BURHAN

# Examen national du baccalauréat, session de rattrapage 2023

2ème Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-experimentales/mathematiques/examens/2023-session-rattrapage

| Année | Session | Type | Durée | Coefficient | Barème |
|---|---|---|---|---|---|
| 2023 | Session de rattrapage | Examen national | 3h | 7 | 20 pts (barème officiel) |

**INSTRUCTIONS GENERALES**

- L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;
- Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
- L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter.

**COMPOSANTES DU SUJET**

L'épreuve est composée de quatre exercices et un problème indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

| | | |
|---|---|---|
| Exercice 1 | Suites numériques | 3 points |
| Exercice 2 | Géométrie dans l'espace | 3 points |
| Exercice 3 | Nombres complexes | 3 points |
| Exercice 4 | Calcul des probabilités | 3 points |
| Problème | Etude de fonctions numériques et calcul intégral | 8 points |

- On désigne par $\overline{z}$ le conjugué du nombre complexe $z$ et par $|z|$ son module
- ln désigne la fonction logarithme népérien.

## Exercice 1 — 3 pts

On considère la suite numérique $(u_n)$ définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n - 2}{2u_n + 5}$ , pour tout $n$ de $\mathbb{N}$

### 1) — 0,5 pts

Montrer que pour tout $n$ de $\mathbb{N}$ : $u_n > -1$

INDICE

Exprimer $u_{n+1} + 1$ en fonction de $u_n$ et raisonner par récurrence.

### 2) — 0,5 pts

Montrer que la suite $(u_n)$ est décroissante, puis déduire que $(u_n)$ est convergente.

### 3) a) — 0,5 pts

3. On pose $v_n = \dfrac{3}{1 + u_n}$ , pour tout $n$ de $\mathbb{N}$

Montrer que $(v_n)$ est une suite arithmétique de raison $2$ puis déterminer son premier terme.

### 3) b) — 0,5 pts

Exprimer $u_n$ en fonction de $n$ , pour tout $n$ de $\mathbb{N}$ et déduire la limite de $(u_n)$

### 4) a) — 0,5 pts

4. On pose $w_n = e^{3 - v_n}$ et $S_n = w_0 + w_1 + \ldots + w_n$ , pour tout $n$ de $\mathbb{N}$

Montrer que $(w_n)$ est une suite géométrique et déterminer sa raison et son premier terme.

### 4) b) — 0,5 pts

Calculer la limite de la somme $S_n$

## Exercice 2 — 3 pts

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points $A(2,1,2)$; $B(-2,0,5)$ ; $C(4,-5,7)$ et $\Omega(1,-1,0)$. On pose $\vec{u}=\overrightarrow{\Omega A}$

Soit $(S)$ la sphère de centre $\Omega$ et de rayon $R=3$

**1) a)** — 0,5 pts

Montrer que $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=13\vec{u}$ et déduire que les points A , B et C ne sont pas alignés.

**1) b)** — 0,25 pts

Vérifier que $x+2y+2z-8=0$ est une équation cartésienne du plan $(ABC)$

**1) c)** — 0,5 pts

Montrer que le plan $(ABC)$ est tangent à la sphère $(S)$ au point $A$

**2) a)** — 0,5 pts

2. Soient $(P)$ le plan d'équation cartésienne $3x+4y+z+1=0$ et $(\Delta)$ la droite passant par le point $A$ et orthogonale au plan $(P)$

Montrer que la droite $(\Delta)$ coupe le plan $(P)$ au point $H\left(\frac{1}{2},-1,\frac{3}{2}\right)$

**2) b)** — 0,5 pts

Déterminer les coordonnées du point $D$ tel que le point $H$ soit milieu du segment $[AD]$

**3) a)** — 0,25 pts

3. Soit $(Q)$ le plan passant par le point $D$ et de vecteur normal $\overrightarrow{\Omega D}$

Montrer que le plan $(Q)$ est tangent à la sphère $(S)$ en $D$

**3) b)** — 0,5 pts

Montrer que les plans $(Q)$ et $(ABC)$ se coupent suivant la droite $(BC)$

## Exercice 3 — 3 pts

### 1) a) — 0,25 pts

1. On considère le nombre complexe $a = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}i$

Montrer que $a = \sqrt{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

### 1) b) — 0,25 pts

Déduire que $a^{2022}$ est un nombre réel.

### 2) — 0,5 pts

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points $A$ et $B$ d'affixes respectives $a$ et $\overline{a}$

Déterminer une mesure de l'angle de la rotation $R$ de centre $O$ et qui transforme $B$ en $A$

### 3) a) — 0,5 pts

3. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E_\alpha)$ : $z^2 - \sqrt{3}z + \alpha = 0$ où $\alpha$ est un nombre réel non nul.

On suppose que l'équation $(E_\alpha)$ admet deux racines complexes conjuguées non réelles $z$ et $\overline{z}$

Soient les points $M(z)$ ; $N(\overline{z})$ et $P(\sqrt{3})$ du plan complexe.

**Sans résoudre l'équation $(E_\alpha)$ :**

Justifier que $\alpha > \dfrac{3}{4}$ et que $\alpha = z\overline{z}$

### 3) b) — 0,5 pts

Montrer que $|z| = |z - \sqrt{3}|$

### 3) c) — 0,5 pts

En déduire que les points $M$ et $N$ appartiennent à la médiatrice $(\Delta)$ du segment $[OP]$

### 3) d) — 0,5 pts

Déterminer la valeur de $\alpha$ pour laquelle $|z - \sqrt{3}| = \sqrt{3}$ et déduire dans ce cas, les points d'intersection de la droite $(\Delta)$ et le cercle de centre $P$ et de rayon $\sqrt{3}$

## Exercice 4 — 3 pts

Une urne contient quatre boules blanches et deux boules noires, indiscernables au toucher.

**1) a)** — 0,5 pts

1. On tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne.

Calculer la probabilité de l'événement $A$ : " tirer au moins une boule noire".

**1) b)** — 0,5 pts

Soit l'événement $B$ : "Obtenir deux boules de même couleur". Montrer que $p(B) = \frac{7}{15}$

**1) c)** — 0,5 pts

On répète cette expérience cinq fois en remettant dans l'urne les boules tirées, après chaque tirage.

Quelle est la probabilité pour que l'événement $B$ soit réalisé exactement trois fois.

**2) a)** — 0,25 pts

2. Dans cette question, on tire des boules de l'urne, une après l'autre et sans remise et on arrête le tirage lorsqu'on obtient une boule blanche pour la première fois.

Soit $X$ la variable aléatoire qui est égale au nombre de tirages effectués dans cette expérience.

Justifier que les valeurs prises par $X$ sont : 1 ; 2 et 3

**2) b)** — 0,25 pts

Montrer que $p(X = 2) = \frac{4}{15}$

**2) c)** — 0,5 pts

Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $X$

**2) d)** — 0,5 pts

Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une boule noire ?

## Problème 8 pts

On considère la fonction numérique $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x) = (x-1)^2 e^{x(2-x)} & ; \ x \leq 2 \\ f(x) = 1 + (x-2)^2 \ln(x-2) & ; \ x > 2 \end{cases}$

Soit $(C)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 1cm)

### 1) 0,5 pts

Montrer que la fonction $f$ est continue au point $2$

### 2) a) 0,25 pts

Vérifier que pour tout $x < 2$ et $x \neq 0$ , $\dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2} = xe^{x(2-x)} - x.\dfrac{e^{x(2-x)} - 1}{x(2-x)}$

INDICE

Remarquer que $(x-1)^2 = 1 - x(2-x)$.

### 2) b) 0,5 pts

Montrer que $f$ est dérivable à gauche en $2$.

### 2) c) 0,75 pts

Montrer que $f$ est dérivable en $2$ et que $f'(2) = 0$ puis interpréter géométriquement le résultat.

### 3) a) 0,25 pts

Vérifier que pour tout $x \leq 2$, $f(x) = x(x-2)e^{x(2-x)} + e^{x(2-x)}$

### 3) b) 0,5 pts

Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et interpréter géométriquement le résultat.

### 3) c) 0,75 pts

Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ puis interpréter géométriquement le résultat.

### 4) a) 0,5 pts

Montrer que pour tout $x < 2$ , $f'(x) = 2x(x-1)(2-x)e^{x(2-x)}$

### 4) b) 0,5 pts

Montrer que pour tout $x > 2$ , $f'(x) = (x-2)\left(1 + 2\ln(x-2)\right)$

### 4) c) 0,5 pts

Résoudre dans l'intervalle $]2, +\infty[$, l'inéquation $1 + 2\ln(x-2) \leq 0$

### 4) d) 0,75 pts

Etudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variations de $f$ sur $\mathbb{R}$

**5)** 1 pts

Construire la courbe $(C)$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

(On donne : $f(3)=1$ ; $2+\dfrac{1}{\sqrt{e}}\approx 2.6$ et $f\left(2+\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)\approx 0.8$ )

**6) a)** 0,5 pts

6. Soit $\lambda\in\,]2,3[$

En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$\int_{\lambda}^{3}(x-2)^2\ln(x-2)\,dx=-\frac{1}{9}+\frac{1}{3}(\lambda-2)^3\left(\frac{1}{3}-\ln(\lambda-2)\right)$$

**6) b)** 0,5 pts

Déduire en fonction de $\lambda$ l'aire $A(\lambda)$ de la partie du plan limitée par la courbe $(C)$ et les droites d'équations: $y=1$ , $x=\lambda$ et $x=3$

**6) c)** 0,25 pts

Calculer $\lim\limits_{\lambda\to 2^+}A(\lambda)$

SOURCES

Centre national de l'évaluation et des examens · Examen national du baccalauréat, mathématiques, sciences expérimentales, option française · 2023