end{aligned}$$

Conclusion. f est définie sur $\mathbb{R}$, paire, et pour tout réel x, $f(x) = x + \ln\left(1 + e^{-2x}\right)$.

2.

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, montrer que la droite d'équation $y=x$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$ et préciser leur position relative. En utilisant la parité de f, en déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, puis montrer que la droite d'équation $y=-x$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $-\infty$.

INDICE

Utilise l'écriture obtenue à la question 1. Pour $-\infty$, pose $t=-x$ et écris $f(x)=f(t)$.

CORRIGÉ

Limite en $+\infty$. Quand x tend vers $+\infty$, e^{-2x} tend vers 0, donc $\ln\left(1+e^{-2x}\right)$ tend vers $\ln 1=0$. D'après la question 1, $f(x)$ tend donc vers $+\infty$.

Asymptote en $+\infty$. Pour tout réel x, $f(x)-x=\ln\left(1+e^{-2x}\right)$, qui tend vers 0 en $+\infty$: la droite d'équation $y=x$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

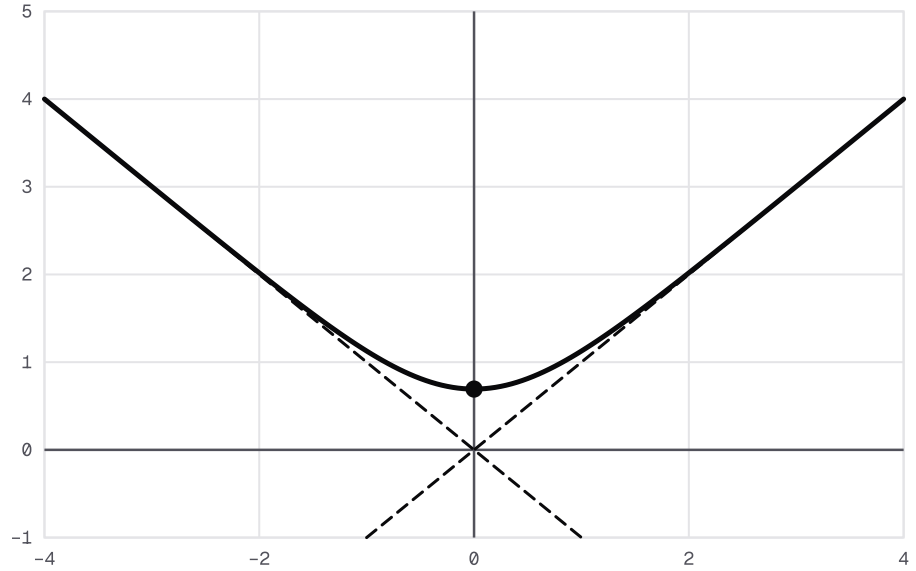
Position. Comme $1+e^{-2x}>1$, on a $f(x)-x>0$: $\mathcal{C}$ est **au-dessus** de cette asymptote.

En $-\infty$. Posons $t=-x$: quand x tend vers $-\infty$, t tend vers $+\infty$. Par parité, $f(x)=f(t)$, donc :

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to-\infty} f(x)\\&=\lim_{t\to+\infty} f(t)\\&=+\infty.\end{aligned}$$

De plus $f(x)-(-x)=f(t)-t$, qui tend vers 0 d'après ce qui précède : la droite d'équation $y=-x$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $-\infty$. Comme $f(t)-t>0$, la courbe reste au-dessus de cette droite.

Conclusion. f tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et en $-\infty$; les droites d'équations $y=x$ et $y=-x$ sont asymptotes à $\mathcal{C}$ en $+\infty$ et en $-\infty$, et $\mathcal{C}$ est au-dessus de chacune.



La courbe paire de f(x) = ln(eˣ + e⁻ˣ) au-dessus de ses asymptotes y = x en +∞ et y = −x en −∞.

3.

Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.

INDICE

La dérivée de $\ln(u(x))$ est $\dfrac{u'(x)}{u(x)}$. Pour le signe, compare e^x et e^{-x}.

CORRIGÉ

Dérivée. Posons $u(x) = e^x + e^{-x}$: u est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$, avec $u'(x) = e^x - e^{-x}$. D'après $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$, pour tout réel x :

$$f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Signe. Le dénominateur est strictement positif. L'exponentielle étant strictement croissante, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} & e^x - e^{-x} > 0 \\ \iff\ & e^x > e^{-x} \\ \iff\ & x > -x \\ \iff\ & x > 0. \end{aligned}$$

Donc $f'(x)$ a le signe de x. De plus $f(0) = \ln(1+1) = \ln 2$, et f tend vers $+\infty$ aux deux bornes (question 2).

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

Conclusion. f est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$ et strictement croissante sur $[0, +\infty[$, de minimum $f(0) = \ln 2$.

4.

En déduire que, pour tout réel x, $e^x + e^{-x} \geq 2$.

INDICE

Le minimum de f fournit une inégalité entre deux logarithmes ; l'exponentielle, croissante, la transporte.

CORRIGÉ

Minimum de f. D'après le tableau, pour tout réel x, $f(x) \geq \ln 2$, soit :

$$\ln\left(e^x + e^{-x}\right) \geq \ln 2.$$

Passage à l'exponentielle. L'exponentielle est strictement croissante, donc elle conserve cette inégalité : $e^x + e^{-x} \geq e^{\ln 2} = 2$. L'égalité n'a lieu que pour $x = 0$.

Conclusion. Pour tout réel x, $e^x + e^{-x} \geq 2$.

Exercice 6

Bonus : puissances de 5 et de 0,8

Bonus. Un document non authentifié cite l'exponentielle de base a ; non relevée dans les 15 sujets consultés ; sa place au chapitre reste à décider.

Rappel : pour $a > 0$ et pour tout réel x, $a^x = e^{x \ln a}$.

1.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$25^x - 6 \times 5^x + 5 = 0$$

INDICE

$25^x = (5^x)^2$. Pose $X = 5^x$, avec $X > 0$.

CORRIGÉ

Écriture en 5^x. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} 25^x &= e^{x \ln 25} \\ &= e^{2x \ln 5} \\ &= (5^x)^2 . \end{aligned}$$

Équation en X. Avec $X = 5^x > 0$, l'équation devient $X^2 - 6X + 5 = 0$, soit $(X - 1)(X - 5) = 0$. Les deux racines sont strictement positives.

Retour à x.

- $5^x = 1$ équivaut à $x \ln 5 = 0$, soit $x = 0$;
- $5^x = 5$ équivaut à $x \ln 5 = \ln 5$, soit $x = 1$.

Conclusion. $S = \{0\,;\,1\}$.

2.

Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $(0{,}8)^n < \dfrac{1}{2}$.

INDICE

Passe au logarithme, puis surveille le signe du nombre par lequel tu divises.

CORRIGÉ

Passage au logarithme. La fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$, donc pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} & (0{,}8)^n < \frac{1}{2} \\ \iff\ & n \ln 0{,}8 < -\ln 2. \end{aligned}$$

Division. Comme $\ln 0{,}8 < 0$, la division par $\ln 0{,}8$ change le sens. Avec $-\ln 0{,}8 = \ln\left(\dfrac{1}{0{,}8}\right) = \ln 1{,}25$:

$$\begin{aligned} n &> \frac{-\ln 2}{\ln 0{,}8} \\ &= \frac{\ln 2}{\ln 1{,}25} \approx 3{,}11. \end{aligned}$$

Vérification. $(0{,}8)^3 = 0{,}512$ et $(0{,}8)^4 = 0{,}4096$.

Conclusion. Le plus petit entier naturel n tel que $(0{,}8)^n < \dfrac{1}{2}$ est $n = 4$.

3.

Calculer :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{5^x}{x}$$

INDICE

Écris $5^x = e^{x \ln 5}$ et pose $t = x \ln 5$.

CORRIGÉ

Changement de variable. Pour $x > 0$, posons $t = x \ln 5$. Alors $x = \dfrac{t}{\ln 5}$, et t tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$, car $\ln 5 > 0$. On a :

$$\frac{5^x}{x} = \ln 5 \times \frac{e^t}{t}.$$

Passage à la limite. Par croissance comparée, $\dfrac{e^t}{t}$ tend vers $+\infty$.

Conclusion. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5^x}{x} = +\infty$.

4.

Soit k la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $k(x) = x(0{,}8)^x$. Étudier ses variations, puis donner l'abscisse et la valeur de son maximum.

INDICE

Dérive un produit ; la dérivée de $(0{,}8)^x$ est $(0{,}8)^x \ln 0{,}8$.

CORRIGÉ

Dérivée. k est le produit de $x \mapsto x$ et de $x \mapsto (0{,}8)^x$, dérivables sur $[0, +\infty[$. Pour tout réel $x \geq 0$:

$$\begin{aligned} k'(x) &= (0{,}8)^x \\ &\quad + x(0{,}8)^x \ln 0{,}8 \\ &= (0{,}8)^x \left(1 + x \ln 0{,}8\right). \end{aligned}$$

Signe. Comme $(0{,}8)^x > 0$, $k'(x)$ a le signe de $1 + x \ln 0{,}8$. Ce facteur s'annule en :

$$\begin{aligned} x_0 &= -\frac{1}{\ln 0{,}8} \\ &= \frac{1}{\ln 1{,}25} \approx 4{,}48. \end{aligned}$$

Comme $\ln 0{,}8 < 0$, il est positif avant x_0 et négatif après.

Variations. k est strictement croissante sur $[0, x_0]$ et strictement décroissante sur $[x_0, +\infty[$.

Maximum. Comme $x_0 \ln 0{,}8 = -1$:

$$\begin{aligned} k(x_0) &= x_0 e^{x_0 \ln 0{,}8} \\ &= x_0 e^{-1} \\ &= \frac{1}{e \ln 1{,}25} \approx 1{,}65. \end{aligned}$$

Conclusion. k croît sur $[0, x_0]$ puis décroît sur $[x_0, +\infty[$; son maximum est atteint en $x_0 = \dfrac{1}{\ln 1{,}25} \approx 4{,}48$ et vaut $\dfrac{1}{e \ln 1{,}25} \approx 1{,}65$.

Exercice 7

Une solution que l'on ne sait pas calculer

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x + x - 2$.

1.

Étudier le sens de variation de g et calculer ses limites en $-\infty$ et en $+\infty$.

INDICE

Calcule $g'(x)$ et étudie son signe.

CORRIGÉ

Sens de variation. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $g'(x) = e^x + 1 > 0$: g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

En $-\infty$. e^x tend vers 0 et $x - 2$ vers $-\infty$, donc par somme $g(x)$ tend vers $-\infty$.

En $+\infty$. e^x et $x - 2$ tendent vers $+\infty$, donc $g(x)$ tend vers $+\infty$.

Conclusion. g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, avec $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

2.

Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution réelle α, puis que $0{,}4 < \alpha < 0{,}5$.

INDICE

Utilise le théorème des valeurs intermédiaires pour une fonction continue et strictement monotone. Calcule $g(0{,}4)$ et $g(0{,}5)$ à la calculatrice.

CORRIGÉ

Existence et unicité. g est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et ses limites donnent $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, qui contient 0. D'après le théorème des valeurs intermédiaires pour une fonction strictement monotone, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α.

Encadrement. À la calculatrice :

- $g(0{,}4) = e^{0{,}4} - 1{,}6 \approx -0{,}11 < 0$;
- $g(0{,}5) = e^{0{,}5} - 1{,}5 \approx 0{,}15 > 0$.

Comme $g(\alpha) = 0$, on a $g(0{,}4) < g(\alpha) < g(0{,}5)$ et, par stricte croissance, $0{,}4 < \alpha < 0{,}5$.

Conclusion. L'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution réelle α, et $0{,}4 < \alpha < 0{,}5$.

3.

En déduire le signe de $g(x)$ selon x, et justifier que $e^{\alpha} = 2 - \alpha$.

INDICE

g est croissante et s'annule en α. Pour l'égalité, écris simplement ce que signifie $g(\alpha) = 0$.

CORRIGÉ

Signe. g est strictement croissante et s'annule en α, donc :

- $g(x) < 0$ pour $x < \alpha$;
- $g(\alpha) = 0$;
- $g(x) > 0$ pour $x > \alpha$.

Égalité. $g(\alpha) = 0$ s'écrit $e^{\alpha} + \alpha - 2 = 0$, soit $e^{\alpha} = 2 - \alpha$.

Conclusion. $g(x)$ est strictement négatif sur $]-\infty, \alpha[$, nul en α, strictement positif sur $]\alpha, +\infty[$, et $e^{\alpha} = 2 - \alpha$.

4.

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = e^x + \frac{x^2}{2} - 2x.$$

Montrer que $h'(x) = g(x)$, calculer les limites de h en $-\infty$ et en $+\infty$, dresser le tableau de variations de h et prouver que $h(\alpha) = \dfrac{\alpha^2}{2} - 3\alpha + 2$.

INDICE

Pour la valeur du minimum, remplace e^{α} par $2 - \alpha$: c'est ce qui évite toute valeur approchée.

CORRIGÉ

Dérivée. h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $h'(x) = e^x + x - 2 = g(x)$.

Limites. Pour tout réel x, $\dfrac{x^2}{2} - 2x = x\left(\dfrac{x}{2} - 2\right)$, qui tend vers $+\infty$ en $-\infty$ comme en $+\infty$. En $-\infty$, e^x tend vers 0 ; en $+\infty$, e^x tend vers $+\infty$. Donc $h(x)$ tend vers $+\infty$ aux deux bornes.

Variations. Avec le signe trouvé à la question 3, h est strictement décroissante sur $]-\infty, \alpha]$ et strictement croissante sur $[\alpha, +\infty[$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
h	$+\infty$	$\searrow$	$h(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

Valeur du minimum. On remplace e^{α} par $2 - \alpha$:

$$\begin{aligned} h(\alpha) &= e^{\alpha} + \frac{\alpha^2}{2} - 2\alpha \\ &= 2 - \alpha + \frac{\alpha^2}{2} - 2\alpha \\ &= \frac{\alpha^2}{2} - 3\alpha + 2. \end{aligned}$$

Conclusion. $h' = g$, h tend vers $+\infty$ en $-\infty$ et en $+\infty$, admet un minimum en α, et $h(\alpha) = \dfrac{\alpha^2}{2} - 3\alpha + 2$.

5.

En déduire que $h(x) > 0$ pour tout réel x.

INDICE

Encadre 3α à l'aide de l'inégalité $\alpha < 0{,}5$.

CORRIGÉ

Minoration de $h(\alpha)$. Comme $\alpha < 0{,}5$, on a $-3\alpha > -1{,}5$, donc :

$$\begin{aligned} h(\alpha) &> \frac{\alpha^2}{2} - 1{,}5 + 2 \\ &= \frac{\alpha^2}{2} + 0{,}5 > 0. \end{aligned}$$

Conclusion. Le minimum de h est strictement positif : pour tout réel x, $h(x) \geq h(\alpha) > 0$.