BURHAN

Examen national du baccalauréat, session de rattrapage 2022

2ème Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-experimentales/mathematiques/examens/2022-session-rattrapage

Année	Session	Type	Durée	Coefficient	Barème
2022	Session de rattrapage	Examen national	3h	7	20 pts (barème officiel)

INSTRUCTIONS GENERALES

- L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;
- Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
- L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter.

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de quatre exercices et un problème indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice 1	Suites numériques	2,5 points
Exercice 2	Géométrie dans l'espace	3 points
Exercice 3	Nombres complexes	3 points
Exercice 4	Calcul des probabilités	3 points
Problème	Etude d'une fonction numérique et calcul intégral	8,5 points

- ln désigne la fonction logarithme népérien

Exercice 1 — 2,5 pts

Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}u_n + \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1) a) — 0,5 pts

Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n > 1$

1) b) — 0,75 pts

Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{\sqrt{2}-2}{2}(u_n - 1)$ et déduire que la suite (u_n) est décroissante et convergente

2) a) — 0,5 pts

2. On pose pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_n = u_n - 1$

Montrer que (v_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison et son premier terme.

2) b) — 0,5 pts

Ecrire u_n en fonction de n puis déduire la limite de la suite (u_n).

2) c) — 0,25 pts

Calculer la somme $S = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_{2021}$

Exercice 2 — 3 pts

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les deux points $A(1,-1,1)$ et $B(5,1,-3)$. Soit (S) la sphère de centre $\Omega(3,0,-1)$ et de rayon $R=3$, et (Δ) la droite passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}(2,-2,1)$

1) a) — 0,25 pts

Calculer la distance ΩA

1) b) — 0,5 pts

Montrer que les droites (Δ) et (ΩA) sont perpendiculaires.

1) c) — 0,25 pts

Déduire la position relative de la droite (Δ) et la sphère (S)

2) — 0,5 pts

Soit le point $M_a(2a-3,\ 3-2a,\ a-1)$ où $a\in\mathbb{R}$, montrer que $\overrightarrow{AM_a}=(a-2)\vec{u}$ et déduire que $M_a\in(\Delta)$ pour tout $a\in\mathbb{R}$

3) a) — 0,5 pts

Vérifier que $2x-2y+z-9a+13=0$ est une équation du plan (P_a) passant par M_a et perpendiculaire à la droite (Δ)

3) b) — 0,5 pts

Montrer que $d(\Omega,(P_a))=|3a-6|$

3) c) — 0,5 pts

Déterminer les deux valeurs de a pour lesquelles le plan (P_a) est tangent à la sphère (S).

Exercice 3 — 3 pts

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A , B et C d'affixes respectives $Z_A = 1+5i$, $Z_B = 1-5i$ et $Z_C = 5-3i$

1) — 0,25 pts

Déterminer le nombre complexe Z_D affixe du point D milieu du segment $[AC]$

2) — 0,5 pts

Soit h l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$.

Déterminer le nombre complexe Z_E affixe du point E l'image de B par h

3) — 0,5 pts

On considère la rotation R de centre C et d'angle $\left(\frac{-\pi}{2}\right)$, déterminer l'image de B par R

4) a) — 0,25 pts

4. Soit F le point d'affixe $Z_F = -1+i$

Vérifier que $\frac{Z_D - Z_A}{Z_F - Z_A} \times \frac{Z_F - Z_E}{Z_D - Z_E} = -1$

4) b) — 0,5 pts

En déduire que $\overline{\left(\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AD}\right)} + \overline{\left(\overrightarrow{ED},\overrightarrow{EF}\right)} \equiv \pi\,[2\pi]$

4) c) — 0,5 pts

Déterminer la forme trigonométrique du nombre $\frac{Z_E - Z_F}{Z_A - Z_F}$ et déduire la nature du triangle AEF

4) d) — 0,5 pts

Déduire que les points A, D, E et F appartiennent à un cercle dont on déterminera un diamètre.

Exercice 4 — 3 pts

Une urne contient trois boules blanches, quatre boules rouges et cinq boules vertes, indiscernables au toucher. On tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne.

1) a) — 0,75 pts

1. On considère les événements suivants: A : " Obtenir exactement deux boules rouges "

B : " Obtenir exactement une boule verte "

Montrer que $p(A) = \frac{12}{55}$ et $p(B) = \frac{21}{44}$

1) b) — 0,75 pts

Calculer $p(A/B)$: la probabilité de l'événement A sachant que l'événement B est réalisé. Les événements A et B sont-ils indépendants ?

2) a) — 1 pts

2. Soit la variable aléatoire X qui associe à chaque tirage le nombre de boules vertes tirées

Déterminer la loi de probabilité de X

2) b) — 0,5 pts

Calculer la probabilité d'obtenir au moins deux boules vertes.

Problème 8,5 pts

Soit f la fonction numérique définie sur $[0,+\infty[$ par $\begin{cases} f(x)=x^4(\ln x-1)^2\ ;\ x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ (unité : $1cm$)

1) 0,75 pts

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis déterminer la branche infinie de (C) au voisinage de $+\infty$

2) a) 0,5 pts

Montrer que f est continue à droite en 0

2) b) 0,5 pts

Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 puis interpréter le résultat géométriquement

3) a) 0,75 pts

Montrer que $f'(x)=2x^3(\ln x-1)(2\ln x-1)$ pour tout x de l'intervalle $]0,+\infty[$

3) b) 0,5 pts

Dresser le tableau de variations de f

4) a) 0,5 pts

Sachant que $f''(x)=2x^2(6\ln x-5)\ln x$ pour tout x de l'intervalle $]0,+\infty[$, étudier le signe de $f''(x)$ sur $]0,+\infty[$

4) b) 0,5 pts

Déduire que la courbe (C) admet deux points d'inflexion dont on déterminera les abscisses

5) a) 1 pts

Construire la courbe (C) dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ (on prend : $\sqrt{e}\simeq 1{,}6$ et $e^2\simeq 7{,}2$)

5) b) 0,5 pts

En utilisant la courbe (C), déterminer le nombre de solutions de l'équation $x^2(\ln x-1)=-1$

6) a) 0,5 pts

6. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=f\left(|x|\right)$

Montrer que la fonction g est paire

6) b) 0,5 pts

Construire (C_g) la courbe représentative de g dans le même repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

7) a) 0,5 pts

On pose $I = \int_1^e x^4(\ln x - 1)\,dx$, en utilisant une intégration par parties, montrer que

$$I = \frac{6 - e^5}{25}$$

7) b) 0,5 pts

On considère la fonction h définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par $h(x) = x^5(\ln x - 1)^2$.

Vérifier que $h'(x) = 5f(x) + 2x^4(\ln x - 1)$

7) c) 0,5 pts

Déduire que $\int_1^e f(x)\,dx = -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}I$

7) d) 0,5 pts

Calculer l'aire du domaine délimité par la courbe (C) et l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$

SOURCES

Centre national de l'évaluation et des examens · Examen national du baccalauréat, mathématiques, sciences expérimentales, option française · 2022