BURHAN

# Examen national du baccalauréat, session normale 2025

2ème Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-experimentales/mathematiques/examens/2025-session-normale

| Année | Session | Type | Durée | Coefficient | Barème |
|---|---|---|---|---|---|
| 2025 | Session normale | Examen national | 3h | 7 | 20 pts (barème officiel) |

**INSTRUCTIONS GENERALES**

- L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;
- Le candidat peut traiter les exercices et le problème suivant l'ordre qui lui convient ;
- L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter.

**COMPOSANTES DU SUJET**

L'épreuve est composée de trois exercices et un problème, indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

| | | |
|---|---|---|
| Exercice 1 | Géométrie dans l'espace | 3 points |
| Exercice 2 | Nombres complexes | 3.5 points |
| Exercice 3 | Calcul des probabilités | 2.5 points |
| Problème | Etude de fonctions numériques, suites numériques et calcul intégral | 11 points |

- On désigne par $\overline{z}$ le conjugué du nombre complexe $z$ et par $|z|$ son module.
- $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.
- $e$ est le nombre réel tel que $\ln(e) = 1$.

## Exercice 1 — 3 pts

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère les points $A(0,0,2)$, $B(2,0,0)$ et la sphère $(S)$ de centre $O$ et de rayon $R=2$

**1) a)** — 0,25 pts

Déterminer l'équation cartésienne de la sphère $(S)$

**1) b)** — 0,5 pts

Vérifier que les points $A$ et $B$ appartiennent à la sphère $(S)$

**2) a)** — 0,25 pts

2. Soit $I$ le milieu du segment $[AB]$.

Déterminer l'intersection du plan $(OAB)$ avec la sphère $(S)$

**2) b)** — 0,5 pts

Vérifier que $\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{AB}=0$ puis montrer que $d\left(O,(AB)\right)=\sqrt{2}$

**3) a)** — 0,5 pts

3. On considère un point $M(0,m,0)$ de l'espace, où $m\in\mathbb{R}$

Vérifier que $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AM}=2m\vec{i}+4\vec{j}+2m\vec{k}$

**3) b)** — 0,25 pts

Déduire que $mx+2y+mz-2m=0$ est une équation cartésienne du plan $(ABM)$

**3) c)** — 0,25 pts

Montrer que $d\left(O,(ABM)\right)=\dfrac{2|m|}{\sqrt{4+2m^2}}$

**4)** — 0,5 pts

Le plan $(ABM)$ coupe la sphère $(S)$ suivant un cercle $(\Gamma_m)$ de rayon $r$

Montrer que $r=\sqrt{2+\dfrac{4}{2+m^2}}$ et déduire que $\sqrt{2}<r\leq 2$ , pour tout $m\in\mathbb{R}$

## Exercice 2 — 3,5 pts

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points $A$ , $B$ , $C$, $D$ et $\Omega$ d'affixes respectives $a = 1 + 2i$ , $b = \overline{a}$ , $c = \dfrac{3(3+i)}{2}$, $d = \dfrac{3(1+i)}{2}$ et $\omega = \dfrac{5}{2}$

### 1) a) — 0,5 pts

Vérifier que $a + b = 2$ et déduire que l'affixe du point $P$, milieu du segment $[AB]$ est $p = 1$

### 1) b) — 0,5 pts

Montrer que $a$ et $b$ sont les solutions de l'équation : $z^2 - 2z + 5 = 0$ dans l'ensemble $\mathbb{C}$

### 2) a) — 0,5 pts

Vérifier que $|\omega - a| = |\omega - b| = |\omega - c|$

### 2) b) — 0,25 pts

Déduire que $\Omega$ est le centre du cercle circonscrit au triangle $ABC$

### 3) a) — 0,25 pts

Vérifier que $\dfrac{d-c}{a-b} = \dfrac{3}{4}i$

### 3) b) — 0,5 pts

Montrer que $d - b = (c - a)e^{i\frac{\pi}{2}}$ puis déduire que les droites $(DB)$ et $(AC)$ sont perpendiculaires

### 4) a) — 0,25 pts

4. Soit $h$ l'homothétie de centre $C$ et de rapport $\dfrac{2}{3}$ et qui transforme chaque point $M$ du plan d'affixe $z$ en un point $M'$ d'affixe $z'$ . On pose $h(P) = G$

Vérifier que $z' = \dfrac{2}{3}z + \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}i$

### 4) b) — 0,25 pts

Montrer que l'affixe du point $G$ est $g = \dfrac{13}{6} + \dfrac{1}{2}i$

### 5) — 0,5 pts

Montrer que les points $\Omega$ , $G$ et $D$ sont alignés.

## Exercice 3 2,5 pts

Une urne contient six boules indiscernables au toucher :

Quatre boules blanches numérotées : $0$ ; $1$ ; $1$ ; $1$ et deux boules noires numérotées : $0$ ; $1$

On tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne.

On considère les évènements suivants :

$A$ « Les deux boules tirées portent le numéro 1 »

$B$ « Les deux boules tirées sont de même couleur »

### 1) a) 0,5 pts

Montrer que $p(A) = \frac{2}{5}$

### 1) b) 0,5 pts

Montrer que $p(B) = \frac{7}{15}$

### 1) c) 0,5 pts

Les évènements $A$ et $B$ sont – ils indépendants ? justifier.

### 2) a) 0,75 pts

2. On répète l'expérience précédente trois fois successives. On considère la variable aléatoire $X$ indiquant le nombre de fois que l'on réalise l'événement $A$ .

Recopier et compléter le tableau ci-dessous, représentant la loi de probabilités de $X$

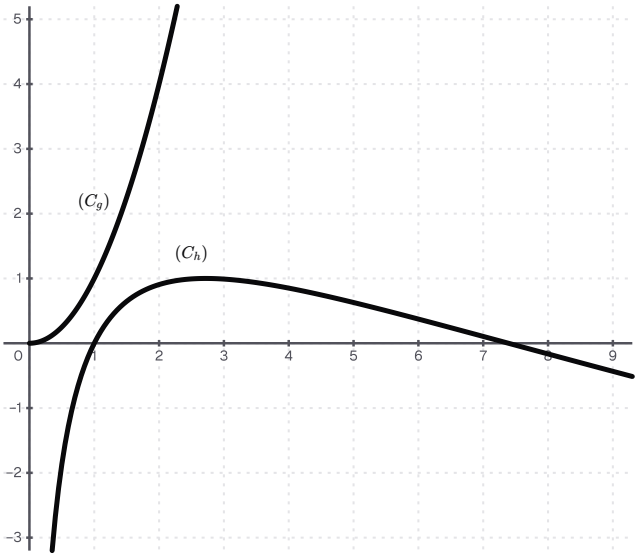
| $X = x_i$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|
| $p(X = x_i)$ | $\frac{27}{125}$ | | | |

### 2) b) 0,25 pts

Calculer l'espérance $E(X)$ de la variable aléatoire $X$

## Problème 11 pts

**Partie I :** Le graphique ci-contre représente les courbes $(\mathscr{C}_g)$ et $(\mathscr{C}_h)$ des fonctions : $g : x \mapsto x^2$ et $h : x \mapsto 2\ln x - (\ln x)^2$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$ dans un même repère orthonormé.




**Les courbes (C_g) et (C_h) des fonctions g et h sur ]0,+∞[, dans un repère orthonormé.**

### 1) a) 0,25 pts

Justifier graphiquement que pour tout $x$ de $]0, +\infty[$ :

$$g(x) - h(x) > 0$$

### 1) b) 0,5 pts

Déduire que pour tout $x$ de $]0, +\infty[$ : $\dfrac{2\ln x - (\ln x)^2}{x^2} < 1$

### 2) a) 0,5 pts

Vérifier que la fonction $H : x \mapsto x\ln x - x$ est une primitive de la fonction $x \mapsto \ln x$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$, puis déduire que $\displaystyle\int_1^{e^2} \ln(x)\,dx = 1 + e^2$

### 2) b) 0,5 pts

En utilisant une intégration par parties, montrer que $\displaystyle\int_1^{e^2} (\ln x)^2\,dx = 2e^2 - 2$

### 2) c) 0,5 pts

Résoudre sur l'intervalle $]0, +\infty[$, l'équation $h(x) = 0$ et déduire les deux points d'intersection de la courbe $(\mathscr{C}_h)$ avec l'axe des abscisses.

**2) d)** 0,5 pts

Déduire, en unité d'aire, l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe $(\mathscr{C}_h)$, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e^2$.

**1) a)** 0,5 pts

**Partie II :**

On considère la fonction numérique $f$ définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x - \dfrac{(\ln x)^2}{x}$

Soit $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

Vérifier que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$ et donner une interprétation géométrique de ce résultat.

**1) b)** 0,5 pts

Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\ln x)^2}{x} = 0$ (On peut poser $t = \sqrt{x}$ ), puis calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

**1) c)** 0,5 pts

Déduire que la droite d'équation $y = x$ est une asymptote oblique de $(\mathscr{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$

**2) a)** 0,75 pts

Montrer que pour tout $x$ de $]0, +\infty[$ , $f'(x) = 1 - \dfrac{2\ln x - (\ln x)^2}{x^2}$

**2) b)** 0,5 pts

Montrer que la fonction $f$ est strictement croissante sur l'intervalle $]0, +\infty[$

(On peut utiliser la question Partie I-1-b)

**3) a)** 0,5 pts

Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha$ dans l'intervalle $]0, +\infty[$ .

**3) b)** 0,75 pts

Vérifier que $e^{-1} < \alpha < 1$ et montrer que $\ln \alpha = -\alpha$ .

**3) c)** 0,25 pts

Montrer que $f(x) \leq x$ , pour tout $x \in ]0, +\infty[$

**3) d)** 0,5 pts

Montrer que $y = x$ est l'équation de la tangente $(T)$ à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ au point d'abscisse $1$

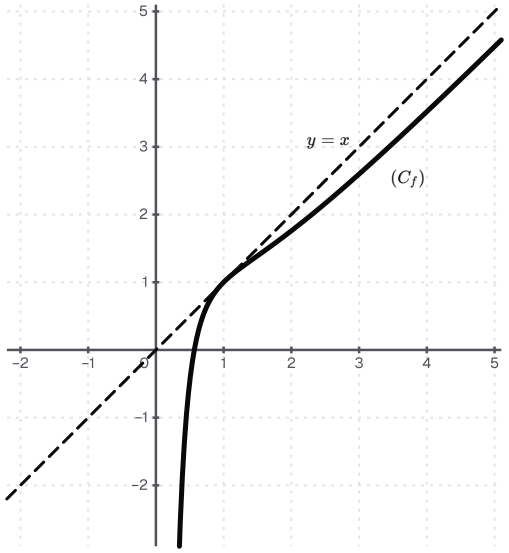
**4) a)** 0,5 pts

4. Le graphique ci-contre représente la courbe $(\mathscr{C}_f)$ dans le repère orthonormé $\left(O,\vec{i};\vec{j}\right)$.

Soit $\varphi$ la restriction de $f$ sur l'intervalle $]0,1]$

Montrer que $\varphi$ admet une fonction réciproque $\varphi^{-1}$ définie sur un intervalle $J$ que l'on déterminera.

(Il n'est pas demandé de déterminer l'expression $\varphi^{-1}(x)$)




**La courbe (C_f) et la droite d'équation y = x, dans le repère orthonormé (O, i, j).**

**4) b)** 0,5 pts

Montrer que $\varphi^{-1}$ est dérivable en $0$ et que

$$\left(\varphi^{-1}\right)'(0) = \frac{\alpha}{2+2\alpha}$$

**4) c)** 0,75 pts

Recopier la courbe de $\varphi$ et construire la courbe de $\varphi^{-1}$ dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

**1)** 0,5 pts

**Partie III :**

Soit $(u_n)$ la suite numérique définie par $u_0 = e$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ , pour tout $n$ de $\mathbb{N}$

Montrer par récurrence que $1 < u_n$, pour tout $n$ de $\mathbb{N}$

**2) a)** 0,5 pts

Montrer que la suite $(u_n)$ est décroissante. (On peut utiliser la question Partie II-3-c)

**2) b)** 0,25 pts

En déduire que la suite $(u_n)$ est convergente.

**2) c)** 0,5 pts

Déterminer la limite de la suite $(u_n)$ .

SOURCES

Centre national de l'évaluation et des examens · Examen national du baccalauréat, mathématiques, sciences expérimentales, option française · 2025