BURHAN

Examen national du baccalauréat, session normale 2023

2ème Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-experimentales/mathematiques/examens/2023-session-normale

Année	Session	Type	Durée	Coefficient	Barème
2023	Session normale	Examen national	3h	7	20 pts (barème officiel)

INSTRUCTIONS GENERALES

- L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;
- Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
- L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter.

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de trois exercices et un problème indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice 1	Géométrie dans l'espace	3 points
Exercice 2	Nombres complexes	3 points
Exercice 3	Calcul des probabilités	3 points
Problème	Etude de fonctions numériques, calcul intégral et suites numériques	11 points

- On désigne par $\overline{z}$ le conjugué du nombre complexe z et par $|z|$ son module
- ln désigne la fonction logarithme népérien

Exercice 1 — 3 pts

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points $A(0,1,4)$, $B(2,1,2)$, $C(2,5,0)$ et $\Omega(3,4,4)$.

1) a) — 0,25 pts

Montrer que $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=4\left(2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}\right)$

1) b) — 0,5 pts

En déduire l'aire du triangle ABC et la distance $d\left(B,(AC)\right)$

2) a) — 0,25 pts

2. Soit D le milieu du segment $[AC]$

Vérifier que $\overrightarrow{D\Omega}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)$

2) b) — 0,5 pts

En déduire que $d\left(\Omega,(ABC)\right)=3$.

3) a) — 0,5 pts

3. Soit (S) la sphère d'équation $x^2+y^2+z^2-6x-8y-8z+32=0$

Déterminer le centre et le rayon de la sphère (S)

3) b) — 0,5 pts

Montrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S) en un point que l'on déterminera.

4) — 0,5 pts

Soient (Q_1) et (Q_2) les deux plans parallèles à (ABC) tels que chacun d'eux coupe (S) suivant un cercle de rayon $\sqrt{5}$

Déterminer une équation cartésienne pour chacun des deux plans (Q_1) et (Q_2)

Exercice 2 — 3 pts

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $a = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$, $b = 1 + \sqrt{2} + i$, $c = \overline{b}$ et $d = 2i$

1) — 0,25 pts

Écrire le nombre complexe a sous forme trigonométrique.

2) a) — 0,25 pts

Vérifier que $b - d = c$

2) b) — 0,5 pts

Montrer que $\left(\sqrt{2}+1\right)(b-a) = b - d$ et déduire que les points A, B et D sont alignés.

3) a) — 0,25 pts

Vérifier que $ac = 2b$

3) b) — 0,5 pts

En déduire que $2\arg(b) \equiv \dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$

4) a) — 0,25 pts

4. Soit R la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$ et qui transforme chaque point M du plan d'affixe z en un point M' d'affixe z' .

Montrer que $z' = \dfrac{1}{2}az$

4) b) — 0,5 pts

En déduire que $R(C) = B$ et que $R(A) = D$

4) c) — 0,5 pts

Montrer que $\dfrac{b-a}{c-a} = \left(\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}\right)a$, puis déduire une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right)$

Exercice 3 — 3 pts

Une urne U_1 contient six boules portant les nombres : 0 ; 0 ; 1 ; 1 ; 1 ; 2 et une urne U_2 contient cinq boules portant les nombres: 1 ; 1 ; 1 ; 2 ; 2 .

On suppose que les boules des deux urnes sont indiscernables au toucher.

On considère l'expérience aléatoire suivante :

« On tire une boule de l'urne U_1 et on note le nombre a qu'elle porte, puis on la met dans l'urne U_2 , ensuite on tire une boule de l'urne U_2 et on note le nombre b qu'elle porte ».

On considère les événements suivants :

A : "la boule tirée de l'urne U_1 porte le nombre 1"

B : "le produit ab est égal à 2 "

1) a) — 0,5 pts

Calculer $p(A)$; la probabilité de l'événement A .

1) b) — 0,5 pts

Montrer que $p(B) = \frac{1}{4}$ (On peut utiliser l'arbre des possibilités)

INDICE

La composition de U_2 au second tirage dépend de la boule ajoutée : elle contient alors six boules.

2) — 0,75 pts

Calculer $p\left(A/B\right)$; probabilité de l'événement A sachant que l'événement B est réalisé.

3) a) — 0,25 pts

3. Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque résultat de l'expérience, le produit ab

Montrer que $p(X = 0) = \frac{1}{3}$

3) b) — 0,5 pts

Donner la loi de probabilité de X (Remarquer que les valeurs prises par X sont : 0 ; 1 ; 2 et 4)

3) c) — 0,5 pts

On considère les événements :

M : " le produit ab est pair non nul" et N : "le produit ab est égal à 1 "

Montrer que les événements M et N sont équiprobables.

Problème 11 pts

On considère la fonction numérique f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=2-\dfrac{2}{x}+(1-\ln x)^2$

Soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité : $1\,cm$).

1) a) 0,25 pts

Vérifier que pour tout $x\in]0,+\infty[$: $f(x)=\dfrac{3x-2-2x\ln x+x(\ln x)^2}{x}$

1) b) 0,5 pts

Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} x(\ln x)^2=0$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)^2}{x}=0$ (On peut poser : $t=\sqrt{x}$)

1) c) 0,5 pts

Déduire que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$, puis donner une interprétation géométrique du résultat.

1) d) 0,75 pts

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, puis montrer que la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$

2) 0,5 pts

Montrer que pour tout $x\in]0,+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{2(1-x+x\ln x)}{x^2}$

3) a) 0,5 pts

3. En exploitant le tableau de variation ci-dessous, de la fonction dérivée f' de f sur $]0,+\infty[$:

(On donne $\beta\approx 4.9$)

Prouver que f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ puis dresser le tableau de variations de f

Tableau de variation de la fonction dérivée f' de f sur]0,+∞[

x	0		1		β		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+\infty$	↘	0	↗	$f'(\beta)$	↘	0

3) b) 0,5 pts

Donner le tableau de signe de la dérivée seconde f'' de la fonction f sur $]0,+\infty[$

3) c) 1 pts

Déduire la concavité de la courbe (C_f) en précisant les abscisses de ses deux points d'inflexion.

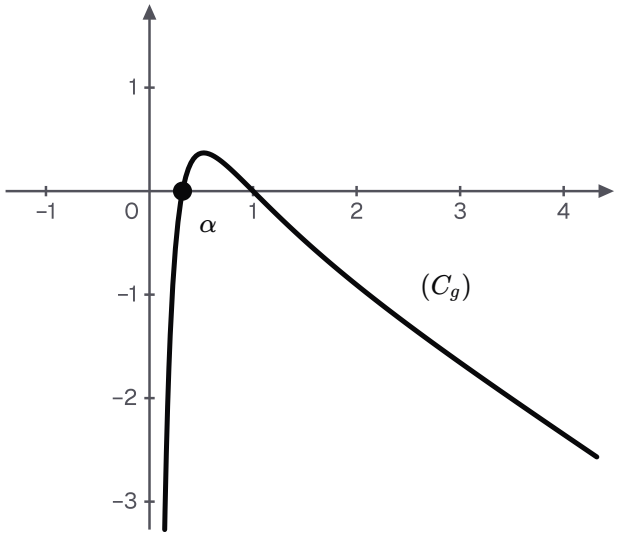
4) a) 0,5 pts

4. La courbe (C_g) ci-contre est la représentation graphique de la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$ et qui s'annule en α et 1

($\alpha \approx 0{,}3$)

Soit (Δ) la droite d'équation $y = x$.

A partir de la courbe (C_g), déterminer le signe de la fonction g sur $]0, +\infty[$



La courbe (C_g) de la fonction g : x ↦ f(x) - x, dans un repère orthonormé.

4) b) 0,5 pts

Déduire que la droite (Δ) est en dessous de (C_f) sur l'intervalle $[\alpha, 1]$ et au-dessus de (C_f) sur les intervalles $]0, \alpha]$ et $[1, +\infty[$

5) 1,5 pts

Construire la courbe (C_f) et la droite (Δ) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

(On prend : $\alpha \approx 0.3$, $\beta \approx 4.9$ et $f(\beta) \approx 1.9$)

6) a) 0,5 pts

Vérifier que la fonction $x \mapsto 2x - x \ln x$ est une primitive de la fonction $x \mapsto 1 - \ln x$ sur $[\alpha, 1]$

6) b) 1 pts

En utilisant une intégration par parties, montrer que $\int_{\alpha}^{1} (1 - \ln x)^2 dx = 5(1 - \alpha) + \alpha(4 - \ln \alpha) \ln \alpha$

6) c) 0,75 pts

Déduire en fonction de α l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = 1$

7) a) 0,5 pts

7. Soit la suite numérique (u_n) définie par $u_0 \in]\alpha, 1[$ et la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

Montrer par récurrence que $\alpha < u_n < 1$, pour tout n de $\mathbb{N}$

7) b) 0,5 pts

Montrer que la suite (u_n) est croissante. (on peut utiliser la question 4) b)

7) c) 0,75 pts

En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

SOURCES

Centre national de l'évaluation et des examens · Examen national du baccalauréat, mathématiques, sciences expérimentales, option française · 2023