BURHAN

Examen national du baccalauréat, session normale 2024

2ème Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-experimentales/mathematiques/examens/2024-session-normale

Année	Session	Type	Durée	Coefficient	Barème
2024	Session normale	Examen national	3h	7	20 pts (barème officiel)

INSTRUCTIONS GENERALES

- L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;
- Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
- L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter.

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de quatre exercices et un problème, indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice 1	Suites numériques	3 points
Exercice 2	Géométrie dans l'espace	3 points
Exercice 3	Nombres complexes	4 points
Exercice 4	Calcul des probabilités	2 points
Problème	Etude de fonctions numériques et calcul intégral	8 points

- On désigne par $\overline{z}$ le conjugué du nombre complexe z et par $|z|$ son module
- ln désigne la fonction logarithme népérien

Exercice 1 — 3 pts

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 2}{1 + u_n}$, pour tout entier naturel n

1) a) — 0,25 pts

Vérifier que $u_{n+1} = 4 - \dfrac{6}{1 + u_n}$, pour tout entier naturel n

1) b) — 0,5 pts

Montrer par récurrence que $2 \leq u_n \leq 4$, pour tout entier naturel n

INDICE

Utiliser l'écriture de la question 1) a) : encadrer d'abord $1 + u_n$, puis $\dfrac{6}{1 + u_n}$.

2) a) — 0,25 pts

Montrer que $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(u_n - 1)(2 - u_n)}{1 + u_n}$, pour tout entier naturel n

2) b) — 0,5 pts

Montrer que la suite (u_n) est décroissante et en déduire que (u_n) est convergente.

3) a) — 0,5 pts

3. Soit (v_n) la suite numérique définie par $v_n = \dfrac{2 - u_n}{1 - u_n}$, pour tout entier naturel n

Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{3}$

INDICE

Exprimer $2 - u_{n+1}$ et $1 - u_{n+1}$ en fonction de u_n à l'aide de la définition, puis faire le quotient.

3) b) — 0,5 pts

Montrer que $u_n = 1 + \dfrac{1}{1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}}$, pour tout entier naturel n

3) c) — 0,5 pts

Calculer la limite de la suite (u_n)

Exercice 2 — 3 pts

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les deux points $A(-1,0,-1)$ et $B(1,2,-1)$, le plan (P) passant par A et de vecteur normal $\vec{n}(2,-2,1)$ et la sphère (S) de centre $\Omega(2,-1,0)$ et de rayon 5

1) — 0,25 pts

Montrer que $2x-2y+z+3=0$ est une équation cartésienne du plan (P)

2) — 0,25 pts

Déterminer une équation cartésienne de la sphère (S)

3) a) — 0,5 pts

Vérifier que la distance du point Ω au plan (P) est $d(\Omega,(P))=3$

3) b) — 0,5 pts

En déduire que le plan (P) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ) de rayon à déterminer.

4) a) — 0,5 pts

Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par Ω et perpendiculaire au plan (P)

4) b) — 0,5 pts

Montrer que le point $H(0,1,-1)$ est le centre du cercle (Γ)

4) c) — 0,5 pts

Montrer que la droite (Δ) est une médiatrice du segment $[AB]$

INDICE

Vérifier que A et B sont dans (P), que H est le milieu de $[AB]$ et que $\overrightarrow{AB}$ est orthogonal à $\vec{n}$.

Exercice 3 — 4 pts

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives $a = \sqrt{3}(1-i)$ et $b = 2+\sqrt{3}+i$

1) — 0,5 pts

Vérifier que $|a| = \sqrt{6}$ et que $\arg(a) \equiv \dfrac{-\pi}{4}\ [2\pi]$

2) a) — 0,75 pts

Montrer que $\dfrac{b}{a} = \dfrac{3+\sqrt{3}}{6} + \left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right) i$ puis vérifier que $\dfrac{b}{a} = \dfrac{3+\sqrt{3}}{3} e^{i\frac{\pi}{3}}$

2) b) — 0,75 pts

En déduire une forme trigonométrique du complexe b puis vérifier que b^{24} est un nombre réel.

3) a) — 0,5 pts

3. Soit R la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{6}$, qui transforme chaque point M du plan d'affixe z en un point M' d'affixe z'. On pose $R(B) = B'$, $R(A) = A'$ et $R(A') = A''$

Vérifier que $z' = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{3}+i\right) z$ et que $\arg(a') \equiv \dfrac{-\pi}{12}\ [2\pi]$ où a' est l'affixe du point A'

3) b) — 0,5 pts

Montrer que l'affixe du point A'' est $a'' = \sqrt{6} e^{i\frac{\pi}{12}}$ et en déduire que les points O , A'' et B sont alignés.

3) c) — 0,5 pts

Montrer que b' , l'affixe du point B' , vérifie $b' = \left(\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}\right) a$

3) d) — 0,5 pts

En déduire que le triangle OAB' est rectangle en O

Exercice 4 2 pts

Une urne contient sept boules : quatre boules portant le numéro1, deux boules portant le numéro 2 et une boule portant le numéro 3. Toutes les boules sont indiscernables au toucher. On tire simultanément au hasard deux boules de cette urne.

1) 0,5 pts

Montrer que $p(A) = \frac{1}{3}$, où A est l'évènement « les deux boules tirées portent le même numéro »

2) 0,5 pts

Montrer que $p(B) = \frac{5}{21}$, où B est l'évènement « La somme des numéros des boules tirées est 4 »

3) 0,5 pts

Calculer $p(A \cap B)$

4) 0,5 pts

Les événements A et B sont -ils indépendants ? Justifier.

Problème 8 pts

Partie I : On considère les deux fonctions u et v définies sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = e^x$ et $v(x) = x$

I) 1) 0,5 pts

Tracer dans un même repère orthonormé les courbes $(\mathcal{C}_u)$ et $(\mathcal{C}_v)$ des fonctions u et v

I) 2) 0,25 pts

Justifier graphiquement que $e^x - x > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$

I) 3) 0,5 pts

Calculer l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe $(\mathcal{C}_u)$, la courbe $(\mathcal{C}_v)$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$

II) 1) a) 0,25 pts

Partie II : On considère la fonction numérique f définie par $f(x) = x + 1 - \ln(e^x - x)$.

Vérifier que f est définie sur $\mathbb{R}$

II) 1) b) 0,5 pts

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - \ln(1 - xe^{-x})$

II) 1) c) 0,5 pts

En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$, puis interpréter géométriquement ce résultat.

II) 2) a) 0,25 pts

Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

II) 2) b) 0,5 pts

Vérifier que pour tout $x < 0$, $f(x) = x + 1 - \ln(-x) - \ln\left(1 - \dfrac{1}{xe^{-x}}\right)$

II) 2) c) 0,75 pts

Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ puis déduire que la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = x$ au voisinage de $-\infty$

INDICE

Diviser l'écriture de 2) b) par x et poser $t = -x$ pour le terme $\dfrac{\ln(-x)}{x}$; pour la branche parabolique, étudier aussi $f(x) - x$.

II) 3) a) 0,5 pts

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = \dfrac{1 - x}{e^x - x}$

II) 3) b) 0,5 pts

Etudier le signe de la fonction dérivée de f , puis déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$

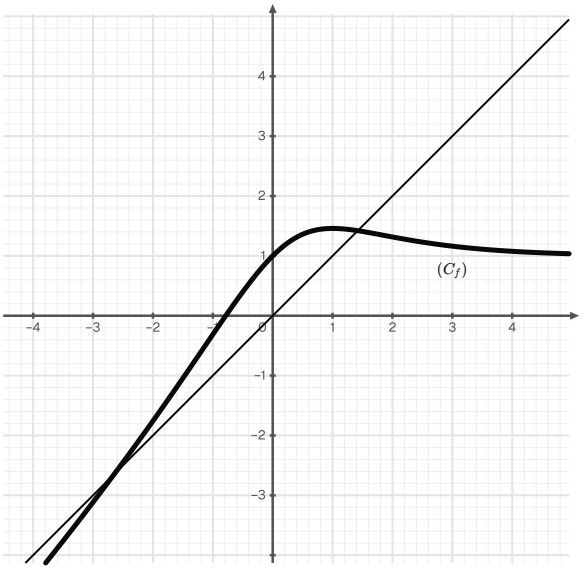
II) 3) c) 0,75 pts

Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $]-1, 0[$

II) 4) a) 0,5 pts

4. La courbe $(\mathcal{C}_f)$ ci-contre est la représentation graphique de f dans un repère orthonormé.

Justifier graphiquement que l'équation $f(x) = x$ admet deux solutions α et β .



La courbe (C_f) de f et la droite d'équation y = x, dans un repère orthonormé.

II) 4) b) 0,5 pts

Montrer que : $e^{\alpha} - e^{\beta} = \alpha - \beta$

II) 5) a) 0,5 pts

5. Soit g la restriction de la fonction f sur l'intervalle $I =]-\infty, 1]$

Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera. (Il n'est pas demandé de déterminer $g^{-1}(x)$)

II) 5) b) 0,75 pts

Vérifier que g^{-1} est dérivable en 1 et calculer $\left(g^{-1}\right)'(1)$

INDICE

Trouver l'antécédent de 1 par g dans $]-\infty, 1]$: résoudre $f(x) = 1$.

SOURCES

Centre national de l'évaluation et des examens · Examen national du baccalauréat, mathématiques, sciences expérimentales, option française · 2024