BURHAN

Fonctions exponentielles

2ème Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-experimentales/mathematiques/fonctions-exponentielles/cours

Chapitre	Semestre
Fonctions exponentielles	Semestre 2

Une culture qui triple chaque heure

Une culture qui triple

Dans un laboratoire d'Agadir, une culture de bactéries **triple** chaque heure. Au départ, elle compte 1 millier de bactéries.

heures	0	1	2	3	4
milliers	1	3	9	27	81

Après n heures entières, on compte 3^n milliers de bactéries.

Devine : Une demi-heure plus tard

La croissance est régulière : sur chaque demi-heure, la population est multipliée par **le même** nombre k. Combien de milliers de bactéries compte-t-on après une demi-heure ?

A. 2 milliers : on est à mi-chemin entre 1 et 3.

Faux.

Ce raisonnement suppose qu'on **ajoute** la même quantité chaque demi-heure. Ici, on **multiplie** par le même nombre.

B. Environ $1{,}73$ millier, soit $\sqrt{3}$.

Juste.

Deux demi-heures font une heure : $k \times k = 3$, donc $k = \sqrt{3}$, car $k > 0$.

C. $1{,}5$ millier : la moitié de 3.

Faux.

Si l'on multipliait par $1{,}5$ chaque demi-heure, on aurait $1{,}5 \times 1{,}5 = 2{,}25$ milliers après une heure, et non 3.

D. On ne peut rien dire : 3^n n'a de sens que pour n entier.

Faux.

Les puissances rationnelles sont déjà connues : $3^{0{,}5} = 3^{1/2} = \sqrt{3}$ a un sens. Le nombre cherché existe donc.

Correction

Notons k le facteur d'une demi-heure. En une heure, on multiplie deux fois par k : $k^2 = 3$. Comme $k > 0$, $k = \sqrt{3} \approx 1{,}73$.

> On compte donc environ $1{,}73$ millier de bactéries, soit $3^{1/2}$: une puissance rationnelle, déjà connue. Mais que vaut 3^x pour un exposant **irrationnel**, comme $3^{\sqrt{2}}$? Pour répondre, il faut une fonction définie sur tout $\mathbb{R}$.

Ce que tu vas construire

Le logarithme transforme un produit en somme : $\ln(ab) = \ln a + \ln b$. Pour décrire une croissance qui **multiplie**, il faut faire le chemin inverse. C'est le rôle de la **fonction exponentielle**. Elle défait ce que fait le logarithme népérien, que tu connais déjà.

Ce que tu vas apprendre. L'exponentielle intervient dans 10 des 15 sujets de bac consultés. Dans 9 d'entre eux, elle est dans la fonction du problème d'étude de fonction. Tu vas d'abord la définir, puis calculer avec elle : équations, limites, dérivées. Tu finiras par une étude complète, rédigée comme les barèmes l'attendent.

Définir l'exponentielle à partir du logarithme

Remonter le logarithme

Rappel du chapitre précédent : la fonction $\ln$ est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$. De plus, $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$.

Sa courbe monte donc sans jamais redescendre, de tout en bas jusqu'à tout en haut.

> **Devine : Un antécédent pour 2**
>
> Combien de réels $x > 0$ vérifient $\ln x = 2$?
>
> **A.** Aucun : $\ln x$ reste petit et ne dépasse jamais 2.
>
> **Faux.**
> $\ln x$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$: il finit par dépasser 2. Par exemple, $\ln 10 \approx 2{,}30$.
>
> **B.** Deux : un petit et un grand.
>
> **Faux.**
> Deux antécédents distincts auraient la même image : impossible pour une fonction strictement croissante.
>
> **C.** Exactement un.
>
> **Juste.**
> La fonction $\ln$ est continue, strictement croissante, et prend toutes les valeurs réelles : 2 est atteint une fois et une seule.
>
> **D.** Une infinité.
>
> **Faux.**
> Une fonction strictement croissante ne prend jamais deux fois la même valeur.

Correction
Exactement un. La valeur 2 est atteinte, par le théorème des valeurs intermédiaires : $\ln$ est continue, $\ln 1 = 0$ et $\ln 10 \approx 2{,}30$. Elle n'est atteinte qu'une fois, car $\ln$ est strictement croissante. Ce réel se situe entre 1 et 10 ; on va bientôt lui donner un nom.

La définition

Ce qui vaut pour 2 vaut pour tout réel : chaque réel x possède un unique antécédent par $\ln$. On obtient ainsi une nouvelle fonction, qui « défait » le logarithme.

Définition : Fonction exponentielle népérienne

La fonction $\ln$ est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$, et l'image de $]0, +\infty[$ par $\ln$ est $\mathbb{R}$. Elle admet donc une fonction réciproque, définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $]0, +\infty[$: c'est la **fonction exponentielle népérienne**, notée $\exp$.

Pour tout réel x et tout réel $y > 0$:

$$y = \exp(x) \iff x = \ln y.$$

Vérifie : Lire la définition

D'après la définition, que signifie l'égalité $y = \exp(2)$?

A. $y = \ln 2$
Faux.
C'est l'inverse : $\exp$ défait $\ln$, elle ne le refait pas. $\ln 2 \approx 0{,}69$, alors que $\exp(2)$ est le nombre dont le logarithme vaut 2.

B. $y > 0$ et $\ln y = 2$
Juste.
C'est l'équivalence de la définition, avec $x = 2$.

C. $y = \dfrac{1}{\ln 2}$
Faux.
La réciproque d'une fonction n'est pas son inverse : ce sont deux notions différentes.

Correction
Avec $x = 2$, la définition donne : $y = \exp(2) \iff \ln y = 2$, avec $y > 0$. Le réel $\exp(2)$ est donc l'unique antécédent de 2 par $\ln$: c'est le nombre de la prédiction.

Aller et retour

Pars de x, applique $\exp$, puis $\ln$: tu reviens à x. Pars de $y > 0$, applique $\ln$, puis $\exp$: tu reviens à y. Et comme $\ln 1 = 0$, l'antécédent de 0 est 1.

Propriété : Exponentielle et logarithme

1. Pour tout réel x : $\exp(x) > 0$.
2. Pour tout réel x : $\ln(\exp(x)) = x$.
3. Pour tout réel $y > 0$: $\exp(\ln y) = y$.
4. $\exp(0) = 1$.

Exemple : simplifier

- $\ln(\exp(5)) = 5$ et $\exp(\ln 7) = 7$, car $7 > 0$.
- $\exp(\ln 0{,}2) = 0{,}2$, car $0{,}2 > 0$.
- $\exp(\ln(-3))$ n'a pas de sens : $\ln(-3)$ n'existe pas.
- $\exp(-4) > 0$: une exponentielle est toujours strictement positive.

La courbe

Devine : Un point de la courbe

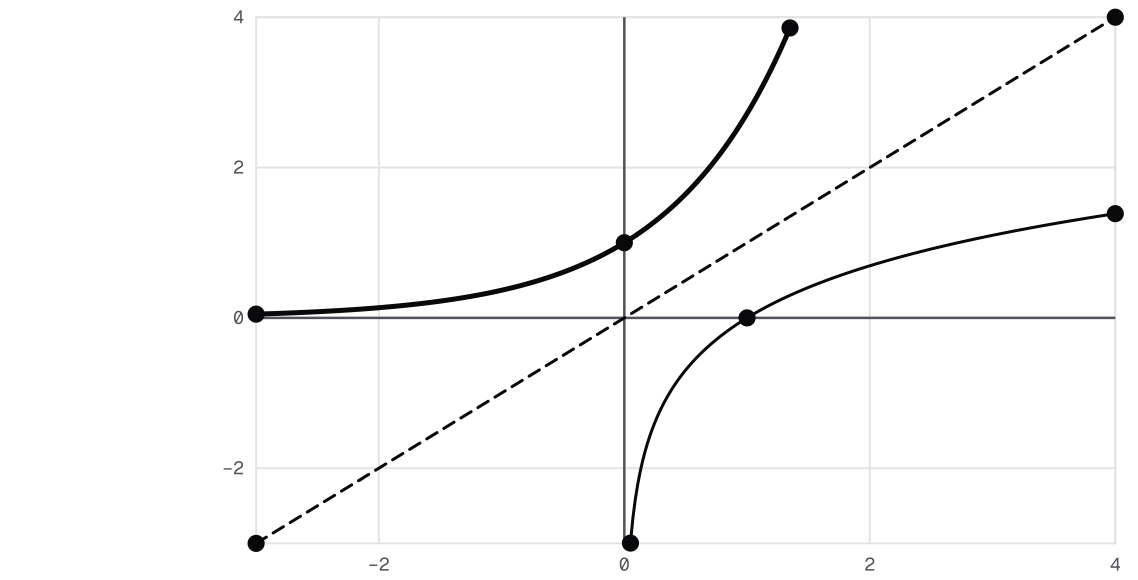
La courbe de $\ln$ passe par le point $(1, 0)$, car $\ln 1 = 0$. Par quel point passe à coup sûr la courbe de $\exp$?

A. $(0, 1)$
Juste.
$\exp(0) = 1$: on échange l'abscisse et l'ordonnée du point de la courbe de $\ln$.

B. $(1, 0)$
Faux.
Ce serait dire $\exp(1) = 0$. Or une exponentielle est strictement positive.

C. $(0, 0)$
Faux.
$\exp(0) = 1$, et non 0 : 0 n'est l'image d'aucun réel par $\exp$.

Correction
$\exp(0) = 1$: la courbe de $\exp$ passe par $(0, 1)$. Plus généralement, (a, b) est sur la courbe de $\ln$ si et seulement si (b, a) est sur celle de $\exp$.



Les courbes de x ↦ exp(x) et de x ↦ ln x, avec la droite d'équation y = x.

Échanger abscisse et ordonnée, c'est faire une symétrie par rapport à la droite $y = x$, dans un repère orthonormé. Les deux courbes sont donc symétriques : ce que tu sais de $\ln$ se lit, retourné, sur $\exp$.

Le nombre e et la notation e^x

Le nombre e

Le nombre $\exp(1)$ joue un rôle à part : c'est l'unique réel dont le logarithme vaut 1. Situons-le.

Devine : Situer exp(1)

Entre quels entiers consécutifs se trouve $\exp(1)$?

A. Entre 1 et 2

Faux.

$\ln 2 \approx 0{,}69 < 1$: le nombre cherché est plus grand que 2.

B. Entre 2 et 3

Juste.

$\ln 2 < 1 < \ln 3$, et $\ln$ est strictement croissante.

C. Entre 0 et 1

Faux.

Pour $0 < x < 1$, $\ln x < 0$: impossible d'obtenir 1.

D. Entre 3 et 4

Faux.

$\ln 3 \approx 1{,}10$ dépasse déjà 1.

Indice 1
Cherche deux entiers n et $n+1$ tels que $\ln n < 1 < \ln(n+1)$.
Indice 2
La fonction $\ln$ est strictement croissante : compare $\ln 2$ et $\ln 3$ au nombre 1.
Indice 3
Ta calculatrice donne $\ln 2 \approx 0{,}69$ et $\ln 3 \approx 1{,}10$.

Correction
Comme $\ln 2 \approx 0{,}69 < 1$ et $\ln 3 \approx 1{,}10 > 1$, et que $\ln$ est strictement croissante, le réel dont le logarithme vaut 1 est compris entre 2 et 3. Une calculatrice donne $\exp(1) \approx 2{,}718$.

La notation puissance

Calcule $\ln\left(\exp(1)^2\right)$: c'est $2\ln\left(\exp(1)\right) = 2$. Donc $\exp(1)^2$ est le réel dont le logarithme vaut 2, c'est-à-dire $\exp(2)$. Les puissances de $\exp(1)$ suivent la fonction $\exp$: d'où une écriture sous forme de puissance.

Définition : Le nombre e et la notation e^x

On note $e = \exp(1)$: c'est l'unique réel tel que $\ln e = 1$, et $e \approx 2{,}718$.

Pour tout rationnel r, $\ln\left(e^r\right) = r\ln e = r$, donc $\exp(r) = e^r$. On étend cette écriture à tout réel x : on note

$$e^x = \exp(x).$$

Exemple : premières valeurs

Avec la calculatrice :

x	-1	0	$0{,}5$	1	2
e^x	$\approx 0{,}368$	1	$\approx 1{,}649$	$\approx 2{,}718$	$\approx 7{,}389$

Les règles de l'aller-retour s'écrivent maintenant : $\ln\left(e^x\right) = x$ pour tout réel x, et $e^{\ln y} = y$ pour tout $y > 0$.

Retour aux bactéries : la notation e^x donne un sens aux puissances de e pour **tous** les réels, irrationnels compris. Ainsi $e^{\sqrt{2}}$ existe. Comme $3 = e^{\ln 3}$, on pourra de même poser $3^x = e^{x\ln 3}$: la question de l'introduction est réglée, et la section Bonus y revient.

Simplifier avec prudence

Attention : Avant de simplifier, regarde le signe

$\ln\left(e^{A}\right) = A$ est vrai sans condition. En revanche, $e^{\ln B}$ n'existe que si $B > 0$.

✗ $e^{\ln(x-4)} = x - 4$ pour tout réel x.

✓ $e^{\ln(x-4)} = x - 4$ pour $x > 4$ seulement : pour $x = 1$, $\ln(-3)$ n'existe pas.

Vérifie : Simplifier une expression

Que vaut $A = e^{\ln 6} + \ln\left(e^{-4}\right)$?

A. $A = 2$

Juste.
$e^{\ln 6} = 6$ car $6 > 0$, et $\ln\left(e^{-4}\right) = -4$: $6 - 4 = 2$.

B. $A = 10$

Faux.
$\ln\left(e^{-4}\right)$ vaut -4, et non 4 : l'aller-retour rend le nombre de départ, signe compris.

C. A n'existe pas, car $-4 < 0$.

Faux.
La condition $B > 0$ concerne $e^{\ln B}$. Ici, $\ln\left(e^{-4}\right)$ existe, car $e^{-4} > 0$.

D. $A = \ln 6 - 4$

Faux.
$e^{\ln 6}$ vaut 6, et non $\ln 6$: l'exponentielle défait le logarithme.

Correction
$A = 6 + (-4) = 2$. Le premier terme se simplifie car $6 > 0$; le second, sans condition.

Sens de variation

La réciproque d'une fonction continue et strictement croissante sur un intervalle est continue et strictement croissante, elle aussi. Tu l'as vu au chapitre sur la continuité. Le résultat s'applique à $\exp$, réciproque de $\ln$.

Propriété : Continuité et sens de variation

La fonction $x \mapsto e^{x}$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Vérifie : Ranger des exponentielles

Range dans l'ordre croissant : $a = e^{-3}$, $b = e^{0{,}5}$ et $c = e^{-2}$.

A. $c < a < b$

Faux.

$-3 < -2$: le plus petit exposant donne la plus petite exponentielle. Attention au signe moins.

B. $a < c < b$

Juste.

Les exposants vérifient $-3 < -2 < 0{,}5$, et $x \mapsto e^x$ est strictement croissante.

C. $b < a < c$

Faux.

Une exponentielle d'exposant négatif reste positive, mais elle est inférieure à 1, donc à $e^{0{,}5}$.

Correction

On compare les exposants : $-3 < -2 < 0{,}5$. Comme $x \mapsto e^x$ est strictement croissante, $e^{-3} < e^{-2} < e^{0{,}5}$, soit $a < c < b$.

Équations et inéquations

Résoudre une équation simple

Devine : Une équation simple

Quelle est la solution réelle de l'équation $e^x = 5$?

A. $x = e^5$

Faux.

$e^5 \approx 148$: on cherche l'exposant qui donne 5, pas une nouvelle exponentielle.

B. $x = \dfrac{5}{e}$

Faux.

Diviser par e ne retire pas l'exponentielle : e^x n'est pas $e \times x$.

C. Aucune solution.

Faux.

$5 > 0$, et $\exp$ prend toutes les valeurs strictement positives : il y a une solution.

D. $x = \ln 5$

Juste.

Par définition, $e^x = 5 \iff x = \ln 5$, car $5 > 0$.

Correction

$e^x = 5 \iff x = \ln 5$, car $5 > 0$ (définition de $\exp$). Donc $S = \{\ln 5\}$, avec $\ln 5 \approx 1{,}61$.

Comme $x \mapsto e^x$ est strictement croissante, deux exponentielles sont rangées comme leurs exposants. Une égalité ou une inégalité entre exponentielles se ramène donc à une comparaison d'exposants.

Propriété : Comparer et résoudre

Pour tous réels a et b :

$$e^a = e^b \iff a = b \qquad \text{et} \qquad e^a < e^b \iff a < b.$$

Pour tout réel $k > 0$: $e^x = k \iff x = \ln k$. Pour tout réel $k \leq 0$, l'équation $e^x = k$ n'a aucune solution réelle.

Exemple et piège

Exemple : une équation

Résolvons $e^{x+1} = e^{2x-3}$. Les exposants doivent être égaux :

$$\begin{aligned} & e^{x+1} = e^{2x-3} \\ \iff\ & x + 1 = 2x - 3 \\ \iff\ & x = 4. \end{aligned}$$

Donc $S = \{4\}$. Vérification : $e^{4+1} = e^5$ et $e^{2\times 4-3} = e^5$.

Attention : Une exponentielle ne vaut jamais un nombre négatif

Remplace 5 par -5 : l'équation $e^x = -5$ n'a **aucune** solution réelle, car $e^x > 0$ pour tout réel x.

✗ $e^x = -5 \iff x = \ln(-5)$.

✓ $e^x = -5$: $S = \varnothing$. De même, $e^x = 0$ n'a aucune solution.

Trouve l'erreur

Trouve l'erreur : Une copie à corriger

Un élève résout l'inéquation $e^{2x-1} > e^{3-x}$ ainsi :

$$\begin{aligned} & e^{2x-1} > e^{3-x} \\ \iff\ & \ln(2x-1) > \ln(3-x) \\ \iff\ & 2x - 1 > 3 - x \\ \iff\ & x > \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Il trouve $x > \dfrac{4}{3}$, ce qui est la bonne réponse. Que reprocher à cette rédaction ?

A. Le sens de l'inégalité aurait dû changer en passant aux exposants.

Faux.

Non : $x \mapsto e^x$ est strictement croissante, l'ordre est conservé.

B. Il fallait d'abord imposer $2x - 1 > 0$ et $3 - x > 0$.

Faux.

Ces conditions viennent de l'erreur de l'élève : les deux exponentielles existent pour tout réel x.

C. Le passage au logarithme est faux : $\ln\left(e^{2x-1}\right) = 2x-1$, et non $\ln(2x-1)$.

Juste.

C'est l'erreur : on prend le logarithme de l'exponentielle entière, ce qui rend l'exposant.

D. La solution devrait être $\left]-\infty, \frac{4}{3}\right[$.

Faux.

$3x > 4$ donne bien $x > \frac{4}{3}$: l'intervalle est juste.

Correction

On compare directement les exposants, car $x \mapsto e^x$ est strictement croissante :

$$\begin{aligned} & e^{2x-1} > e^{3-x} \\ \iff\ & 2x-1 > 3-x \\ \iff\ & 3x > 4 \\ \iff\ & x > \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Donc $S = \left]\frac{4}{3}, +\infty\right[$.

L'écriture de l'élève imposerait à tort $2x-1>0$ et $3-x>0$, soit $\frac{1}{2} < x < 3$.

À toi : une inéquation

Résous dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^x \leq 4$.

Indice 1

Écris 4 comme une exponentielle.

Indice 2

$4 = e^{\ln 4}$, car $4 > 0$.

Indice 3

Compare les exposants : l'ordre est conservé.

Réponse

Comme $4>0$, on peut écrire $4 = e^{\ln 4}$. La fonction $x \mapsto e^x$ étant strictement croissante :

$$e^x \leq e^{\ln 4} \iff x \leq \ln 4.$$

Donc $S =]-\infty, \ln 4]$.

Calculer avec l'exponentielle

Un produit d'exponentielles

Devine : Un produit sans calculatrice

Sans calculatrice, à quoi est égal $e^2 \times e^3$?

A. $e^2 + e^3$

Faux.
$e^2 + e^3 \approx 27{,}5$, alors que $e^2 \times e^3 \approx 148{,}4$: une somme n'est pas un produit.

B. e^6

Faux.
On a multiplié les exposants. Or $\ln\left(e^2 \times e^3\right) = 2 + 3$: les exposants s'**ajoutent**.

C. e^5

Juste.
$\ln\left(e^2 \times e^3\right) = \ln\left(e^2\right) + \ln\left(e^3\right) = 5$, donc le produit vaut e^5.

Correction
On passe par le logarithme : $\ln\left(e^2 \times e^3\right) = \ln\left(e^2\right) + \ln\left(e^3\right) = 2 + 3 = 5$. Donc $e^2 \times e^3 = e^5$.

Le même calcul marche pour tous réels a et b :

$$\begin{aligned}\ln\left(e^a \times e^b\right) &= a + b \\ &= \ln\left(e^{a+b}\right).\end{aligned}$$

Or deux nombres strictement positifs de même logarithme sont égaux.

L'exponentielle d'une somme

Propriété : Exponentielle d'une somme

Pour tous réels a et b :

$$e^{a+b} = e^a \times e^b.$$

Exemple : réécrire

- $e^{x+1} = e \times e^x$.
- $e^{2x} = e^{x+x} = e^x \times e^x$, soit $e^{2x} = \left(e^x\right)^2$.
- $e^x \times e^{-x} = e^0 = 1$: le nombre e^{-x} est l'inverse de e^x.

Opposé, différence, puissance

Et pour un quotient ? D'après la règle précédente, $e^3 \times e^2 = e^5$. Donc $\dfrac{e^5}{e^2} = e^3$: les exposants se **sous-traient**.

Propriété : Opposé, différence, puissance

Pour tous réels a et b, et tout rationnel r :

$$e^{-a} = \frac{1}{e^a}, \qquad e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}, \qquad (e^a)^r = e^{ra}.$$

Attention : Somme d'exposants, pas somme d'exponentielles

L'exponentielle change une somme d'exposants en **produit**, jamais en somme.

✗ $e^{0+0} = e^0 + e^0 = 2$.

✓ $e^{0+0} = e^0 \times e^0 = 1$.

De même, $(e^x)^3 = e^{3x}$, et non e^{x^3} : pour $x = 2$, on obtient e^6, pas e^8.

Vérifie : Tout simplifier

Écris sous la forme e^k le nombre $B = \dfrac{(e^x)^2 \times e^{-x}}{e^{x+1}}$.

A. $B = e^{x^2-2x-1}$

Faux.
$(e^x)^2 = e^{2x}$, et non e^{x^2}.

B. $B = e^1$

Faux.
Le signe moins devant $(x+1)$ porte sur les deux termes : $-x-1$.

C. $B = e^{-1}$

Juste.
Exposant : $2x - x - (x+1) = -1$.

D. $B = e^{-x-1}$

Faux.
$(e^x)^2 = e^{2x}$: l'exposant 2 multiplie x, il ne disparaît pas.

Correction
Au numérateur, $(e^x)^2 = e^{2x}$, donc $e^{2x} \times e^{-x} = e^x$. Puis, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} B &= \frac{e^x}{e^{x+1}} \\ &= e^{x-(x+1)} \\ &= e^{-1}. \end{aligned}$$

Changer de variable

Dans $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$, deux exponentielles apparaissent. Or $e^{2x} = (e^x)^2$. Avec la nouvelle inconnue $X = e^x$, l'équation devient un trinôme. Une condition accompagne toujours ce changement : $X > 0$.

À toi : Une équation du second degré déguisée

Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$.

Indice 1
Pose $X = e^x$, avec $X > 0$, et écris l'équation en X.
Indice 2
Le trinôme $X^2 - 3X + 2$ a pour discriminant $\Delta = 9 - 8 = 1$.
Indice 3
Ses racines sont 1 et 2 : vérifie qu'elles sont strictement positives, puis reviens à x.

Réponse
Posons $X = e^x$, avec $X > 0$. Comme $e^{2x} = X^2$, l'équation s'écrit :

$$X^2 - 3X + 2 = 0.$$

Son discriminant vaut $9 - 8 = 1$; ses racines $X = 1$ et $X = 2$ sont strictement positives. On revient à x :

- $e^x = 1 \iff x = 0$;
- $e^x = 2 \iff x = \ln 2$.

Donc $S = \{0\,;\,\ln 2\}$.

Attention : Une racine négative ne donne rien

Après le changement $X = e^x$, garde seulement les racines **strictement positives**. Si l'équation en X donnait $X = -4$, il faudrait résoudre $e^x = -4$: aucune solution. On n'écrit jamais $x = \ln(-4)$.

Remarque : Pour situer cette méthode

Ce changement de variable n'apparaît dans aucun des 15 sujets consultés : $e^{2x} - 4e^x$ y est seulement factorisé. Des documents non authentifiés citent les équations, inéquations et systèmes comportant des exponentielles, sans nommer ce changement. Les systèmes sont travaillés en Bonus dans les exercices d'entraînement.

Limites et croissances comparées

Aux deux bornes

Observe quelques valeurs :

x	-10	-5	0	5	10
e^x	$\approx 0{,}000045$	$\approx 0{,}0067$	1	$\approx 148{,}4$	$\approx 22\,026$

Devine : Vers la gauche

Que fait e^x quand x tend vers $-\infty$?

A. Il tend vers 1.

Faux.

$e^0 = 1$, mais pour $x = -5$ on a déjà $e^x \approx 0{,}0067$.

B. Il tend vers $-\infty$.

Faux.

Une exponentielle reste strictement positive : elle ne peut pas descendre sous 0.

C. Il n'a pas de limite.

Faux.

Les valeurs du tableau se rapprochent d'un nombre précis quand x diminue : il y a une limite.

D. Il tend vers 0.

Juste.

Les valeurs du tableau s'écrasent sur 0, sans jamais l'atteindre, car $e^x > 0$.

Correction

Quand x tend vers $-\infty$, e^x tend vers 0, en restant strictement positif. Quand x tend vers $+\infty$, e^x grandit sans limite. Ces deux faits se déduisent des limites de $\ln$, en échangeant les rôles.

Propriété : Limites aux bornes

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to -\infty} e^x = 0.$$

Exemple : avec un exposant négatif

Cherchons $\lim_{x \to +\infty} e^{-x}$. On pose $X = -x$: quand x tend vers $+\infty$, X tend vers $-\infty$. Or $\lim_{X \to -\infty} e^X = 0$. Donc $\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$.

De même, $\lim_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$.

La course contre les puissances

Qui gagne entre e^x et x^3 quand x devient grand ?

x	5	10	20
x^3	125	$1\,000$	$8\,000$
e^x	≈ 148	$\approx 22\,026$	$\approx 485\,000\,000$

L'exponentielle finit par écraser toute puissance de x.

Propriété : Croissances comparées

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} xe^x = 0.$$

Plus généralement, pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0.$$

Vérifie : Le bon argument

Quel raisonnement donne correctement la limite de x^2e^x quand x tend vers $-\infty$?

A. Forme $(+\infty)\times 0$: un produit par un facteur qui tend vers 0 tend vers 0.

Faux.

$(+\infty)\times 0$ est une forme indéterminée : selon les cas, la limite peut valoir n'importe quoi. Il faut un résultat qui tranche.

B. Croissance comparée du cours avec $n = 2$: la limite vaut 0.

Juste.

L'exponentielle l'emporte sur x^2 en $-\infty$: c'est l'énoncé ci-dessus, avec $n = 2$.

C. Le facteur x^2 tend vers $+\infty$ et l'emporte : la limite vaut $+\infty$.

Faux.

C'est l'inverse : en $-\infty$, l'exponentielle écrase toute puissance de x.

D. On écrit $x^2e^x = \dfrac{e^x}{x^2}$: ce quotient tend vers 0.

Faux.

$x^2e^x \neq \dfrac{e^x}{x^2}$: multiplier par x^2 n'est pas diviser par x^2.

Correction

La forme $(+\infty)\times 0$ est indéterminée : aucune règle d'opération ne conclut. Le résultat vient de la croissance comparée $\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$, avec $n = 2$: $\lim_{x\to-\infty} x^2e^x = 0$.

Lever une indétermination

Méthode : factoriser par le terme dominant

1. **Repère la forme** : $(+\infty)-(+\infty)$, quotient de deux infinis, ou $0\times(\pm\infty)$.
2. **Factorise** par le terme le plus rapide : en $+\infty$, c'est e^x face à une puissance de x.
3. **Reconnais** une croissance comparée dans le facteur qui reste.
4. **Conclus** avec les règles sur les sommes et les produits, en citant le résultat employé.

Exemple : une différence

Cherchons $\lim_{x\to+\infty}\left(e^x - x^2\right)$. Les deux termes tendent vers $+\infty$: forme $(+\infty)-(+\infty)$.

On factorise par e^x : pour tout réel x,

$$e^x - x^2 = e^x\left(1 - \frac{x^2}{e^x}\right).$$

Le quotient $\dfrac{x^2}{e^x}$ est l'inverse de $\dfrac{e^x}{x^2}$, qui tend vers $+\infty$: il tend donc vers 0. La parenthèse tend vers 1, d'où $\lim_{x\to+\infty}\left(e^x - x^2\right) = +\infty$.

En une ligne : $x^2e^{-x} = \dfrac{x^2}{e^x}$ tend vers 0 en $+\infty$, pour la même raison.

Attention : Pas d'indétermination, pas de croissance comparée

Avant de factoriser, vérifie que la forme est vraiment indéterminée.

- Quand x tend vers 0 avec $x>0$, $\dfrac{e^x}{x}$ est de la forme « 1 divisé par 0^+ » : la limite vaut $+\infty$ directement.
- En $+\infty$, xe^x est un produit de deux facteurs qui tendent vers $+\infty$: il tend vers $+\infty$, sans autre calcul.

À toi : une limite des deux côtés

Calcule les limites de $e^x - x - 1$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

Indice 1
En $-\infty$, regarde chaque terme séparément : y a-t-il vraiment une indétermination ?
Indice 2
En $+\infty$, c'est une forme $(+\infty)-(+\infty)$: mets e^x en facteur, comme dans la méthode.
Indice 3
$e^x - x - 1 = e^x\left(1 - \dfrac{x}{e^x} - \dfrac{1}{e^x}\right)$: que deviennent $\dfrac{x}{e^x}$ et $\dfrac{1}{e^x}$?

Réponse
En $-\infty$: e^x tend vers 0 et $-x-1$ tend vers $+\infty$. Pas d'indétermination : la limite vaut $+\infty$.

En $+\infty$: forme $(+\infty)-(+\infty)$. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} &e^x - x - 1 \\ &= e^x\left(1 - \frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x}\right). \end{aligned}$$

Par croissance comparée, $\dfrac{e^x}{x}$ tend vers $+\infty$, donc son inverse $\dfrac{x}{e^x}$ tend vers 0 ; et $\dfrac{1}{e^x}$ tend vers 0.

La parenthèse tend vers 1, et e^x vers $+\infty$: la limite vaut $+\infty$.

Dériver l'exponentielle

La pente en 0

Devine : Un taux d'accroissement

La calculatrice donne $e^{0,01} \approx 1,01005$. Que vaut environ le taux $\dfrac{e^{0,01} - e^0}{0,01}$, et que suggère-t-il ?

A. Environ $1,005$: la tangente en 0 a une pente proche de 1.

Juste.
$\dfrac{0,01005}{0,01} \approx 1,005$: la pente de la courbe en 0 semble valoir 1.

B. Environ $0,01$: la courbe est presque plate en 0.

Faux.
Tu as oublié de diviser par $0,01$: $\dfrac{0,01005}{0,01} \approx 1,005$.

C. Environ $2,718$: la pente vaut e.

Faux.
Le calcul donne $1,005$, pas e. La pente en 0 vaut $e^0 = 1$.

Correction
$\dfrac{e^{0,01} - 1}{0,01} \approx \dfrac{0,01005}{0,01} = 1,005$. Plus l'écart est petit, plus ce taux se rapproche de 1 : la tangente en 0 semble avoir pour pente 1, c'est-à-dire e^0.

On le démontre avec la dérivée d'une réciproque. Pour tout réel x, $\ln'(e^x) = \dfrac{1}{e^x}$, qui n'est jamais nul. Donc $\exp$ est dérivable en x, et son nombre dérivé est l'inverse de $\dfrac{1}{e^x}$, soit e^x.

Théorème : Dérivée de l'exponentielle

La fonction $x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x :

$$(e^x)' = e^x.$$

Exemple : un produit

Soit $h(x) = (x-1)e^x$ sur $\mathbb{R}$. Avec la dérivée d'un produit, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} h'(x) &= 1 \times e^x + (x-1)e^x \\ &= x\,e^x. \end{aligned}$$

Comme $e^x > 0$, $h'(x)$ a le signe de x : h est décroissante sur $]-\infty, 0]$ et croissante sur $[0, +\infty[$, de minimum $h(0) = -1$.

Dériver une exponentielle composée

Pour $e^{u(x)}$, on dérive une composée : l'exponentielle, qui se recopie, puis la fonction intérieure u. Le facteur $u'(x)$ vient de là.

Théorème : Dérivée de x ↦ e^(u(x))

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I. La fonction $x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I et, pour tout $x \in I$:

$$\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x)\, e^{u(x)}.$$

Exemple : une courbe en cloche

Soit $q(x) = e^{-x^2}$. Ici $u : x \mapsto -x^2$ a pour dérivée $u' : x \mapsto -2x$, donc, pour tout réel x :

$$q'(x) = -2x\, e^{-x^2}.$$

Comme $e^{-x^2} > 0$, $q'(x)$ a le signe de $-2x$: positif pour $x < 0$, négatif pour $x > 0$. La fonction q atteint son maximum en 0 : $q(0) = 1$.

Attention : La dérivée garde l'exponentielle

Pour dériver $e^{u(x)}$, l'exponentielle reste **identique**, et on la multiplie par $u'(x)$.

✗ $\left(e^{3x}\right)' = e^3$, ou $\left(e^{3x}\right)' = 3x\, e^{3x-1}$.

✓ $\left(e^{3x}\right)' = 3\, e^{3x}$.

À toi : À toi de dériver

Quelle est la dérivée de $x \mapsto e^{x^3}$?

A. $x \mapsto e^{x^3}$

Faux.
C'est la règle de e^x seule. Ici l'exposant n'est pas x : il manque le facteur $u'(x)$.

B. $x \mapsto e^{3x^2}$

Faux.
On ne remplace pas l'exposant par sa dérivée : $(e^u)' = u'\, e^u$.

C. $x \mapsto x^3\, e^{x^3-1}$

Faux.

Ce n'est pas une puissance X^n : la règle « nX^{n-1} » ne s'applique pas à l'exponentielle.

D. $x \mapsto 3x^2\, e^{x^3}$

Juste.

$u : x \mapsto x^3$ a pour dérivée $x \mapsto 3x^2$: on multiplie l'exponentielle par $3x^2$.

Correction

Avec $u : x \mapsto x^3$, de dérivée $x \mapsto 3x^2$, la dérivée est $x \mapsto 3x^2\, e^{x^3}$. Elle est positive, et ne s'annule qu'en 0 : la fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Une limite en 0

Le taux de la prédiction, $\dfrac{e^x - 1}{x}$, est le taux d'accroissement de $\exp$ entre 0 et x. Quand x tend vers 0, il tend vers le nombre dérivé en 0, soit $e^0 = 1$. Cette limite n'apparaît que dans 1 des 15 sujets consultés, à l'intérieur d'un calcul de nombre dérivé.

Propriété : Limite de (eˣ – 1)/x en 0

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Exemple : un exposant double

Cherchons $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^{2x} - 1}{x}$. On fait apparaître la forme de référence : pour tout réel $x \neq 0$,

$$\frac{e^{2x} - 1}{x} = 2 \times \frac{e^{2x} - 1}{2x}.$$

Quand x tend vers 0, $X = 2x$ tend vers 0, et $\dfrac{e^X - 1}{X}$ tend vers 1. La limite vaut donc 2.

La courbe et sa tangente

Devine : Au-dessus ou au-dessous

La tangente en 0 à la courbe de $x \mapsto e^x$ a pour équation $y = x + 1$. Où se trouve la courbe par rapport à cette tangente ?

A. Au-dessous, partout.

Faux.

En $x = 1$: $e \approx 2{,}72$ et $1 + 1 = 2$. La courbe est au-dessus en ce point.

B. Au-dessus d'un côté de 0, au-dessous de l'autre.

Faux.

En $x = -1$: $e^{-1} \approx 0{,}37$ et $-1 + 1 = 0$. La courbe est au-dessus de ce côté aussi.

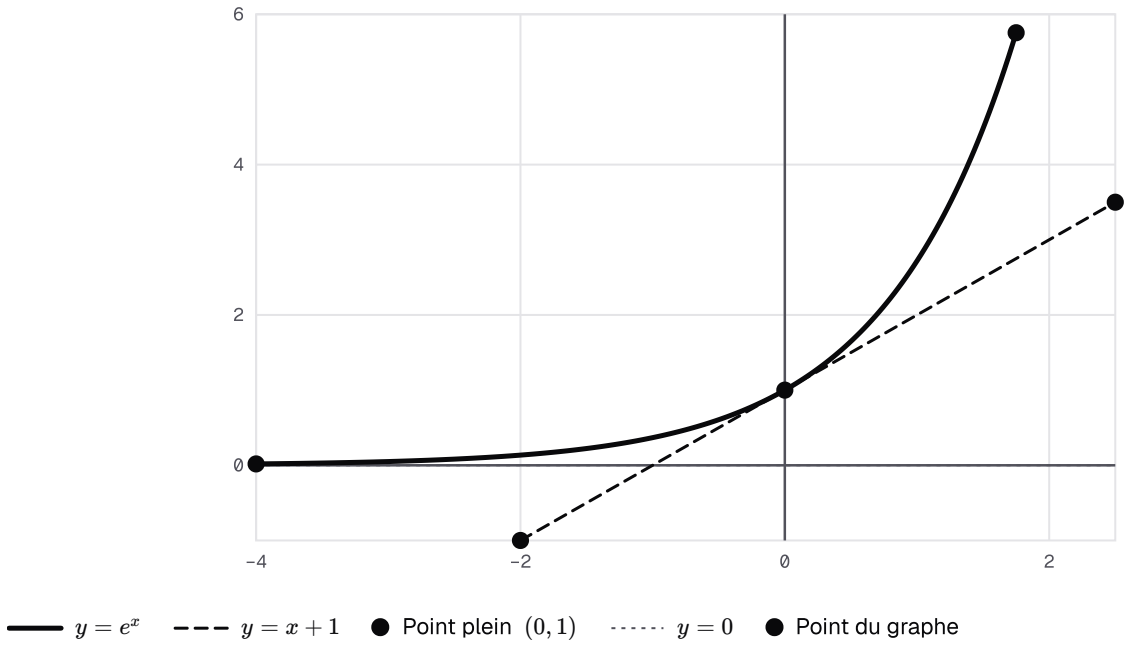
C. Au-dessus, partout.

Juste.

Les essais en -1 et en 1 le suggèrent ; on le démontre juste après.

Correction

La courbe est au-dessus de sa tangente sur tout $\mathbb{R}$, et ne la touche qu'au point $(0, 1)$. La démonstration suit, avec une fonction auxiliaire.



La courbe de x ↦ eˣ, la droite d'équation y = x + 1 et l'axe des abscisses.

Propriété : Courbe de l'exponentielle

Dans un repère orthonormé, la courbe de $x \mapsto e^x$:

- admet la droite d'équation $y = 0$ pour asymptote horizontale au voisinage de $-\infty$;
- admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$;
- a pour tangente au point d'abscisse 0 la droite d'équation $y = x + 1$;
- est la symétrique de la courbe de $\ln$ par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Exemple : la courbe reste au-dessus de sa tangente

On reprend l'expression de l'activité sur les limites : soit $d(x) = e^x - x - 1$ sur $\mathbb{R}$. Alors $d'(x) = e^x - 1$, positif pour $x > 0$, négatif pour $x < 0$. La fonction d admet donc un minimum en 0, et $d(0) = 0$.

Ainsi $d(x) \geq 0$, soit $e^x \geq x + 1$ pour tout réel x : la courbe est au-dessus de sa tangente en 0.

Étudier une fonction avec exponentielle

Le plan d'étude

Méthode : le plan d'étude

1. **Ensemble de définition** : $\mathbb{R}$, s'il n'y a ni logarithme ni dénominateur ; sinon, écris les conditions (argument du logarithme strictement positif, dénominateur non nul).
2. **Limites aux bornes**, chacune suivie de son interprétation : asymptote ou branche parabolique.
3. **Dérivée**, mise sous forme de produit, puis son signe.
4. **Tableau de variations**, complété par les limites.
5. Selon l'énoncé : position par rapport à une droite, point d'inflexion, équation $f(x) = k$.

On étudie $f(x) = x - 1 + e^{-x}$. Chaque étape ci-dessous correspond à une question de bac.

Vérifie : Première question : le domaine

Sur quel ensemble la fonction f est-elle définie ?

A. Sur $\mathbb{R}$ privé de 0, car $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$ est un quotient.

Faux.
Le dénominateur e^x ne s'annule jamais : aucune valeur n'est interdite.

B. Sur $]0, +\infty[$, car l'exponentielle est réciproque du logarithme.

Faux.
C'est $\ln$ qui est définie sur $]0, +\infty[$. La fonction $\exp$ est définie sur $\mathbb{R}$.

C. Sur $\mathbb{R}$, car il n'y a ni logarithme ni dénominateur qui s'annule.

Juste.
$x - 1$ et e^{-x} existent pour tout réel x.

Correction
$x - 1$ et e^{-x} sont définis pour tout réel x : f est définie sur $\mathbb{R}$.

Limite en plus l'infini

En $+\infty$: $x - 1$ tend vers $+\infty$ et e^{-x} tend vers 0. Donc $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

De plus, $f(x) - (x-1) = e^{-x}$, qui tend vers 0 en $+\infty$.

Vérifie : La bonne conclusion

D'après ces deux calculs, quelle phrase interprète le comportement de la courbe de f en $+\infty$?

A. La droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à la courbe au voisinage de $+\infty$.

Faux.

$f(x)$ tend vers $+\infty$, pas vers un nombre : pas d'asymptote horizontale.

B. La droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote oblique à la courbe au voisinage de $+\infty$.

Juste.

C'est exactement ce que dit $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (x-1)] = 0$.

C. La courbe admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

Faux.

Cette branche exige que $\dfrac{f(x)}{x}$ tende vers l'infini. Ici, $\dfrac{f(x)}{x}$ tend vers 1.

D. La droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique à la courbe au voisinage de $+\infty$.

Faux.

$f(x) - x = -1 + e^{-x}$ tend vers -1, pas vers 0.

Correction

D'après le calcul précédent :

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (x-1)] = 0.$$

Donc la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est asymptote oblique à la courbe de f au voisinage de $+\infty$.

Limite en moins l'infini

À toi : Une forme indéterminée à gauche

Calcule $\lim_{x \to -\infty} f(x)$, puis $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, et interprète.

Indice 1

En $-\infty$, $x - 1$ tend vers $-\infty$ et e^{-x} vers $+\infty$: c'est une forme $(-\infty) + (+\infty)$. Mets e^{-x} en facteur.

Indice 2

Pour tout réel x, $f(x) = e^{-x}\left(1 + (x-1)e^{x}\right)$. Cherche la limite de la parenthèse.

Indice 3

Pour le quotient, écris, pour $x < 0$, $\dfrac{f(x)}{x} = 1 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{e^{-x}}{x}$, et pose $X = -x$ dans le dernier terme.

Réponse

Limite. Pour tout réel x :

$$f(x) = e^{-x}\left(1 + (x-1)e^{x}\right).$$

Par croissance comparée, xe^{x} tend vers 0 en $-\infty$, et e^{x} aussi : la parenthèse tend vers 1. Comme e^{-x} tend vers $+\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

Quotient. Pour tout réel $x < 0$:

$$\frac{f(x)}{x} = 1 - \frac{1}{x} + \frac{e^{-x}}{x}.$$

Avec $X = -x$, on a $\dfrac{e^{-x}}{x} = -\dfrac{e^{X}}{X}$, et X tend vers $+\infty$: ce terme tend vers $-\infty$. Donc $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$.

Interprétation. La courbe de f admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $-\infty$.

Méthode : Coin examen : la limite, puis son sens

Dans les barèmes consultés, la limite et son interprétation sont souvent notées à part, par exemple $0{,}25 + 0{,}25$ point. Écris donc deux phrases distinctes :

> $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$. Donc la courbe admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $-\infty$.

Dérivée et variations

À toi : Le signe de la dérivée

On a $f'(x) = 1 - e^{-x}$. Sur quel intervalle a-t-on $f'(x) > 0$?

A. $]0, +\infty[$

Juste.
$e^{-x} < e^{0} \iff -x < 0 \iff x > 0$.

B. $]-\infty, 0[$

Faux.
Pour $x = -1$: $1 - e^{1} \approx -1{,}72 < 0$. Le signe moins de l'exposant trompe l'intuition.

C. Sur $\mathbb{R}$ tout entier, car une exponentielle est positive.

Faux.
$e^{-x} > 0$ ne dit rien du signe de $1 - e^{-x}$: il faut comparer e^{-x} à 1.

D. $]1, +\infty[$

Faux.
$f'(0{,}5) = 1 - e^{-0{,}5} \approx 0{,}39 > 0$: la frontière est avant 1, en 0.

Indice 1
Résous $1 - e^{-x} > 0$, c'est-à-dire $e^{-x} < 1 = e^0$.

Correction
Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\iff e^{-x} < 1 \\ &\iff e^{-x} < e^0 \\ &\iff -x < 0 \\ &\iff x > 0. \end{aligned}$$

Donc $f'(x) > 0$ sur $]0, +\infty[$, $f'(x) < 0$ sur $]-\infty, 0[$, et $f'(0) = 0$.

Variations de f(x) = x − 1 + e^(−x) : décroissante sur]−∞, 0], minimum 0 en 0, puis croissante.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

Le minimum de f est $f(0) = 0 - 1 + e^0 = 0$. Donc $f(x) \geq 0$ pour tout réel x, c'est-à-dire $e^{-x} \geq 1 - x$. Dans les barèmes consultés, le tableau de variations est parfois noté à part : dessine-le toujours.

Une fonction auxiliaire

Parfois, le signe de la dérivée ne se lit pas directement. On étudie alors une **fonction auxiliaire** : ses variations donnent son signe, qui donne celui de la dérivée. Cette démarche figure dans 4 des 15 sujets consultés.

À toi : passer par une fonction auxiliaire

On veut le sens de variation de $x \mapsto (x-2)e^x + x + 2$ sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée est $x \mapsto (x-1)e^x + 1$, dont le signe ne se lit pas directement. Étudie les variations de cette dérivée, déduis-en son signe, puis conclus.

Indice 1
Dérive $x \mapsto (x-1)e^x + 1$ avec la règle du produit, puis factorise par e^x.
Indice 2
La dérivée obtenue, xe^x, a le signe de x : où la fonction auxiliaire atteint-elle son minimum ?
Indice 3
Calcule ce minimum en 0 et compare-le à 0 : il donne le signe de la dérivée cherchée.

Réponse

Fonction auxiliaire. Notons φ la fonction étudiée ; l'auxiliaire est sa dérivée $x \mapsto (x-1)e^x + 1$. Pour tout réel x, la dérivée de l'auxiliaire vaut :

$$e^x + (x-1)e^x = x\,e^x.$$

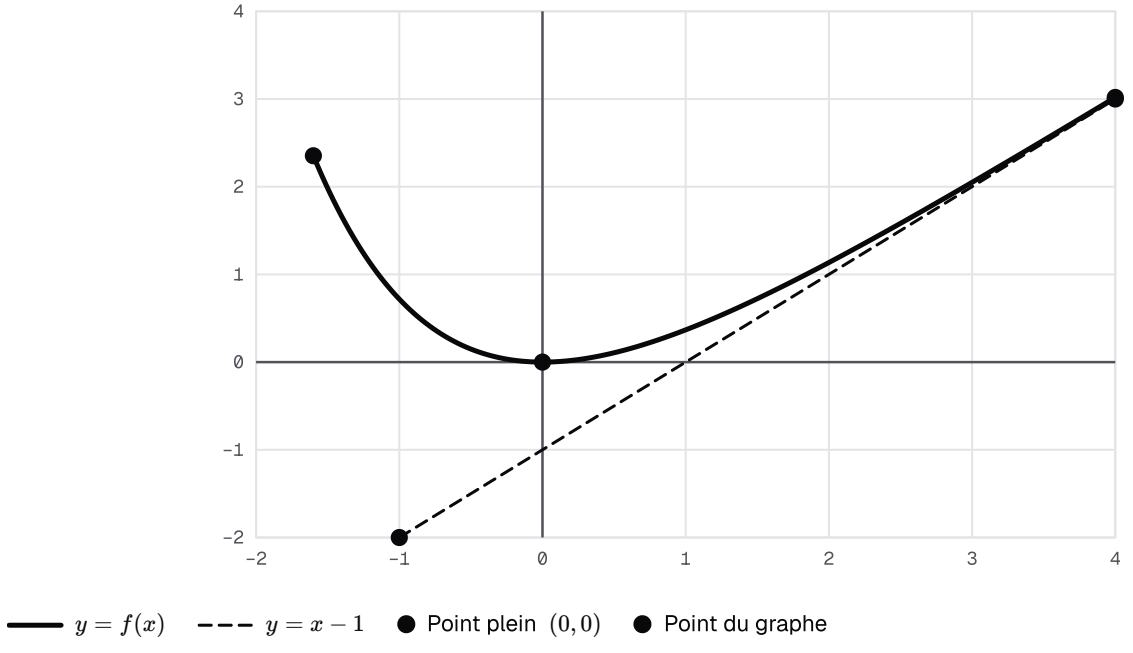
Elle a le signe de x, car $e^x > 0$: l'auxiliaire est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$ et strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Son minimum, atteint en 0, vaut $(0-1)e^0 + 1 = 0$.

Signe. Pour tout réel x, $(x-1)e^x + 1 \geq 0$, avec égalité seulement en $x = 0$.

Conclusion. La dérivée de φ est positive et ne s'annule qu'en 0 : φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Position par rapport à l'asymptote

Pour situer la courbe par rapport à $(D) : y = x - 1$, on étudie le **signe** de la différence : $f(x) - (x-1) = e^{-x}$. Or $e^{-x} > 0$ pour tout réel x. Donc la courbe de f est **au-dessus** de (D) sur $\mathbb{R}$.



La courbe de f(x) = x – 1 + e^(–x) reste au-dessus de la droite y = x – 1 et s'en rapproche quand x tend vers +∞. Son minimum est atteint au point (0, 0).

Attention : Position relative : un signe, intervalle par intervalle

La position se lit sur le signe de $f(x) - (ax + b)$, jamais sur une impression de la figure. Quand ce signe change, conclus séparément sur chaque intervalle : les barèmes consultés notent chaque intervalle à part.

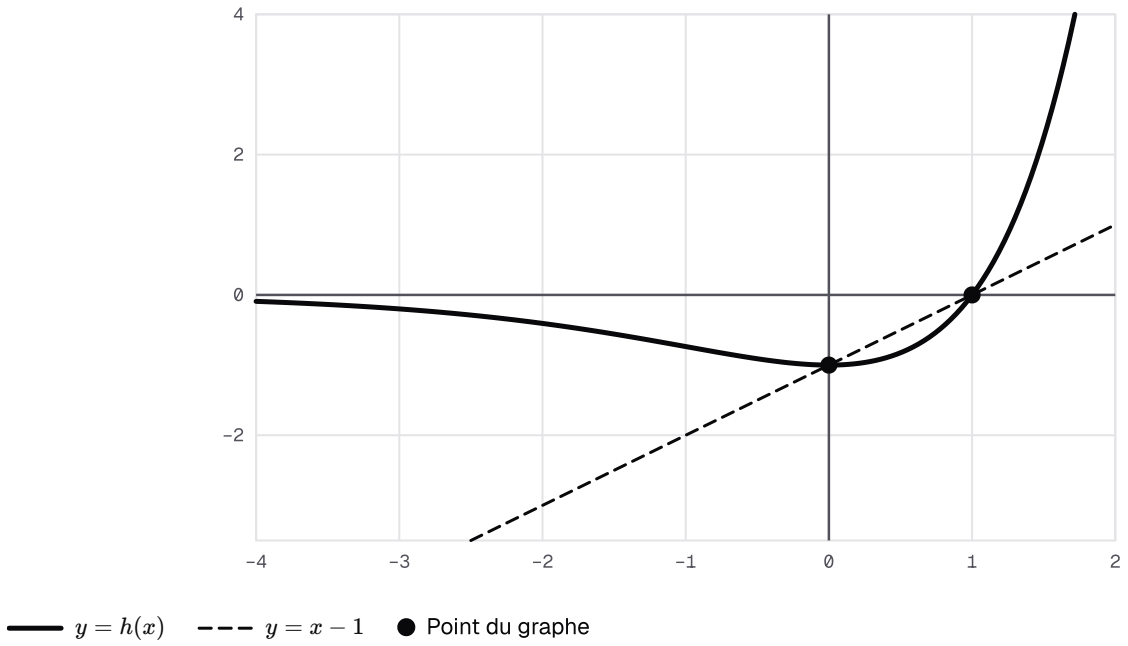
Exemple : quand le signe change

Avec $h(x) = (x-1)e^x$ et la droite d'équation $y = x - 1$, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} &h(x) - (x-1) \\ &= (x-1)e^x - (x-1) \\ &= (x-1)\left(e^x - 1\right). \end{aligned}$$

- Sur $]-\infty, 0[$, les deux facteurs sont négatifs : la courbe de h est au-dessus de la droite.
- Sur $]0, 1[$, ils sont de signes contraires : elle est au-dessous.
- Sur $]1, +\infty[$, ils sont positifs : elle est de nouveau au-dessus.

Elles se coupent aux points d'abscisses 0 et 1.



La courbe de h(x) = (x – 1)eˣ et la droite y = x – 1 se coupent aux abscisses 0 et 1 : au-dessus avant 0, au-dessous entre 0 et 1, de nouveau au-dessus après 1.

Point d'inflexion

Ici, $f''(x) = e^{-x} > 0$: la courbe de f n'a aucun point d'inflexion. Prenons plutôt $p(x) = x\,e^x$. On a $p'(x) = (x+1)e^x$ et $p''(x) = (x+2)e^x$.

Vérifie : Justifier une inflexion

Quelle rédaction justifie que la courbe de p a un point d'inflexion d'abscisse -2 ?

A. p'' s'annule en -2. Donc le point d'abscisse -2 est un point d'inflexion.
Faux.

S'annuler ne suffit pas : une dérivée seconde peut s'annuler sans changer de signe. Il faut les deux.

B. p'' s'annule en -2 en changeant de signe. Donc ce point est un point d'inflexion.

Juste.
Les deux conditions sont écrites : annulation et changement de signe.

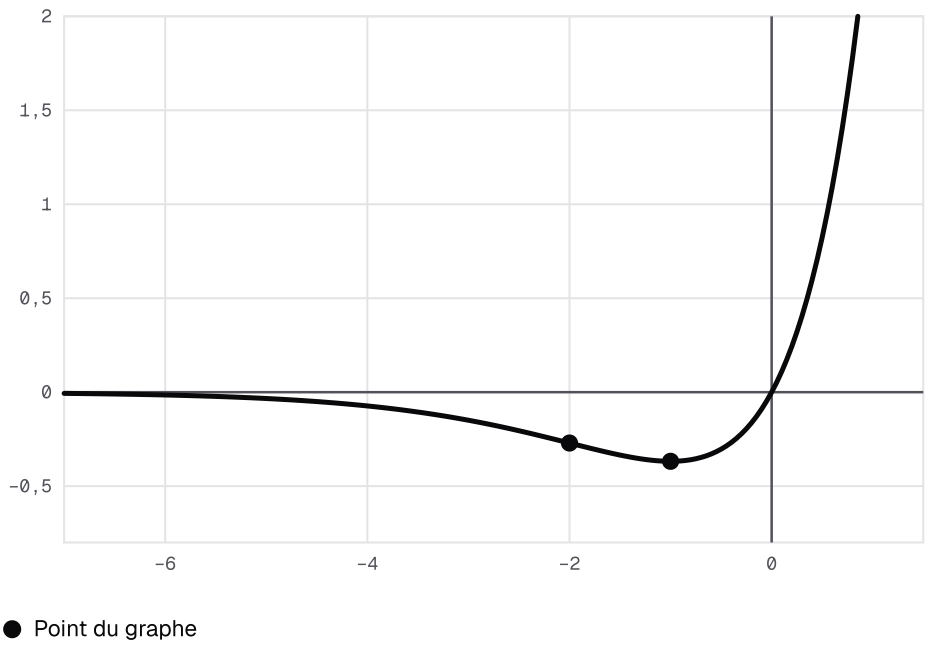
C. p' s'annule en -2 en changeant de signe. Donc ce point est un point d'inflexion.

Faux.
$p'(-2) = -e^{-2} \neq 0$; et un changement de signe de p' signale un extremum, pas une inflexion. C'est p'' qu'il faut étudier.

Correction
Comme $e^x > 0$, $p''(x)$ a le signe de $x + 2$: négatif sur $]-\infty, -2[$, positif sur $]-2, +\infty[$.

Ainsi p'' s'annule en -2 **et change de signe** : le point $\left(-2, -2e^{-2}\right)$ est un point d'inflexion de la courbe de p.

Un barème consulté exige mot pour mot cette double condition.



La courbe de p(x) = x eˣ : tournée vers le bas avant l'abscisse −2, vers le haut après, avec le point d'inflexion d'abscisse −2 marqué.

Exponentielle et logarithme dans une même fonction

Une fonction mixte

Dans 4 des 9 problèmes à exponentielle des 15 sujets consultés, la fonction mêle exponentielle et logarithme. Étudions $r(x) = \ln(1 + e^x)$.

Vérifie : Où la fonction est-elle définie ?

Sur quel ensemble la fonction r est-elle définie ?

A. Sur $]0, +\infty[$

Faux.

C'est l'ensemble de définition de $\ln x$. Ici, l'argument est $1 + e^x$, toujours strictement positif.

B. Sur $]-1, +\infty[$

Faux.

On n'impose pas $x > -1$: la condition porte sur $1 + e^x$, pas sur $1 + x$.

C. Sur $\mathbb{R}$

Juste.

$1 + e^x > 1 > 0$ pour tout x : le logarithme existe toujours.

Correction

Le logarithme exige un argument strictement positif. Or $1 + e^x > 1$ pour tout réel x. Donc r est définie sur $\mathbb{R}$.

Limites et asymptotes

En $-\infty$: e^x tend vers 0, donc $1 + e^x$ tend vers 1, et $r(x)$ tend vers $\ln 1 = 0$. La droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale au voisinage de $-\infty$.

À toi : Une asymptote oblique cachée

Montre que, pour tout réel x, $r(x) = x + \ln\left(1 + e^{-x}\right)$. Déduis-en la limite de r en $+\infty$ et une asymptote.

Indice 1

Dans le logarithme, mets e^x en facteur : $1 + e^x = e^x\left(e^{-x} + 1\right)$.

Indice 2

Utilise $\ln(ab) = \ln a + \ln b$, puis $\ln\left(e^x\right) = x$.

Indice 3

En $+\infty$, e^{-x} tend vers 0 : que devient $\ln\left(1 + e^{-x}\right)$?

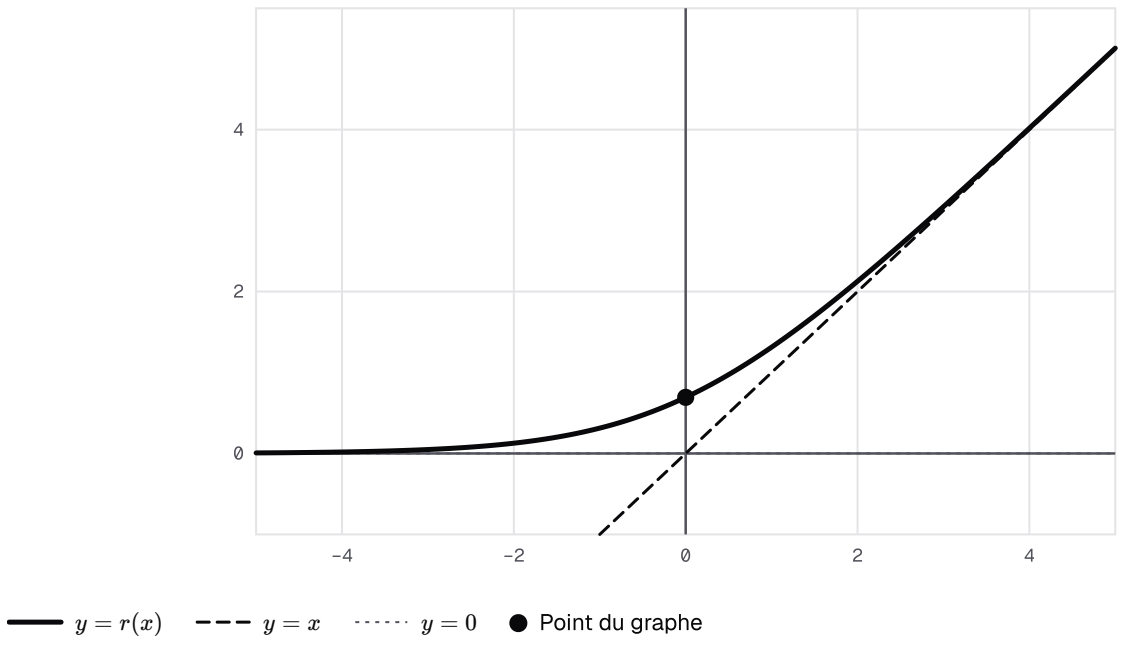
Réponse

Pour tout réel x, $e^x > 0$ et $1 + e^{-x} > 0$, donc :

$$\begin{aligned} & r(x) \\ & = \ln\left(e^x\left(1 + e^{-x}\right)\right) \\ & = \ln\left(e^x\right) + \ln\left(1 + e^{-x}\right) \\ & = x + \ln\left(1 + e^{-x}\right). \end{aligned}$$

En $+\infty$, $\ln\left(1 + e^{-x}\right)$ tend vers $\ln 1 = 0$. Donc $\lim_{x \to +\infty} r(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty}\left[r(x) - x\right] = 0$: la droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique au voisinage de $+\infty$.

> Comme $1 + e^{-x} > 1$, on a $\ln\left(1 + e^{-x}\right) > 0$: la courbe est au-dessus de cette droite.



La courbe de r(x) = ln(1 + eˣ) rejoint l'axe des abscisses vers −∞ et la droite y = x vers +∞, en restant au-dessus des deux.

Variations

Avec $\left(\ln\left(u(x)\right)\right)' = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ et $u : x \mapsto 1 + e^{x}$, pour tout réel x :

$$r'(x) = \frac{e^{x}}{1 + e^{x}} > 0.$$

La fonction r est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Variations de r(x) = ln(1 + eˣ) : strictement croissante sur $\mathbb{R}$, de la limite 0 en −∞ à la limite +∞ en +∞.

x	$-\infty$		$+\infty$
$r'(x)$		+	
$r(x)$	0	↗	$+\infty$

La fonction réciproque

La fonction r est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. D'après ses limites, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, +\infty[$. Elle admet donc une fonction réciproque r^{-1}, définie sur $]0, +\infty[$. Ce type de question figure dans 4 des 15 sujets consultés.

Rappel. Si $r(a) = b$ et si r est dérivable en a avec $r'(a) \neq 0$, alors r^{-1} est dérivable en b et $\left(r^{-1}\right)'(b) = \dfrac{1}{r'(a)}$.

À toi : Le nombre dérivé de la réciproque

Que vaut $\left(r^{-1}\right)'(\ln 2)$?

A. 2

Juste.
$r'(0) = \dfrac{1}{2}$, et son inverse vaut 2.

B. $\dfrac{1}{2}$

Faux.
C'est $r'(0)$. La réciproque a pour nombre dérivé l'**inverse** de ce nombre.

C. $\dfrac{1}{r'(\ln 2)}$

Faux.
On évalue r' en l'antécédent 0, pas en $\ln 2$: $r(0) = \ln 2$.

Indice 1

Trouve le réel a tel que $r(a) = \ln 2$.

Indice 2

Calcule $r'(a)$ avec $r'(x) = \dfrac{e^x}{1 + e^x}$.

Indice 3

Prends l'inverse de $r'(a)$.

Correction

$r(0) = \ln(1 + 1) = \ln 2$ et $r'(0) = \dfrac{e^0}{1 + e^0} = \dfrac{1}{2} \neq 0$. Donc r^{-1} est dérivable en $\ln 2$ et :

$$\left(r^{-1}\right)'(\ln 2) = \frac{1}{r'(0)} = 2.$$

Exemple : l'expression de la réciproque

Pour $y > 0$, résolvons $r(x) = y$:

$$\begin{aligned} &\ln\left(1 + e^x\right) = y \\ \iff\ &1 + e^x = e^y \\ \iff\ &e^x = e^y - 1. \end{aligned}$$

Comme $y > 0$, $e^y > 1$, donc $e^y - 1 > 0$, et $x = \ln\left(e^y - 1\right)$.

Ainsi $r^{-1}(y) = \ln\left(e^y - 1\right)$ pour tout $y > 0$.

Bonus : l'exponentielle de base a

Retour aux bactéries

Remarque : Bonus

Cette section est un **Bonus**. Un document non authentifié cite l'exponentielle de base a, mais elle n'apparaît dans aucun des 15 sujets consultés. Son maintien au chapitre reste à décider.

Devine : Une puissance de 3 avec e

On sait que $3 = e^{\ln 3}$. Comment écrire 3^2 à l'aide de l'exponentielle ?

A. $e^{\ln 6}$

Faux.
$e^{\ln 6} = 6 = 3 \times 2$: on a multiplié la base par l'exposant, au lieu d'élever au carré.

B. $e^{2\ln 3}$

Juste.
$3^2 = \left(e^{\ln 3}\right)^2 = e^{2\ln 3}$: l'exposant multiplie $\ln 3$.

C. $2\,e^{\ln 3}$

Faux.
$2\,e^{\ln 3} = 6$: le 2 est sorti de l'exposant. Or $3^2 = 9$.

D. $e^{(\ln 3)^2}$

Faux.
On a élevé $\ln 3$ au carré : $\left(e^{A}\right)^2 = e^{2A}$, et non e^{A^2}.

Correction
D'après les propriétés, $\left(e^{\ln 3}\right)^2 = e^{2\ln 3}$. Vérification : $e^{2\ln 3} = e^{\ln 9} = 9 = 3^2$.

Pour tout entier n, on obtient de même $3^n = e^{n\ln 3}$. Le membre de droite a un sens pour **tout** réel : on garde donc cette écriture pour définir 3^x, comme annoncé dans la section sur le nombre e.

Définition : Exponentielle de base a

Soit a un réel strictement positif. Pour tout réel x, on pose

$$a^x = e^{x\ln a}.$$

Lorsque $a \neq 1$, la fonction $x \mapsto a^x$ est la **fonction exponentielle de base** a. Pour $a = e$, on retrouve e^x, car $\ln e = 1$.

Exemple : la demi-heure

$$\begin{aligned} 3^{0,5} &= e^{0,5\ln 3} \\ &= \left(e^{\ln 3}\right)^{0,5} \\ &= \sqrt{3} \approx 1{,}73. \end{aligned}$$

On retrouve le résultat de la prédiction. De même, pour tout réel x :

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x} = e^{x\ln\left(\frac{1}{2}\right)} = e^{-x\ln 2}.$$

Les mêmes règles

Propriété : Propriétés algébriques de a^x

Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$, et tous réels x et y :

$$a^{x+y} = a^x a^y, \qquad a^{-x} = \frac{1}{a^x}, \qquad (a^x)^y = a^{xy}, \qquad (ab)^x = a^x b^x, \qquad \ln(a^x) = x\ln a.$$

Vérifie : Un produit de puissances

Que vaut $3^{0,5} \times 3^{1,5}$?

A. $3^{0,75}$

Faux.
On a multiplié les exposants : $0{,}5 \times 1{,}5 = 0{,}75$. Pour un produit de puissances de même base, on **ajoute** les exposants.

B. 6

Faux.
$3^2 = 9$, et non 3×2.

C. 9^2

Faux.
On a multiplié les bases et ajouté les exposants : une seule de ces deux opérations se fait.

D. 9

Juste.
$3^{0,5+1,5} = 3^2 = 9$.

Correction
D'après les propriétés, $3^{0,5} \times 3^{1,5} = 3^{0,5+1,5} = 3^2 = 9$. Vérification : $\sqrt{3} \times 3\sqrt{3} = 9$.

Dérivée et sens de variation

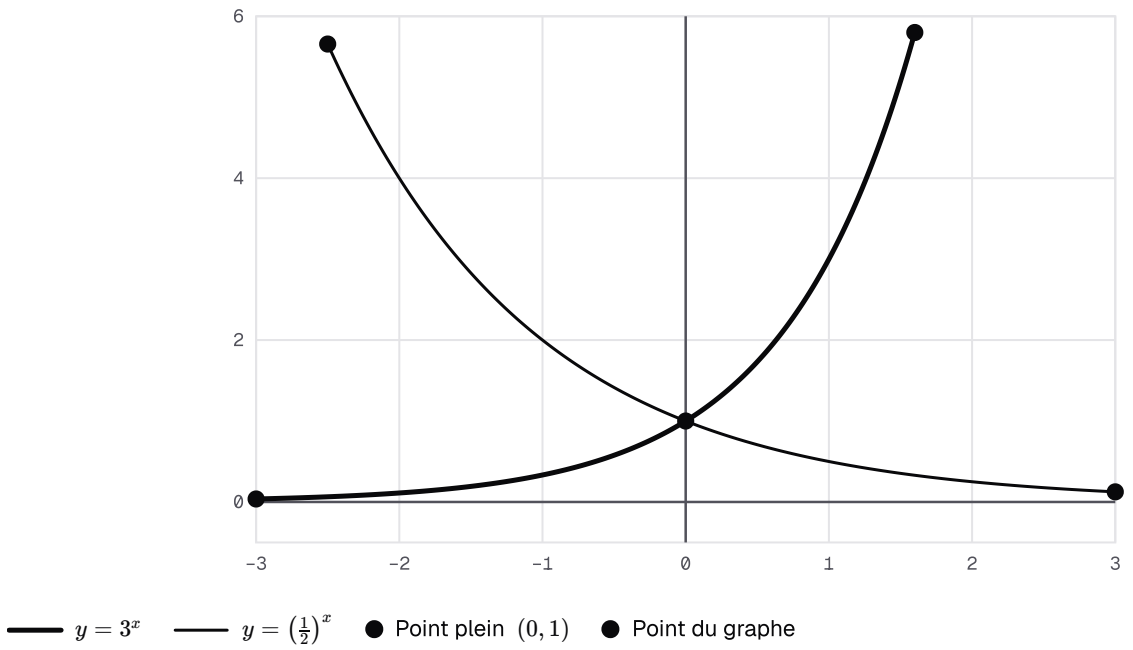
Comme $a^x = e^{x\ln a}$, on dérive avec $u : x \mapsto x\ln a$, de dérivée $\ln a$. Le signe de $\ln a$ décide de tout.

Propriété : Dérivée et variations de x ↦ a^x

Soit a un réel strictement positif et différent de 1. La fonction $x \mapsto a^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x :

$$(a^x)' = (\ln a)\, a^x.$$

Elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ si $a > 1$, et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ si $0 < a < 1$.



Les courbes de x ↦ 3^x et de x ↦ (1/2)^x.

Vérifie : Le sens de variation

La fonction $x \mapsto 0{,}7^x$ est-elle croissante ou décroissante sur $\mathbb{R}$, et pourquoi ?

A. Croissante, comme toute exponentielle de base positive.

Faux.

C'est vrai pour e^x, pas pour toute base : si $0 < a < 1$, la fonction décroît.

B. Décroissante, car ses valeurs sont toutes négatives.

Faux.

$a^x = e^{x \ln a} > 0$: ses valeurs sont toujours strictement positives. La raison est le signe de $\ln a$.

C. Décroissante, car $\ln(0{,}7)$ est strictement négatif.

Juste.

La dérivée est $\ln(0{,}7)$ fois un nombre strictement positif : elle est négative.

Correction

> Comme $0 < 0{,}7 < 1$, $\ln(0{,}7) < 0$. Sa dérivée $x \mapsto \ln(0{,}7) \times 0{,}7^x$ est donc strictement négative : la fonction est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Au bac : une partie de problème rédigée

L'énoncé

Dans 9 des 15 sujets consultés, l'exponentielle est dans la fonction du problème d'étude de fonction. Voici une partie de ce type, construite par BURHAN avec la fonction h de la section sur la dérivée. Les points cités viennent des barèmes consultés.

On considère $h(x) = (x-1)e^x$ sur $\mathbb{R}$, et (C) sa courbe dans un repère orthonormé.

1. Calculer $\lim_{x \to -\infty} h(x)$ et interpréter.
2. Calculer $\lim_{x \to +\infty} h(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{h(x)}{x}$, puis interpréter.
3. Dresser le tableau de variations de h.
4. Montrer que (C) admet un point d'inflexion.
5. Montrer que l'équation $h(x) = 1$ admet une unique solution α dans $[0, +\infty[$, puis que $1{,}2 < \alpha < 1{,}3$.

Questions 1 et 2

Méthode : Question 1 : limite en moins l'infini

> Pour tout réel x, $h(x) = xe^x - e^x$. Par croissance comparée, $\lim_{x \to -\infty} xe^x = 0$, et $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$. Donc $\lim_{x \to -\infty} h(x) = 0$. **Interprétation** : la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à (C) au voisinage de $-\infty$.

L'asymptote horizontale figure dans 4 des 15 sujets consultés, notée $0{,}25 + 0{,}25$ point dans les barèmes.

Vérifie : Question 2 : quelle interprétation ?

On trouve $\lim_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{h(x)}{x} = +\infty$. Quelle interprétation écrire ?

A. (C) admet une asymptote verticale au voisinage de $+\infty$.
Faux.
Une asymptote verticale correspond à une limite infinie en un **réel** a, pas en $+\infty$.

B. (C) admet une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$.
Faux.
Une asymptote oblique exige que $\dfrac{h(x)}{x}$ tende vers un **réel** non nul. Ici, il tend vers $+\infty$.

C. (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$.

Faux.

Cette direction correspond à un quotient $\dfrac{h(x)}{x}$ qui tend vers 0. Ici, il tend vers $+\infty$.

D. (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

Juste.

Une limite infinie, puis un quotient $\dfrac{h(x)}{x}$ de limite infinie : c'est la définition de cette branche.

Correction

Les deux facteurs de $h(x) = (x-1)e^x$ tendent vers $+\infty$, donc $\lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$.

Pour tout réel $x \neq 0$, $\dfrac{h(x)}{x} = \left(1 - \dfrac{1}{x}\right) e^x$, qui tend vers $+\infty$. Donc (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

Cette interprétation figure dans 5 des 15 sujets consultés, pour $0{,}25$ à $0{,}5$ point.

Questions 3 et 4

Méthode : Question 3 : dérivée, signe, tableau

> h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(x) = e^x + (x-1)e^x = x\,e^x$. Comme $e^x > 0$, $h'(x)$ a le signe de x : h est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$ et strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

Le signe de la dérivée et le tableau figurent dans 8 des 15 sujets consultés, pour $0{,}25$ à $0{,}75$ point. La monotonie y est parfois notée intervalle par intervalle.

Variations de h(x) = (x − 1)eˣ : limite 0 en −∞, minimum −1 en 0, limite +∞ en +∞.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		−	0	+	
$h(x)$	0	↘	-1	↗	$+\infty$

À toi : la question de l'inflexion

Calcule $h''(x)$ et montre que (C) admet un point d'inflexion. Rédige comme sur ta copie.

Indice 1

Dérive $h'(x) = x\,e^x$ comme un produit.

Indice 2

$h''(x) = (x+1)e^x$: étudie son signe.

Indice 3

Écris les **deux** conditions : h'' s'annule, et change de signe.

Réponse

Pour tout réel x, $h''(x) = e^x + x\,e^x = (x+1)e^x$. Comme $e^x > 0$, $h''(x)$ a le signe de $x+1$: négatif sur $]-\infty, -1[$, positif sur $]-1, +\infty[$.

> h'' s'annule en -1 et change de signe. Donc le point $\left(-1, -2e^{-1}\right)$ est un point d'inflexion de (C).

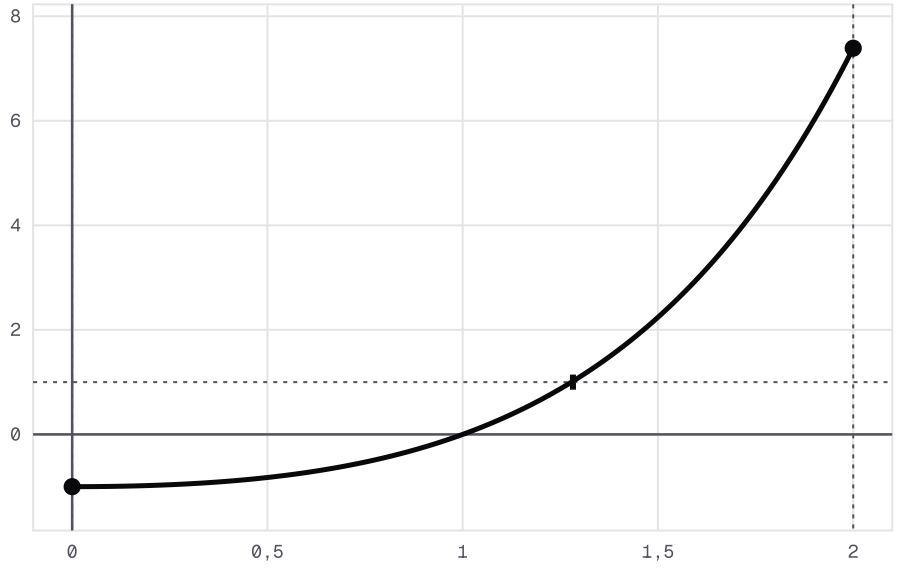
En effet, $h(-1) = (-1-1)e^{-1} = -2e^{-1}$. Cette question figure dans 4 des 15 sujets consultés, pour $0{,}5$ à $0{,}75$ point.

Question 5

Méthode : Question 5 : théorème des valeurs intermédiaires

> h est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$. De plus, $h(0) = -1$ et $\lim_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$. Donc h réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[-1, +\infty[$, qui contient 1. Donc l'équation $h(x) = 1$ admet une unique solution α dans $[0, +\infty[$.

Un barème consulté (2016 N) note à part la continuité et la stricte monotonie, puis chaque signe. Cette question figure dans 4 des 15 sujets consultés.



Courbe de f — Droite y = 1, et verticales x = a, x = b — Intervalle contenant une solution, sur la droite y = k

Sur [0, 2], la fonction h passe de h(0) = –1 à h(2) = e² ≈ 7,39 : sa courbe coupe une seule fois la droite y = 1.

a = 0, b = 2, k = 1.

f(a) ≈ –1 et f(b) ≈ 7,38906.

Solutions de f(x) = k détectées, liste non exhaustive : x ∈ [1,2784645427 ; 1,2784645428].

À toi : Encadrer la solution

La calculatrice donne $h(1{,}2) \approx 0{,}66$ et $h(1{,}3) \approx 1{,}10$. Quelle conclusion est correcte ?

A. $h(1{,}2)$ et $h(1{,}3)$ sont de même signe : α n'est pas entre $1{,}2$ et $1{,}3$.

Faux.

On ne compare pas à 0 : l'équation est $h(x) = 1$. Il faut savoir si 1 est entre les deux valeurs.

B. $h(1{,}2) < 1 < h(1{,}3)$, donc $1{,}2 < \alpha < 1{,}3$.

Juste.

On compare à 1, la valeur visée, et l'on utilise la stricte croissance de h.

C. $\alpha \approx 1{,}3$, car $h(1{,}3)$ est plus proche de 1.

Faux.

Être plus proche de 1 ne fournit pas un encadrement : le théorème donne seulement $1{,}2 < \alpha < 1{,}3$.

Correction

h est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ et $h(1{,}2) < 1 < h(1{,}3)$, soit $h(1{,}2) < h(\alpha) < h(1{,}3)$. Donc $1{,}2 < \alpha < 1{,}3$.

À retenir : Le mot du prof

Limite puis interprétation, dérivée puis signe, tableau, inflexion, valeurs intermédiaires : tu sais rédiger chacune de ces questions. Au bac, la fonction changera. L'ordre des phrases, lui, restera le même.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Fonctions exponentielles » (2bac · sciences-experimentales · mathematiques)