BURHAN

Fonctions exponentielles : exercices, application

2ème Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-experimentales/mathematiques/fonctions-exponentielles/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Fonctions exponentielles	Application	10

Exercice 1

Quand l'exponentielle et le logarithme se défont

Dans cet exercice, tu n'utilises que deux relations :

- $e^{\ln x} = x$ pour tout réel $x > 0$;
- $\ln\left(e^{x}\right) = x$ pour tout réel x.

1.

Calculer $A = e^{\ln 7}$, $B = \ln\left(e^{-4}\right)$, $C = e^{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}$ et $D = \ln\left(e^{\sqrt{2}}\right)$.

INDICE

Repère la fonction appliquée en dernier. Une exponentielle appliquée à un logarithme, ou l'inverse, se neutralise lorsque la condition d'existence est remplie.

CORRIGÉ

Pourquoi ça marche. L'exponentielle et le logarithme népérien sont réciproques l'une de l'autre : appliquer l'une puis l'autre redonne le nombre de départ, pourvu que ce nombre soit dans le bon ensemble.

- $7 > 0$, donc $A = e^{\ln 7} = 7$.
- -4 est un réel, donc $B = \ln\left(e^{-4}\right) = -4$.
- $\frac{1}{3} > 0$, donc $C = \frac{1}{3}$.
- $\sqrt{2}$ est un réel, donc $D = \sqrt{2}$.

Conclusion. $A = 7$, $B = -4$, $C = \frac{1}{3}$ et $D = \sqrt{2}$.

À retenir. Pour $\ln\left(e^{x}\right)$, aucune condition : e^{x} est toujours strictement positif. Pour $e^{\ln x}$, il faut $x > 0$, sinon $\ln x$ n'existe pas.

2.

Simplifier, pour tout réel x, les expressions $\ln\left(e^{3x+1}\right)$ et $e^{\ln\left(x^{2}+1\right)}$.

INDICE

Pour la seconde expression, vérifie d'abord que $x^{2}+1$ est strictement positif quel que soit x.

CORRIGÉ

Première expression. Soit x un réel. On applique $\ln\left(e^{X}\right) = X$ avec $X = 3x + 1$:

$$\ln\left(e^{3x+1}\right) = 3x + 1.$$

Seconde expression. Soit x un réel. On a $x^{2} \geq 0$, donc $x^{2} + 1 \geq 1 > 0$. On applique $e^{\ln X} = X$ avec $X = x^{2} + 1 > 0$:

$$e^{\ln\left(x^{2}+1\right)} = x^{2} + 1.$$

Conclusion. Pour tout réel x, $\ln\left(e^{3x+1}\right) = 3x + 1$ et $e^{\ln\left(x^{2}+1\right)} = x^{2} + 1$.

3.

On considère la fonction p définie par $p(x) = e^{\ln(x-2)}$. Déterminer son ensemble de définition, puis simplifier $p(x)$. Les fonctions p et $x \mapsto x - 2$ sont-elles égales ?

INDICE

Une fonction est déterminée par son ensemble de définition **et** par ses valeurs. Commence par chercher pour quels x le nombre $\ln(x-2)$ existe.

CORRIGÉ

Ensemble de définition. $\ln(x-2)$ existe si et seulement si $x - 2 > 0$, c'est-à-dire $x > 2$. La fonction p est donc définie sur $]2, +\infty[$.

Simplification. Soit $x > 2$. Alors $x - 2 > 0$, donc $p(x) = x - 2$.

Comparaison. La fonction $x \mapsto x - 2$ est définie sur $\mathbb{R}$, alors que p ne l'est que sur $]2, +\infty[$. Par exemple, $p(0)$ n'existe pas, alors que $0 - 2 = -2$.

Conclusion. p est définie sur $]2, +\infty[$, où $p(x) = x - 2$. Les deux fonctions ne sont **pas égales** : elles coïncident seulement sur $]2, +\infty[$.

Attention. L'égalité $e^{\ln x} = x$ n'a de sens que pour $x > 0$.

Exercice 2

Équations : deux exponentielles égales

Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes.

1.

$$e^{3x-1} = e^{x+5}$$

INDICE

Deux exponentielles sont égales exactement quand leurs exposants le sont. Écris l'équation portant sur les exposants.

CORRIGÉ

L'exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$: deux exponentielles sont égales si et seulement si leurs exposants le sont. Soit x un réel :

$$\begin{aligned} & e^{3x-1} = e^{x+5} \\ \iff\ & 3x - 1 = x + 5 \\ \iff\ & 2x = 6 \\ \iff\ & x = 3. \end{aligned}$$

Conclusion. L'équation a pour unique solution 3 : $S = \{3\}$.

2.

$$e^{x^2} = e^{4x-3}$$

INDICE

Même principe ; l'équation sur les exposants est cette fois du second degré.

CORRIGÉ

Équation sur les exposants. Soit x un réel. Comme à la question précédente :

$$\begin{aligned} & e^{x^2} = e^{4x-3} \\ \iff\ & x^2 = 4x - 3 \\ \iff\ & x^2 - 4x + 3 = 0. \end{aligned}$$

Résolution du trinôme. Le discriminant vaut $\Delta = 16 - 12 = 4 > 0$. Les racines sont $\dfrac{4-2}{2} = 1$ et $\dfrac{4+2}{2} = 3$.

On peut le vérifier en factorisant : $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$.

Conclusion. $S = \{1\,;\,3\}$.

3.

$e^x = 7$, puis $e^{2x+1} = 4$.

INDICE

Pour $k > 0$, l'équation $e^X = k$ équivaut à $X = \ln k$. Pour la seconde, applique cela avec $X = 2x + 1$.

CORRIGÉ

Première équation. Comme $7 > 0$, $e^x = 7$ équivaut à $x = \ln 7$. Donc $S = \{\ln 7\}$.

Seconde équation. Comme $4 > 0$, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} & e^{2x+1} = 4 \\ \iff & 2x + 1 = \ln 4 \\ \iff & x = \frac{\ln 4 - 1}{2}. \end{aligned}$$

Simplification. Or $\ln 4 = \ln\left(2^2\right) = 2\ln 2$, donc :

$$\frac{\ln 4 - 1}{2} = \ln 2 - \frac{1}{2}.$$

Conclusion. $e^x = 7$ a pour solution $\ln 7$, et $e^{2x+1} = 4$ a pour solution $\ln 2 - \frac{1}{2}$.

4.

$$e^x = -2$$

INDICE

Avant tout calcul, regarde le signe de chaque membre.

CORRIGÉ

Pour tout réel x, $e^x > 0$, alors que $-2 < 0$. L'égalité est donc impossible.

Conclusion. L'équation n'a aucune solution : $S = \varnothing$.

Attention. Écrire « $x = \ln(-2)$ » est une erreur : le logarithme d'un nombre négatif n'existe pas.

Exercice 3

Inéquations : l'exponentielle garde l'ordre

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

1.

$$e^{4-x} \geq e^{2x+1}$$

INDICE

L'exponentielle est strictement croissante : elle conserve le sens des inégalités. Compare les exposants.

CORRIGÉ

L'exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$: elle conserve l'ordre, donc on peut comparer les exposants. Soit x un réel :

$$\begin{aligned} & e^{4-x} \geq e^{2x+1} \\ \iff & 4-x \geq 2x+1 \\ \iff & 3 \geq 3x \\ \iff & x \leq 1. \end{aligned}$$

Conclusion. $S =]-\infty, 1]$.

2.

$e^{x} < 3$, puis $e^{-x} > 2$.

INDICE

Écris 3 et 2 comme des exponentielles, par exemple $3 = e^{\ln 3}$. Dans la seconde, surveille le signe devant x à la dernière étape.

CORRIGÉ

Première inéquation. Comme $3 = e^{\ln 3}$ et que l'exponentielle est strictement croissante, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} & e^{x} < 3 \\ \iff & e^{x} < e^{\ln 3} \\ \iff & x < \ln 3. \end{aligned}$$

Donc $S =]-\infty, \ln 3[$.

Seconde inéquation. De même, avec $2 = e^{\ln 2}$, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} & e^{-x} > 2 \\ \iff & -x > \ln 2 \\ \iff & x < -\ln 2. \end{aligned}$$

À la dernière étape, on multiplie par -1 : le sens de l'inégalité change.

Conclusion. $e^{x} < 3$ a pour ensemble de solutions $]-\infty, \ln 3[$, et $e^{-x} > 2$ a pour ensemble de solutions $]-\infty, -\ln 2[$.

3.

$$e^{x^2-1} \leq 1$$

INDICE

Quel exposant faut-il donner à e pour obtenir 1 ?

CORRIGÉ

Comme $1 = e^0$ et que l'exponentielle est strictement croissante, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} & e^{x^2-1} \leq 1 \\ \iff & x^2 - 1 \leq 0 \\ \iff & (x-1)(x+1) \leq 0. \end{aligned}$$

Le trinôme $x^2 - 1$ a pour racines -1 et 1 et un coefficient dominant positif : il est négatif ou nul entre ses racines.

Conclusion. $S = [-1, 1]$.

4.

$$e^x > -1$$

INDICE

Inutile de calculer : que sais-tu du signe de e^x ?

CORRIGÉ

Pour tout réel x, $e^x > 0$ et $0 > -1$, donc $e^x > -1$.

Conclusion. Tout réel convient : $S = \mathbb{R}$.

Exercice 4

Transformer une écriture avec les règles de calcul

1.

Écrire sous la forme e^u, pour tout réel x : $A = (e^x)^3 \times e^{-2x}$ et $B = \dfrac{e^{2x+1}}{e^{x-1}}$.

INDICE

Utilise $(e^a)^n = e^{na}$, $e^a \times e^b = e^{a+b}$ et $\dfrac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$. Garde des parenthèses autour de l'exposant du dénominateur.

CORRIGÉ

Expression A. Soit x un réel. D'après $(e^a)^n = e^{na}$ puis $e^a \times e^b = e^{a+b}$:

$$\begin{aligned} A &= e^{3x} \times e^{-2x} \\ &= e^{3x-2x} \\ &= e^x. \end{aligned}$$

Expression B. D'après $\dfrac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$, en gardant les parenthèses :

$$\begin{aligned} B &= e^{(2x+1)-(x-1)} \\ &= e^{2x+1-x+1} \\ &= e^{x+2}. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel x, $A = e^x$ et $B = e^{x+2}$.

Attention. L'erreur fréquente donne $e^{2x+1-x-1} = e^x$: le signe moins porte sur **tout** l'exposant $x - 1$.

2.

Calculer $e^{\ln 2 + \ln 5}$ et $e^{3\ln 2}$.

INDICE

Transforme la somme dans l'exposant en un produit d'exponentielles, puis utilise $e^{\ln a} = a$ pour $a > 0$.

CORRIGÉ

Premier nombre. L'exponentielle d'une somme est le produit des exponentielles, et $e^{\ln a} = a$ pour $a > 0$:

$$\begin{aligned} & e^{\ln 2 + \ln 5} \\ &= e^{\ln 2} \times e^{\ln 5} \\ &= 2 \times 5 = 10. \end{aligned}$$

Second nombre. D'après $e^{na} = (e^a)^n$:

$$\begin{aligned} e^{3\ln 2} &= \left(e^{\ln 2}\right)^3 \\ &= 2^3 \\ &= 8. \end{aligned}$$

Conclusion. $e^{\ln 2 + \ln 5} = 10$ et $e^{3\ln 2} = 8$.

3.

Montrer que, pour tout réel x :

$$\left(e^{x}+e^{-x}\right)^{2} - \left(e^{x}-e^{-x}\right)^{2} = 4.$$

INDICE

Développe les deux carrés. Que vaut le produit $e^{x} \times e^{-x}$?

CORRIGÉ

Soit x un réel. On a $e^{x} \times e^{-x} = e^{0} = 1$, et $\left(e^{x}\right)^{2} = e^{2x}$, $\left(e^{-x}\right)^{2} = e^{-2x}$.

Premier carré. Avec $(a+b)^{2} = a^{2} + 2ab + b^{2}$:

$$\left(e^{x}+e^{-x}\right)^{2} = e^{2x} + 2 + e^{-2x}.$$

Second carré. Avec $(a-b)^{2} = a^{2} - 2ab + b^{2}$:

$$\left(e^{x}-e^{-x}\right)^{2} = e^{2x} - 2 + e^{-2x}.$$

Différence. Les termes e^{2x} et e^{-2x} disparaissent, il reste $2 - (-2) = 4$.

Conclusion. Pour tout réel x, $\left(e^{x}+e^{-x}\right)^{2} - \left(e^{x}-e^{-x}\right)^{2} = 4$.

4.

Montrer que, pour tout réel x :

$$\frac{e^{x}}{e^{x}+1} = \frac{1}{1+e^{-x}}.$$

INDICE

Pars du membre de gauche et divise numérateur et dénominateur par e^{x}, qui n'est jamais nul.

CORRIGÉ

Soit x un réel. On a $e^{x} \neq 0$ et $\dfrac{1}{e^{x}} = e^{-x}$. On divise le numérateur et le dénominateur par e^{x} :

$$\begin{aligned}\frac{e^{x}}{e^{x}+1} &= \frac{1}{1+\dfrac{1}{e^{x}}} \\ &= \frac{1}{1+e^{-x}}.\end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel x, $\dfrac{e^{x}}{e^{x}+1} = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$.

Attention. $e^{x}+1$ ne se simplifie pas en e^{x+1} : c'est une somme d'**exposants** qui devient un produit d'exponentielles, pas l'inverse.

Exercice 5

Limites aux bornes, sans forme indéterminée

On rappelle que $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

Calculer chaque limite en justifiant.

1.

$$\lim_{x \to +\infty} \left(3 - 2e^{-x}\right)$$

INDICE

Vers quoi tend $-x$ quand x tend vers $+\infty$?

CORRIGÉ

Quand x tend vers $+\infty$, $-x$ tend vers $-\infty$. Par composition avec $\lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$, e^{-x} tend vers 0.

Par somme et produit des limites :

$$\begin{aligned}&\lim_{x \to +\infty} \left(3 - 2e^{-x}\right)\\ &= 3 - 2 \times 0 = 3.\end{aligned}$$

Conclusion. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(3 - 2e^{-x}\right) = 3$.

2.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x + 1}{e^x + 2}$$

INDICE

Cherche séparément la limite du numérateur et celle du dénominateur.

CORRIGÉ

Quand x tend vers $-\infty$, e^x tend vers 0. Le numérateur tend donc vers 1 et le dénominateur vers 2, qui n'est pas nul.

Par quotient des limites :

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x + 1}{e^x + 2} = \frac{1}{2}.$$

Conclusion. La limite cherchée vaut $\dfrac{1}{2}$.

3.

$$\lim_{x \to +\infty} e^{x - x^2}$$

INDICE

Trouve d'abord la limite de l'exposant $x - x^2$, en le factorisant par x.

CORRIGÉ

Limite de l'exposant. Pour tout réel x, $x - x^2 = x(1 - x)$. Quand x tend vers $+\infty$, x tend vers $+\infty$ et $1 - x$ vers $-\infty$: par produit, $x - x^2$ tend vers $-\infty$.

Composition. Comme $\lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$:

$$\lim_{x \to +\infty} e^{x - x^2} = 0.$$

Conclusion. La limite cherchée vaut 0.

4.

Calculer les deux limites :

$$\lim_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}}$$

INDICE

Le signe de x change tout : étudie la limite de $\dfrac{1}{x}$ de chaque côté de 0.

CORRIGÉ

À droite de 0. Quand x tend vers 0^+, $\dfrac{1}{x}$ tend vers $+\infty$. Par composition avec $\lim\limits_{X \to +\infty} e^X = +\infty$, $e^{\frac{1}{x}}$ tend vers $+\infty$.

À gauche de 0. Quand x tend vers 0^-, $\dfrac{1}{x}$ tend vers $-\infty$. Par composition avec $\lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$, $e^{\frac{1}{x}}$ tend vers 0.

Conclusion. $\lim\limits_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$. Les deux limites diffèrent : précise toujours de quel côté tu te places.

5.

$$\lim_{x \to -\infty} (e^x - x)$$

INDICE

Avant de parler de forme indéterminée, écris la limite de chaque terme.

CORRIGÉ

Quand x tend vers $-\infty$, e^x tend vers 0 et $-x$ vers $+\infty$. La somme est du type $0 + (+\infty)$: ce n'est **pas** une forme indéterminée.

Conclusion. Par somme des limites, $\lim\limits_{x \to -\infty} (e^x - x) = +\infty$.

Exercice 6

Croissances comparées : l'exponentielle l'emporte

Pour tout entier $n \geq 1$, on utilise les croissances comparées :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$$

1.

Calculer $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^3}$ et $\lim_{x \to -\infty} x^2 e^x$.

INDICE

Ce sont des formes indéterminées, du type $\dfrac{\infty}{\infty}$ puis $\infty \times 0$, que les croissances comparées tranchent directement.

CORRIGÉ

En $+\infty$. Le numérateur et le dénominateur de $\dfrac{e^x}{x^3}$ tendent vers $+\infty$: c'est une forme indéterminée. La croissance comparée avec $n = 3$ la lève :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^3} = +\infty.$$

En $-\infty$. x^2 tend vers $+\infty$ et e^x vers 0 : c'est une forme indéterminée. La croissance comparée avec $n = 2$ la lève :

$$\lim_{x \to -\infty} x^2 e^x = 0.$$

Conclusion. La première limite vaut $+\infty$, la seconde vaut 0.

2.

Calculer $\lim_{x \to +\infty} (e^x - 3x)$.

INDICE

Forme $\infty - \infty$: mets x en facteur pour faire apparaître $\dfrac{e^x}{x}$.

CORRIGÉ

Mise en facteur. C'est une forme $\infty - \infty$. Pour tout réel $x > 0$:

$$e^x - 3x = x\left(\frac{e^x}{x} - 3\right).$$

Limite des facteurs. Par croissance comparée avec $n = 1$, $\dfrac{e^x}{x}$ tend vers $+\infty$, donc la parenthèse aussi. Le facteur x tend vers $+\infty$.

Conclusion. Par produit, $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^x - 3x) = +\infty$.

3.

Calculer $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{2x-5}{e^x}$.

INDICE

Sépare la fraction en deux termes ; l'un d'eux est l'inverse de $\dfrac{e^x}{x}$.

CORRIGÉ

Découpage. Pour tout réel x :

$$\frac{2x-5}{e^x} = 2\times\frac{x}{e^x} - 5e^{-x}.$$

Premier terme. Pour $x>0$, $\dfrac{x}{e^x}$ est l'inverse de $\dfrac{e^x}{x}$, qui tend vers $+\infty$ par croissance comparée : il tend donc vers 0.

Second terme. $-x$ tend vers $-\infty$, donc e^{-x} tend vers 0.

Conclusion. La limite vaut $2\times 0 - 5\times 0 = 0$: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-5}{e^x} = 0$.

Exercice 7

Dériver des fonctions avec une exponentielle

Pour chaque fonction, calculer la dérivée.

Tu utilises la règle suivante : si u est dérivable sur un intervalle I, alors $x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I, de dérivée $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$.

1.

$a(x) = e^{3x-2}$ et $b(x) = e^{x^2-2x}$, définies sur $\mathbb{R}$. Étudier aussi le signe de $b'(x)$.

INDICE

Identifie $u(x)$ dans chaque cas, calcule $u'(x)$, puis multiplie par l'exponentielle **inchangée**.

CORRIGÉ

Dérivée de a. On a $a(x) = e^{u(x)}$ avec $u(x) = 3x - 2$, dérivable sur $\mathbb{R}$, et $u'(x) = 3$. Pour tout réel x :

$$a'(x) = 3e^{3x-2}.$$

Dérivée de b. On a $b(x) = e^{v(x)}$ avec $v(x) = x^2 - 2x$, dérivable sur $\mathbb{R}$, et $v'(x) = 2x - 2$. Pour tout réel x :

$$b'(x) = (2x-2)e^{x^2-2x}.$$

Signe de $b'(x)$. Comme $e^{x^2-2x} > 0$, $b'(x)$ a le signe de $2x - 2$.

Conclusion. $a'(x) = 3e^{3x-2}$ et $b'(x) = (2x-2)e^{x^2-2x}$; $b'(x)$ est négatif sur $]-\infty, 1[$, nul en 1, positif sur $]1, +\infty[$.

Attention. La dérivée de $x \mapsto e^{x^2-2x}$ n'est ni $x \mapsto e^{2x-2}$, ni $x \mapsto (x^2-2x)e^{x^2-2x-1}$.

2.

$c(x) = (x^2+1)e^x$, définie sur $\mathbb{R}$. Montrer que $c'(x) = (x+1)^2e^x$ et en déduire le sens de variation de c.

INDICE

C'est un produit : $(uv)' = u'v + uv'$. Mets ensuite e^x en facteur.

CORRIGÉ

Dérivée. c est le produit de $u : x \mapsto x^2 + 1$ et de $v : x \mapsto e^x$, dérivables sur $\mathbb{R}$. D'après $(uv)' = u'v + uv'$, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} c'(x) &= 2xe^x + (x^2+1)e^x \\ &= \left(x^2 + 2x + 1\right)e^x \\ &= (x+1)^2e^x. \end{aligned}$$

Signe. Pour tout réel x, $(x+1)^2 \geq 0$ et $e^x > 0$, donc $c'(x) \geq 0$, avec égalité seulement en $x = -1$.

Conclusion. Pour tout réel x, $c'(x) = (x+1)^2e^x$. Cette dérivée est positive et ne s'annule qu'en un point isolé : c est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

3.

$d(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$, définie sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Quotient : $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, avec $v(x) = e^x + 1$, qui ne s'annule jamais.

CORRIGÉ

Dérivabilité. Pour tout réel x, $e^x + 1 > 0$. Quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas, d est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Calcul. D'après $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} d'(x) &= \frac{e^x\left(e^x + 1\right) - e^{2x}}{\left(e^x + 1\right)^2} \\ &= \frac{e^x}{\left(e^x + 1\right)^2}. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel x, $d'(x) = \dfrac{e^x}{\left(e^x + 1\right)^2} > 0$: d est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

4.

$h(x) = e^{\sqrt{x}}$, définie sur $[0, +\infty[$; on la dérive sur $]0, +\infty[$.

INDICE

Ici $u(x) = \sqrt{x}$, qui n'est dérivable que pour $x > 0$.

CORRIGÉ

On a $h(x) = e^{u(x)}$ avec $u(x) = \sqrt{x}$. La fonction u est dérivable sur $]0, +\infty[$, de dérivée $u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Pour tout réel $x > 0$:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} \\ &= \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel $x > 0$, $h'(x) = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$, et ce nombre est strictement positif.

Exercice 8

Le nombre dérivé en 0 et les tangentes

On rappelle la limite suivante, qui est le nombre dérivé de l'exponentielle en 0 :

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

1.

Calculer :

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1}{x}$$

INDICE

Pose $t=-x$. Quand x tend vers 0, vers quoi tend t ?

CORRIGÉ

Changement de variable. Posons $t=-x$; quand x tend vers 0, t tend vers 0. Pour tout réel $x\neq 0$:

$$\begin{aligned}\frac{e^{-x}-1}{x}&=\frac{e^t-1}{-t}\\&=-\frac{e^t-1}{t}.\end{aligned}$$

Passage à la limite. D'après la limite rappelée, $\dfrac{e^t-1}{t}$ tend vers 1.

Conclusion. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x}-1}{x}=-1$.

2.

Calculer :

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{e^{5x}-1}$$

INDICE

Fais d'abord apparaître $\dfrac{e^{5x}-1}{5x}$, puis passe à l'inverse.

CORRIGÉ

Faire apparaître la limite connue. Pour tout réel $x\neq 0$, posons $t=5x$, qui tend vers 0 quand x tend vers 0 :

$$\frac{e^{5x}-1}{x}=5\times\frac{e^t-1}{t}.$$

Cette quantité tend donc vers $5\times 1=5$.

Passage à l'inverse. $\dfrac{x}{e^{5x}-1}$ est l'inverse de la quantité précédente, et $5\neq 0$: elle tend vers $\dfrac{1}{5}$.

Conclusion. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{e^{5x}-1}=\dfrac{1}{5}$.

3.

Calculer :

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x}$$

INDICE

Écris $e^x - e^{-x} = (e^x - 1) - (e^{-x} - 1)$ et réutilise la question 1.

CORRIGÉ

Pour tout réel $x \neq 0$, on écrit $e^x - e^{-x} = (e^x - 1) - (e^{-x} - 1)$, d'où :

$$\begin{aligned} &\frac{e^x - e^{-x}}{x} \\ &= \frac{e^x - 1}{x} - \frac{e^{-x} - 1}{x}. \end{aligned}$$

Le premier terme tend vers 1 (limite rappelée), le second vers -1 (question 1).

Conclusion. Par différence, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{x} = 1 - (-1) = 2$.

4.

Donner une équation de la tangente à la courbe de la fonction exponentielle au point d'abscisse 1, puis au point d'abscisse $\ln 2$.

INDICE

La tangente au point d'abscisse a a pour équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$. Ici la dérivée de l'exponentielle est l'exponentielle elle-même.

CORRIGÉ

La dérivée de $x \mapsto e^x$ est $x \mapsto e^x$. Au point d'abscisse a, la tangente a donc pour équation $y = e^a(x - a) + e^a$.

En 1. La valeur et le nombre dérivé valent e :

$$\begin{aligned} y &= e(x - 1) + e \\ &= ex. \end{aligned}$$

Cette tangente passe par l'origine.

En $\ln 2$. La valeur et le nombre dérivé valent $e^{\ln 2} = 2$:

$$\begin{aligned} y &= 2(x - \ln 2) + 2 \\ &= 2x + 2 - 2\ln 2. \end{aligned}$$

Conclusion. La tangente au point d'abscisse 1 a pour équation $y = ex$, celle au point d'abscisse $\ln 2$ a pour équation $y = 2x + 2 - 2\ln 2$.

Exercice 9

Variations d'un trinôme multiplié par e^x

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 - 3)e^x$.

1.

Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

INDICE

En $-\infty$, développe : $f(x) = x^2e^x - 3e^x$, puis utilise une croissance comparée.

CORRIGÉ

En $+\infty$. $x^2 - 3$ tend vers $+\infty$ et e^x vers $+\infty$. Par produit, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

En $-\infty$. Le produit est du type $\infty \times 0$. On développe : pour tout réel x, $f(x) = x^2e^x - 3e^x$. Par croissance comparée, x^2e^x tend vers 0 ; de plus e^x tend vers 0. Par somme, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

Conclusion. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

2.

Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = (x + 3)(x - 1)e^x$.

INDICE

Dérive le produit, mets e^x en facteur, puis factorise le trinôme obtenu.

CORRIGÉ

Dérivée du produit. f est le produit de $x \mapsto x^2 - 3$ et de $x \mapsto e^x$, dérivables sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2xe^x + (x^2 - 3)e^x \\ &= \left(x^2 + 2x - 3\right) e^x. \end{aligned}$$

Factorisation. Le trinôme $x^2 + 2x - 3$ a pour racine évidente 1, car $1 + 2 - 3 = 0$. Le produit des racines vaut -3, donc l'autre racine est -3. Ainsi $x^2 + 2x - 3 = (x + 3)(x - 1)$.

Conclusion. Pour tout réel x, $f'(x) = (x + 3)(x - 1)e^x$.

3.

Dresser le tableau de variations de f.

INDICE

Comme $e^x > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $(x+3)(x-1)$, positif à l'extérieur des racines.

CORRIGÉ

Signe de $f'(x)$. Comme $e^x > 0$, $f'(x)$ a le signe de $(x+3)(x-1)$: positif à l'extérieur des racines -3 et 1, négatif entre elles.

Valeurs aux points critiques. $f(-3) = (9-3)e^{-3} = 6e^{-3}$ et $f(1) = (1-3)e = -2e$.

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	0	$\nearrow$	$6e^{-3}$	$\searrow$	$-2e$	$\nearrow$	$+\infty$

Conclusion. f est strictement croissante sur $]-\infty, -3]$, strictement décroissante sur $[-3, 1]$, strictement croissante sur $[1, +\infty[$. Valeurs approchées : $6e^{-3} \approx 0{,}30$ et $-2e \approx -5{,}44$.

4.

Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

INDICE

Un produit est nul lorsque l'un de ses facteurs l'est ; or l'un des deux facteurs ne s'annule jamais.

CORRIGÉ

Soit x un réel. Comme $e^x \neq 0$, un produit étant nul si et seulement si l'un de ses facteurs l'est :

$$\begin{aligned} & f(x) = 0 \\ \iff\ & x^2 - 3 = 0 \\ \iff\ & x = -\sqrt{3} \text{ ou } x = \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Conclusion. $S = \{-\sqrt{3}\,;\,\sqrt{3}\}$.

Contrôle avec le tableau. Sur $[-3, 1]$, f passe de $6e^{-3} > 0$ à $-2e < 0$, et $-\sqrt{3}$ est bien dans cet intervalle. Sur $[1, +\infty[$, f passe de $-2e$ à $+\infty$, et $\sqrt{3}$ s'y trouve.

Exercice 10

Bonus : l'exponentielle de base a

Bonus. Un document non authentifié cite l'exponentielle de base a ; non relevée dans les 15 sujets consultés ; sa place au chapitre reste à décider.

Pour $a > 0$ et pour tout réel x, on pose $a^x = e^{x \ln a}$.

1.

Écrire 5^x et $\left(\frac{2}{5}\right)^x$ à l'aide de l'exponentielle népérienne. Donner le signe de $\ln 5$ et celui de $\ln\left(\frac{2}{5}\right)$.

INDICE

Applique la définition avec $a = 5$, puis avec $a = \frac{2}{5}$. Compare chaque base à 1.

CORRIGÉ

Écriture. D'après la définition, pour tout réel x :

$$5^x = e^{x \ln 5}$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x = e^{x \ln\left(\frac{2}{5}\right)}$$

Signes. Comme $5 > 1$, $\ln 5 > 0$. Comme $0 < \frac{2}{5} < 1$, $\ln\left(\frac{2}{5}\right) < 0$.

Conclusion. $5^x = e^{x \ln 5}$ et $\left(\frac{2}{5}\right)^x = e^{x \ln\left(\frac{2}{5}\right)}$; $\ln 5$ est strictement positif et $\ln\left(\frac{2}{5}\right)$ strictement négatif.

2.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $5^{x+1} = 5^{3-x}$, puis l'équation $5^x = 125$.

INDICE

Repasse à l'exponentielle népérienne : $e^A = e^B$ équivaut à $A = B$. Puis divise par $\ln 5$, qui n'est pas nul.

CORRIGÉ

Première équation. Pour tous réels A et B, en repassant à l'exponentielle népérienne, $5^A = 5^B$ équivaut à $A \ln 5 = B \ln 5$, donc à $A = B$ car $\ln 5 \neq 0$. Soit x un réel :

$$\begin{aligned} & 5^{x+1} = 5^{3-x} \\ \iff\ & x + 1 = 3 - x \\ \iff\ & x = 1. \end{aligned}$$

Donc $S = \{1\}$.

Seconde équation. Comme $125 = 5^3$, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} & 5^x = 125 \\ \iff\ & x \ln 5 = 3 \ln 5 \\ \iff\ & x = 3. \end{aligned}$$

Conclusion. $5^{x+1} = 5^{3-x}$ a pour solution 1, et $5^x = 125$ a pour solution 3.

3.

Soient les fonctions $f : x \mapsto 5^x$ et $g : x \mapsto \left(\frac{2}{5}\right)^x$, définies sur $\mathbb{R}$. Calculer $f'(x)$ et $g'(x)$, puis donner le sens de variation et les limites aux bornes de chacune.

INDICE

Dérive $e^{x \ln a}$ comme $e^{u(x)}$ avec $u(x) = x \ln a$. Pour les limites, regarde vers quoi tend $x \ln a$.

CORRIGÉ

Dérivées. On a $f(x) = e^{u(x)}$ avec $u(x) = x \ln 5$ et $u'(x) = \ln 5$. Pour tout réel x :

$$f'(x) = 5^x \ln 5 > 0.$$

De même, pour tout réel x :

$$g'(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^x \ln\left(\frac{2}{5}\right) < 0.$$

Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et g strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Limites de f. Comme $\ln 5 > 0$, $x \ln 5$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$, donc $f(x)$ tend vers $+\infty$. En $-\infty$, $x \ln 5$ tend vers $-\infty$, donc $f(x)$ tend vers 0.

Limites de g. Comme $\ln\left(\frac{2}{5}\right) < 0$, c'est l'inverse : $g(x)$ tend vers 0 en $+\infty$ et vers $+\infty$ en $-\infty$.

Conclusion. f est strictement croissante, de limite 0 en $-\infty$ et $+\infty$ en $+\infty$; g est strictement décroissante, de limite $+\infty$ en $-\infty$ et 0 en $+\infty$.

4.

Résoudre l'inéquation :

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x \geq \frac{4}{25}$$

INDICE

$\frac{4}{25} = \left(\frac{2}{5}\right)^2$. En repassant aux exposants, tu divises par un nombre négatif.

CORRIGÉ

Comme $\frac{4}{25} = \left(\frac{2}{5}\right)^2$, on repasse aux exposants, puis on divise par $\ln\left(\frac{2}{5}\right) < 0$, ce qui change le sens. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} &\left(\frac{2}{5}\right)^x \geq \left(\frac{2}{5}\right)^2 \\ \iff\ & x \ln\left(\frac{2}{5}\right) \geq 2 \ln\left(\frac{2}{5}\right) \\ \iff\ & x \leq 2. \end{aligned}$$

Conclusion. $S =]-\infty, 2]$. C'est cohérent avec la décroissance de g : $g(x) \geq g(2)$ exactement pour $x \leq 2$.