BURHAN

# Examen national du baccalauréat, session de rattrapage 2024

2ème Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-experimentales/mathematiques/examens/2024-session-rattrapage

| Année | Session | Type | Durée | Coefficient | Barème |
|---|---|---|---|---|---|
| 2024 | Session de rattrapage | Examen national | 3h | 7 | 20 pts (barème officiel) |

**INSTRUCTIONS GENERALES**

- L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;
- Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
- L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter.

**COMPOSANTES DU SUJET**

L'épreuve est composée de trois exercices et un problème, indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

| | | |
|---|---|---|
| Exercice 1 | Géométrie dans l'espace | 3 points |
| Exercice 2 | Nombres complexes | 4 points |
| Exercice 3 | Calcul des probabilités | 2 points |
| Problème | Etude de fonctions numériques, calcul intégral et suites numériques | 11 points |

- On désigne par $\overline{z}$ le conjugué du nombre complexe $z$ et par $|z|$ son module
- ln désigne la fonction logarithme népérien

## Exercice 1 — 3 pts

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les deux points $A(1,1,0)$ et $\Omega(-1,1,-2)$ et le plan $(P)$ d'équation $x+z-1=0$

### 1) a) — 0,5 pts

Vérifier que $A$ est un point du plan $(P)$ et donner un vecteur normal de $(P)$.

### 1) b) — 0,5 pts

Montrer que la droite $(\Omega A)$ est perpendiculaire au plan $(P)$.

### 2) a) — 0,5 pts

2. Soit $(S)$ l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace vérifiant : $x^2+y^2+z^2+2x-2y+4z-3=0$

Montrer que $(S)$ est une sphère de centre $\Omega$ et déterminer son rayon.

### 2) b) — 0,5 pts

Montrer que $(P)$ coupe $(S)$ suivant un cercle de centre $A$ puis déterminer son rayon.

### 3) a) — 0,25 pts

3. Soit $(Q_m)$ un plan d'équation $x+y+mz-2=0$, où $m$ est un nombre réel.

Vérifier que $A$ est un point du plan $(Q_m)$, pour tout $m$ de $\mathbb{R}$

### 3) b) — 0,5 pts

Déterminer la valeur du réel $m$ pour que $(Q_m)$ soit perpendiculaire au plan $(P)$

### 3) c) — 0,25 pts

Existe-t-il un plan $(Q_m)$ qui coupe la sphère $(S)$ suivant un cercle de centre $A$ ? Justifier.

## Exercice 2 — 4 pts

**I)** On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : z^2 - 4z + 9 = 0$

**I) 1)** — 0,25 pts

Vérifier que le discriminant de l'équation $(E)$ est $\Delta = \left(2i\sqrt{5}\right)^2$

**I) 2)** — 0,5 pts

Résoudre l'équation $(E)$

**II) 1) a)** — 0,25 pts

**II)** Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points $A$, $B$ et $C$ d'affixes respectives $a = 2 + i\sqrt{5}$, $b = 2 - i\sqrt{5}$ et $c = 2 - \sqrt{5}$.

Vérifier que $|a| = 3$

**II) 1) b)** — 0,25 pts

Montrer que le triangle $OAB$ est isocèle.

**II) 2) a)** — 0,5 pts

Vérifier que $\dfrac{a-c}{b-c} = i$

**II) 2) b)** — 0,5 pts

Déduire la nature du triangle $ABC$

**II) 3) a)** — 0,5 pts

Déterminer l'affixe du point $D$ image de $B$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{CA}$

**II) 3) b)** — 0,5 pts

Montrer que $ADBC$ est un carré.

**II) 4) a)** — 0,25 pts

4. On pose $x_n = \left(\dfrac{a}{3}\right)^n$ et $y_n = \dfrac{1}{1 - x_n}$, avec $n$ un entier naturel non nul.

Vérifier que $x_n\overline{x_n} = 1$

**II) 4) b)** — 0,5 pts

Montrer que $y_n + \overline{y_n} = 1$ puis déduire la partie réelle de $y_n$

## Exercice 3 2 pts

Une urne contient huit boules : quatre boules blanches, trois boules noires et une boule verte. Toutes les boules sont indiscernables au toucher. On tire au hasard successivement et sans remise trois boules de l'urne.

**1)** 0,25 pts

Vérifier que le nombre de tirages possibles est égal à $336$

**2)** 0,5 pts

Calculer la probabilité de l'évènement $A$ : « Tirer trois boules blanches ».

**3)** 0,75 pts

Montrer que la probabilité de l'évènement $B$ : «Tirer trois boules de même couleur » est $p(B) = \frac{5}{56}$

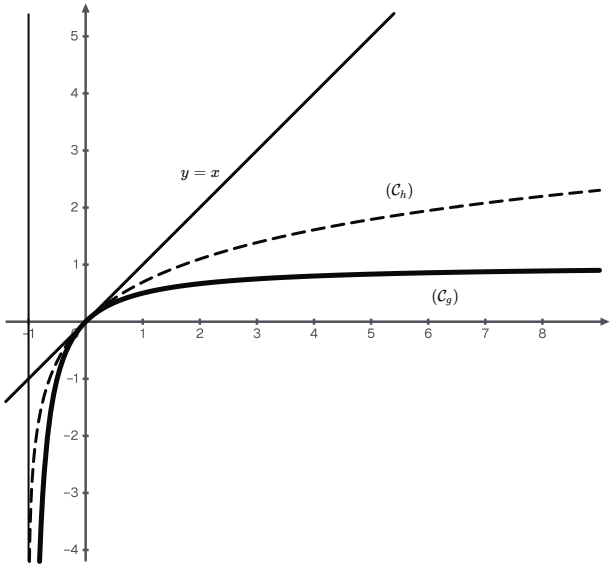
**4)** 0,5 pts

Calculer la probabilité de l'évènement $C$ : « Obtenir au moins deux couleurs différentes ».

## Problème 11 pts

### Partie I :

La figure ci-contre représente les courbes $(\mathcal{C}_g)$ et $(\mathcal{C}_h)$ des fonctions $g : x \mapsto \dfrac{x}{1+x}$ et $h : x \mapsto \ln(1+x)$ sur l'intervalle $]-1, +\infty[$ et la droite d'équation $y = x$, dans un même repère orthonormé.




**Les courbes (C_g) et (C_h) et la droite d'équation y = x, dans un même repère orthonormé.**

**I) 1) a)** 0,5 pts

A partir de cette figure, justifier que : $\dfrac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$, pour tout $x$ de $]-1, +\infty[$

**I) 1) b)** 0,25 pts

En déduire que $(1+x)\ln(1+x) - x \geq 0$, pour tout $x$ de $]-1, +\infty[$

**I) 1) c)** 0,5 pts

Prouver que $e^x - (1+e^x)\ln(1+e^x) \leq 0$, pour tout $x$ de $\mathbb{R}$

**I) 2) a)** 0,5 pts

2. Soit $(u_n)$ la suite numérique définie par $u_0 = 1$ et la relation $u_{n+1} = g(u_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

Montrer par récurrence que $0 < u_n \leq 1$, pour tout $n$ de $\mathbb{N}$

**I) 2) b)** 0,5 pts

Montrer que la suite $(u_n)$ est décroissante. (On peut utiliser la question 1) a))

**I) 2) c)** 0,25 pts

En déduire que la suite $(u_n)$ est convergente.

**I) 2) d)** 0,75 pts

Déterminer la limite de $(u_n)$.

**II) 1) a)** 0,5 pts

**Partie II :**

On considère la fonction numérique $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x}\ln(1+e^x)$. Soit $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Calculer $f(0)$ et vérifier que $f(x) > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$

**II) 1) b)** 0,5 pts

Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$ puis donner une interprétation géométrique de ce résultat.

**II) 1) c)** 0,5 pts

Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, puis donner une interprétation géométrique de ce résultat.

**II) 2) a)** 0,5 pts

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ : $f'(x) = \dfrac{1}{1+e^x} - e^{-x}\ln(1+e^x)$

**II) 2) b)** 0,5 pts

Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$ : $f'(x) = \dfrac{e^x - (1+e^x)\ln(1+e^x)}{e^x(1+e^x)}$

**II) 2) c)** 0,5 pts

Déduire que $f$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ (On peut utiliser la question 1-c) de la partie I)

**II) 3) a)** 0,5 pts

Déterminer l'équation de la tangente $(T)$ à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse $0$

**II) 3) b)** 0,25 pts

Vérifier que la tangente $(T)$ passe par le point $A\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$

**II) 3) c)** 0,75 pts

Construire $(T)$ et la courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. (On prend $\ln 2 \approx 0{,}7$)

**II) 4) a)** 0,5 pts

Montrer que $f$ admet une fonction réciproque $f^{-1}$ définie sur un intervalle $J$ que l'on déterminera. (Il n'est pas demandé de déterminer $f^{-1}(x)$)

**II) 4) b)** 0,5 pts

Vérifier que $f^{-1}$ est dérivable en $\ln 2$ et calculer $\left(f^{-1}\right)'(\ln 2)$

**II) 5) a)** 0,25 pts

5. Soit $\lambda$ un réel strictement positif.

Vérifier que $\frac{1}{1+e^{x}} = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$, pour tout $x$ de $\mathbb{R}$

**II) 5) b)** 0,5 pts

Montrer que $\int_{0}^{\lambda} \frac{1}{1+e^{x}}\,dx = \ln(2) - \ln\left(1+e^{-\lambda}\right)$

**II) 5) c)** 0,5 pts

Montrer que $\int_{0}^{\lambda} f(x)\,dx = \ln(2) - f(\lambda) + \int_{0}^{\lambda} \frac{1}{1+e^{x}}\,dx$ (Remarquer que $f(x) = \frac{1}{1+e^{x}} - f'(x)$)

**II) 5) d)** 0,5 pts

Déduire en fonction de $\lambda$, l'aire $A_\lambda$ de la partie du plan délimitée par la courbe $(\mathcal{C}_f)$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \lambda$

**II) 5) e)** 0,5 pts

Calculer $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} A_\lambda$

SOURCES

Centre national de l'évaluation et des examens · Examen national du baccalauréat, mathématiques, sciences expérimentales, option française · 2024