BURHAN

Fonctions exponentielles : exercices, application

2ème Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-experimentales/mathematiques/fonctions-exponentielles/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Fonctions exponentielles	Application	10

Exercice 1

Quand l'exponentielle et le logarithme se défont

Dans cet exercice, tu n'utilises que deux relations :

- $e^{\ln x} = x$ pour tout réel $x > 0$;
- $\ln\left(e^{x}\right) = x$ pour tout réel x.

1.

Calculer $A = e^{\ln 7}$, $B = \ln\left(e^{-4}\right)$, $C = e^{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}$ et $D = \ln\left(e^{\sqrt{2}}\right)$.

INDICE

Repère la fonction appliquée en dernier. Une exponentielle appliquée à un logarithme, ou l'inverse, se neutralise lorsque la condition d'existence est remplie.

2.

Simplifier, pour tout réel x, les expressions $\ln\left(e^{3x+1}\right)$ et $e^{\ln\left(x^2+1\right)}$.

INDICE

Pour la seconde expression, vérifie d'abord que $x^2 + 1$ est strictement positif quel que soit x.

3.

On considère la fonction p définie par $p(x) = e^{\ln(x-2)}$. Déterminer son ensemble de définition, puis simplifier $p(x)$. Les fonctions p et $x \mapsto x - 2$ sont-elles égales ?

INDICE

Une fonction est déterminée par son ensemble de définition **et** par ses valeurs. Commence par chercher pour quels x le nombre $\ln(x-2)$ existe.

Exercice 2

Équations : deux exponentielles égales

Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes.

1.

$$e^{3x-1} = e^{x+5}$$

INDICE

Deux exponentielles sont égales exactement quand leurs exposants le sont. Écris l'équation portant sur les exposants.

2.

$$e^{x^2} = e^{4x-3}$$

INDICE

Même principe ; l'équation sur les exposants est cette fois du second degré.

3.

$e^x = 7$, puis $e^{2x+1} = 4$.

INDICE

Pour $k > 0$, l'équation $e^X = k$ équivaut à $X = \ln k$. Pour la seconde, applique cela avec $X = 2x + 1$.

4.

$$e^x = -2$$

INDICE

Avant tout calcul, regarde le signe de chaque membre.

Exercice 3

Inéquations : l'exponentielle garde l'ordre

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

1.

$$e^{4-x} \geq e^{2x+1}$$

INDICE

L'exponentielle est strictement croissante : elle conserve le sens des inégalités. Compare les exposants.

2.

$e^{x} < 3$, puis $e^{-x} > 2$.

INDICE

Écris 3 et 2 comme des exponentielles, par exemple $3 = e^{\ln 3}$. Dans la seconde, surveille le signe devant x à la dernière étape.

3.

$$e^{x^{2}-1} \leq 1$$

INDICE

Quel exposant faut-il donner à e pour obtenir 1 ?

4.

$$e^{x} > -1$$

INDICE

Inutile de calculer : que sais-tu du signe de e^{x} ?

Exercice 4

Transformer une écriture avec les règles de calcul

1.

Écrire sous la forme e^u, pour tout réel x : $A = (e^x)^3 \times e^{-2x}$ et $B = \dfrac{e^{2x+1}}{e^{x-1}}$.

INDICE

Utilise $(e^a)^n = e^{na}$, $e^a \times e^b = e^{a+b}$ et $\dfrac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$. Garde des parenthèses autour de l'exposant du dénominateur.

2.

Calculer $e^{\ln 2 + \ln 5}$ et $e^{3\ln 2}$.

INDICE

Transforme la somme dans l'exposant en un produit d'exponentielles, puis utilise $e^{\ln a} = a$ pour $a > 0$.

3.

Montrer que, pour tout réel x :

$$\left(e^x + e^{-x}\right)^2 - \left(e^x - e^{-x}\right)^2 = 4.$$

INDICE

Développe les deux carrés. Que vaut le produit $e^x \times e^{-x}$?

4.

Montrer que, pour tout réel x :

$$\frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{1}{1 + e^{-x}}.$$

INDICE

Pars du membre de gauche et divise numérateur et dénominateur par e^x, qui n'est jamais nul.

Exercice 5

Limites aux bornes, sans forme indéterminée

On rappelle que $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

Calculer chaque limite en justifiant.

1.

$$\lim_{x\to+\infty} \left(3 - 2e^{-x}\right)$$

INDICE

Vers quoi tend $-x$ quand x tend vers $+\infty$?

2.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x + 1}{e^x + 2}$$

INDICE

Cherche séparément la limite du numérateur et celle du dénominateur.

3.

$$\lim_{x\to+\infty} e^{x-x^2}$$

INDICE

Trouve d'abord la limite de l'exposant $x - x^2$, en le factorisant par x.

4.

Calculer les deux limites :

$$\lim_{x\to0^+} e^{\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x\to0^-} e^{\frac{1}{x}}$$

INDICE

Le signe de x change tout : étudie la limite de $\dfrac{1}{x}$ de chaque côté de 0.

5.

$$\lim_{x\to-\infty} \left(e^x - x\right)$$

INDICE

Avant de parler de forme indéterminée, écris la limite de chaque terme.

Exercice 6

Croissances comparées : l'exponentielle l'emporte

Pour tout entier $n \geq 1$, on utilise les croissances comparées :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$$

1.

Calculer $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^3}$ et $\lim_{x \to -\infty} x^2 e^x$.

INDICE

Ce sont des formes indéterminées, du type $\dfrac{\infty}{\infty}$ puis $\infty \times 0$, que les croissances comparées tranchent directement.

2.

Calculer $\lim_{x \to +\infty} (e^x - 3x)$.

INDICE

Forme $\infty - \infty$: mets x en facteur pour faire apparaître $\dfrac{e^x}{x}$.

3.

Calculer $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{2x - 5}{e^x}$.

INDICE

Sépare la fraction en deux termes ; l'un d'eux est l'inverse de $\dfrac{e^x}{x}$.

Exercice 7

Dériver des fonctions avec une exponentielle

Pour chaque fonction, calculer la dérivée.

Tu utilises la règle suivante : si u est dérivable sur un intervalle I, alors $x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I, de dérivée $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$.

1.

$a(x) = e^{3x-2}$ et $b(x) = e^{x^2-2x}$, définies sur $\mathbb{R}$. Étudier aussi le signe de $b'(x)$.

INDICE

Identifie $u(x)$ dans chaque cas, calcule $u'(x)$, puis multiplie par l'exponentielle **inchangée**.

2.

$c(x) = (x^2+1)e^x$, définie sur $\mathbb{R}$. Montrer que $c'(x) = (x+1)^2 e^x$ et en déduire le sens de variation de c.

INDICE

C'est un produit : $(uv)' = u'v + uv'$. Mets ensuite e^x en facteur.

3.

$d(x) = \dfrac{e^x}{e^x+1}$, définie sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Quotient : $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, avec $v(x) = e^x + 1$, qui ne s'annule jamais.

4.

$h(x) = e^{\sqrt{x}}$, définie sur $[0, +\infty[$; on la dérive sur $]0, +\infty[$.

INDICE

Ici $u(x) = \sqrt{x}$, qui n'est dérivable que pour $x > 0$.

Exercice 8

Le nombre dérivé en 0 et les tangentes

On rappelle la limite suivante, qui est le nombre dérivé de l'exponentielle en 0 :

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

1.

Calculer :

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{-x} - 1}{x}$$

INDICE

Pose $t = -x$. Quand x tend vers 0, vers quoi tend t ?

2.

Calculer :

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{e^{5x} - 1}$$

INDICE

Fais d'abord apparaître $\dfrac{e^{5x} - 1}{5x}$, puis passe à l'inverse.

3.

Calculer :

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x}$$

INDICE

Écris $e^x - e^{-x} = (e^x - 1) - (e^{-x} - 1)$ et réutilise la question 1.

4.

Donner une équation de la tangente à la courbe de la fonction exponentielle au point d'abscisse 1, puis au point d'abscisse $\ln 2$.

INDICE

La tangente au point d'abscisse a a pour équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$. Ici la dérivée de l'exponentielle est l'exponentielle elle-même.

Exercice 9

Variations d'un trinôme multiplié par e^x

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 - 3)e^x$.

1.

Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

INDICE

En $-\infty$, développe : $f(x) = x^2e^x - 3e^x$, puis utilise une croissance comparée.

2.

Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = (x + 3)(x - 1)e^x$.

INDICE

Dérive le produit, mets e^x en facteur, puis factorise le trinôme obtenu.

3.

Dresser le tableau de variations de f.

INDICE

Comme $e^x > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $(x + 3)(x - 1)$, positif à l'extérieur des racines.

4.

Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

INDICE

Un produit est nul lorsque l'un de ses facteurs l'est ; or l'un des deux facteurs ne s'annule jamais.

Exercice 10

Bonus : l'exponentielle de base a

Bonus. Un document non authentifié cite l'exponentielle de base a ; non relevée dans les 15 sujets consultés ; sa place au chapitre reste à décider.

Pour $a > 0$ et pour tout réel x, on pose $a^x = e^{x \ln a}$.

1.

Écrire 5^x et $\left(\frac{2}{5}\right)^x$ à l'aide de l'exponentielle népérienne. Donner le signe de $\ln 5$ et celui de $\ln\left(\frac{2}{5}\right)$.

INDICE

Applique la définition avec $a = 5$, puis avec $a = \frac{2}{5}$. Compare chaque base à 1.

2.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $5^{x+1} = 5^{3-x}$, puis l'équation $5^x = 125$.

INDICE

Repasse à l'exponentielle népérienne : $e^A = e^B$ équivaut à $A = B$. Puis divise par $\ln 5$, qui n'est pas nul.

3.

Soient les fonctions $f : x \mapsto 5^x$ et $g : x \mapsto \left(\frac{2}{5}\right)^x$, définies sur $\mathbb{R}$. Calculer $f'(x)$ et $g'(x)$, puis donner le sens de variation et les limites aux bornes de chacune.

INDICE

Dérive $e^{x \ln a}$ comme $e^{u(x)}$ avec $u(x) = x \ln a$. Pour les limites, regarde vers quoi tend $x \ln a$.

4.

Résoudre l'inéquation :

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x \geq \frac{4}{25}$$

INDICE

$\frac{4}{25} = \left(\frac{2}{5}\right)^2$. En repassant aux exposants, tu divises par un nombre négatif.